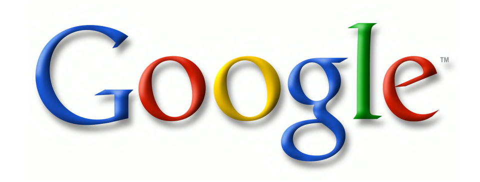
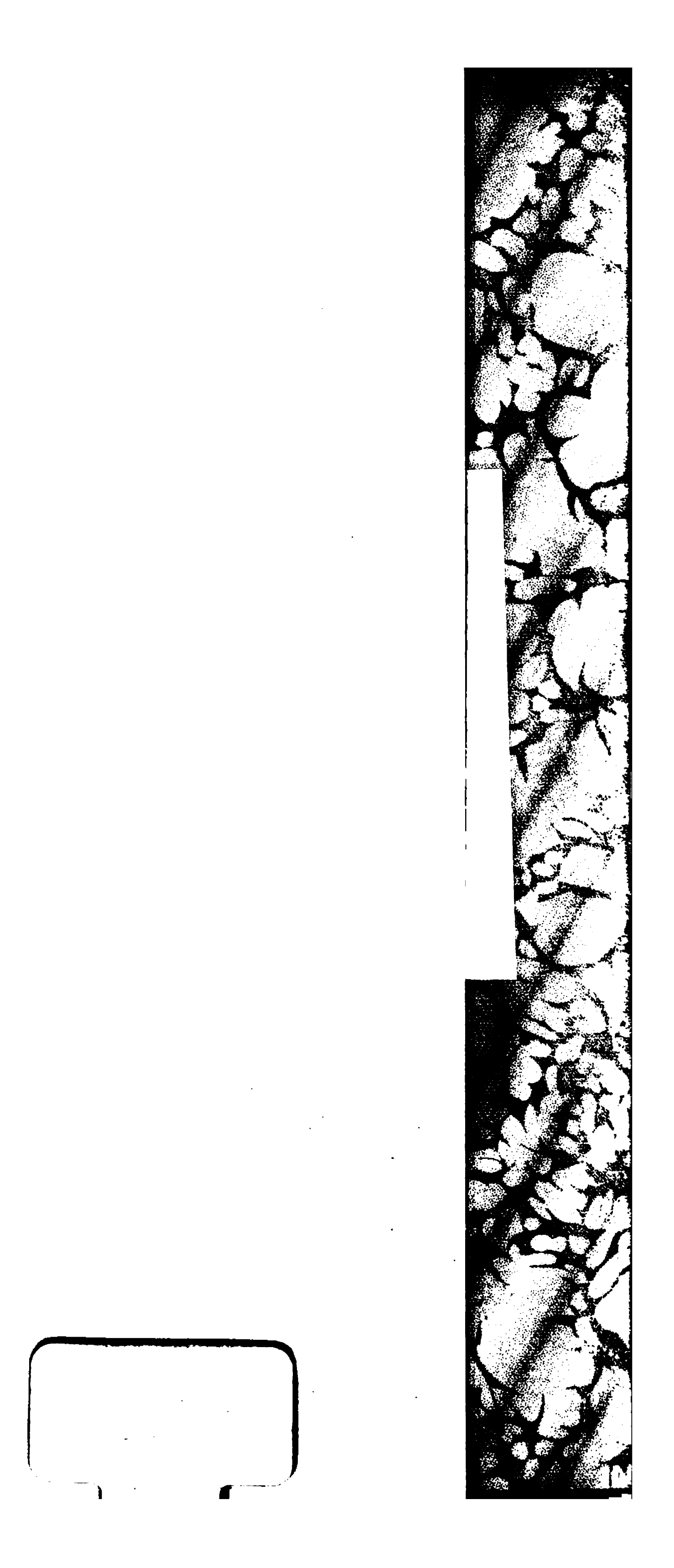
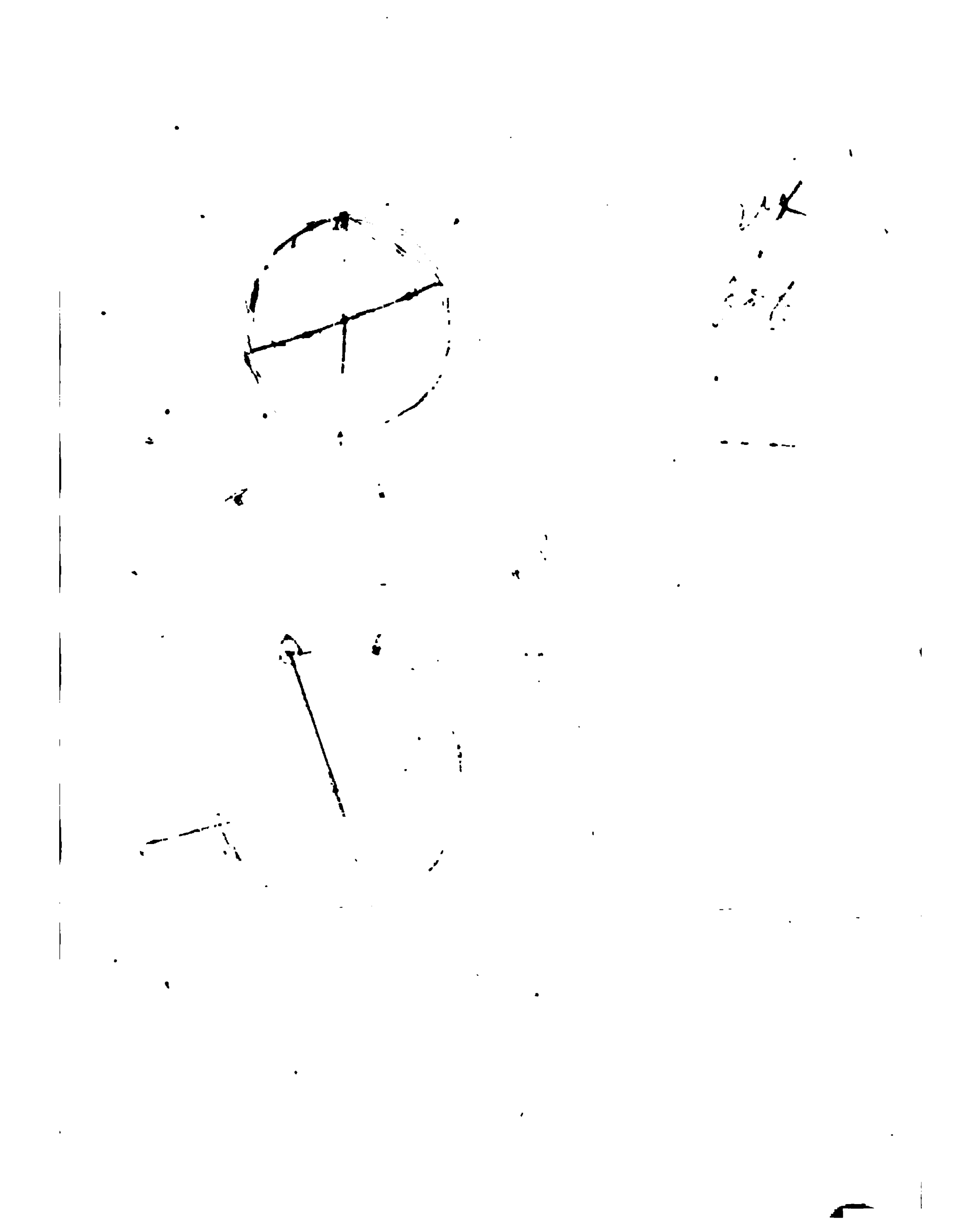








COURS

DE

TOPOGRAPHIE ET DE GÉODÉSIE.

PARIS. — Imprimerie de COSSE et J. DUMAINE, rue Christine, 2.

COURS

DE

TOPOGRAPHIE ET DE GÉODÉSIE

PAR

J.-F. SALNEUVE.

PROFESSEUR A L'ÉCOLE D'APPLICATION D'ÉTAT-MAJOR,
OFFICIER DE LA LÉGION D'HONNEUR, CHEVALIER DE SAINT-FERDINAND D'ESPAGNE,
CHEF D'ESCADRON D'ÉTAT-MAJOR,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Quatrième Édition modifiée

PAR

ACOLET-SALNEUVE,

CHEF D'ESCADRON D'ÉTAT-MAJOR, PROFESSEUR A L'ÉCOLE D'APPLICATION.



PARIS
LIBRAIRIE MILITAIRE
J. DUMAINE, LIBRAIRE-ÉDITEUR DE L'EMPEREUR
Rue et Passage Dauphine, 30

1869

Quelques modifications importantes ont été faites à cette quatrième édition; elle représente toujours néanmoins le livre que M. Salneuve a publié, pour la première fois, en 1840. Avec le fond qui existait et qu'avait créé l'auteur, il a été facile d'améliorer les détails.

Plusieurs chapitres consacrés à des questions de mathématiques pures, ont été réduits à des proportions jugées suffisantes pour l'intelligence des matières principales que l'ouvrage a pour but d'enseigner. D'autres chapitres ont été supprimés parce qu'ils traitaient des sujets un peu étrangers à la topographie et à la géodésie.

Ils ont été remplacés par une étude sur l'emploi de la photographie, dans l'exécution des levés ; quoique l'importance que quelques personnes prêtent à ce sujet, nous semble exagérée, il a dû être examiné avec soin dans un livre écrit sur la topographie.

On a également ajouté un autre chapitre relatif aux déformations partielles du sphéroïde terrestre ; on y indique un moyen de rechercher les déviations des verticales, par rapport aux normales à l'ellipsoïde de révolution qu'on est obligé d'employer comme surface de projection des points géodésiques. Les considérations qui sont exposées dans ce chapitre, n'ont pas encore reçu la consécration de l'expérience, mais elles peuvent servir de renseignement à ceux qui voudraient s'occuper de l'importante question relative à la figure de la terre ; elles peuvent, en tout cas, rassurer ceux qui pensent qu'une carte topographique, appuyée sur les coordonnées géographiques fournies par la géodésie, est entachée d'erreurs résultant de l'imperfection de ces coordonnées, nécessairement erronées quoique provenant d'un canevas exact.

Une amélioration matérielle obtenue en intercalant les figures dans le texte, facilitera beaucoup la lecture de l'ouvrage.

A. S.

COURS

DE

TOPOGRAPHIE ET DE GÉODÉSIE

LIVRE Ier

TOPOGRAPHIE

CHAPITRE Ier

NOTIONS GÉNÉRALES

1. La topographie a pour but la représentation, sur un plan, d'une figure semblable à une partie restreinte de la surface terrestre.

La terre n'étant ni plane ni développable sur un plan, le problème ne peut pas être résolu rigoureusement.

Mais on observe qu'en faisant abstraction des accidents du terrain, toujours peu élevés les uns au-dessus des autres, la figure générale du sol se rapproche beaucoup de celle du plan.

On a alors eu l'idée, en continuant cette abstraction, de représenter sur le papier une figure semblable à celle qui existerait si tous les points remarquables du terrain étudié étaient projetés perpendiculairement sur la surface plane qui représente assez bien l'ensemble de ce terrain.

De cette idée naît la *planimétrie*.

Mais l'abstraction qui lui a donné naissance ne peut pas être admise en réalité; les accidents du sol sont importants à con-

naître. Il a donc fallu, au premier mode de représentation, en joindre un second qui le complète.

Cette nécessité a conduit à l'expression du *relief*.

2. Planimétrie ou Projection horizontale. — Avant de chercher les moyens d'exécution de la planimétrie, il a fallu préciser le plan qui représente assez bien l'ensemble du terrain, et par suite de l'importance de la verticale qui détermine l'écoulement des eaux, la direction des arêtes des constructions, la stabilité des corps en repos, on a été porté naturellement à prendre pour plan de projection celui qui est perpendiculaire à cette verticale.

Mais les verticales des différents points d'un terrain à étudier ne sont pas parallèles, en sorte que la surface continue qui leur est perpendiculaire n'est pas plane.

Cette surface, qui est celle qu'affecteraient les eaux si elles se répandaient sur tout le terrain, est en réalité quelque peu irrégulière, mais sa forme, qui se rapproche généralement de celle d'un ellipsoïde de révolution, peut en chaque lieu être représentée par celle d'une sphère dont le rayon varie dans des limites assez restreintes.

Il suit de là que la surface de projection d'un levé topographique d'une certaine étendue peut être regardée comme sphérique.

On comprend même qu'en restreignant l'étendue de ce levé, on pourra assimiler la surface de cette sphère, de rayon variable, à celle de son plan tangent, et on sera ainsi arrivé à la naissance de ce plan de projection qui permettra une représentation similaire sur une feuille plane.

Il est évident qu'en diminuant de plus en plus l'étendue du levé topographique, on finira toujours par arriver à une assimilation suffisamment exacte de la *surface horizontale réelle* et du *plan horizontal.*

Mais il est indispensable de s'assurer que cette limite de petitesse ne sera pas dépassée dans l'exécution d'un levé ayant les dimensions nécessaires pour être utile.

Pour arriver à cette conclusion, il suffit de rechercher quelle serait la différence de longueur des deux surfaces, sphérique et plane, répondant à une étendue de levé donné.

En prenant, au moyen des tables trigonométriques, la différence qui existe entre l'angle et la tangente de 50', et multipliant

par la valeur du rayon moyen de la terre, on a la différence de l'arc terrestre de 50′ et de la tangente qui lui correspond. En doublant, on obtient la différence des côtés topographiques pris sur la sphère et sur le plan tangent, côtés correspondants à un angle au centre de 1^g, et à un côté linéaire d'environ 25 lieues.

Cette différence, de 2^m,88, est bien au-dessous de celles qui résultent des procédés topographiques, en ayant surtout égard à l'immense étendue du levé, qui aurait 25 lieues de côté.

On pourra donc, dans l'exécution de la planimétrie, assimiler la surface terrestre à celle du plan tangent, autant du moins qu'on ne fera qu'un levé isolé, fût-il même d'une étendue assez considérable.

Si, au contraire, une suite de travaux topographiques doivent être placés à côté les uns des autres pour exécuter la carte d'un pays entier, il n'en sera plus de même, et les ressources d'une autre science, de la géodésie, qui tient compte de la forme de la terre, devront être alors invoquées.

Nous ne traitons actuellement que la question topographique isolée : aussi pourrons-nous sans scrupule regarder la planimétrie comme devant s'exécuter sur le plan horizontal mené par un point central du terrain, en admettant que la figure qui en résultera sera égale à celle qui existerait sur la surface horizontale si tous les points du terrain y étaient projetés par des verticales.

Mais le dessin ne peut pas avoir des dimensions égales à la projection naturelle ; c'est une similitude seule qu'on veut obtenir. Il faudra pour cela indiquer sur le papier les angles tels qu'ils seront obtenus sur le terrain, et les longueurs réduites dans un rapport constant.

Ces angles et ces lignes seront, généralement, les éléments de triangles rectilignes qui seront presque toujours définis par un côté et deux angles. Les sommets de ces triangles seront les points les plus remarquables du terrain, et on y adjoindra d'autres points secondaires en nombre suffisant pour pouvoir, avec leur secours, tracer les lignes qui, en réalité, constituent les choses à représenter, en s'aidant, pour obtenir la continuité de ces lignes, de simples appréciations obtenues à l'œil.

Ces renseignements, très-vagues jusqu'à présent, seront précisés en détail dans les chapitres suivants.

Il n'y a donc à observer que des angles qu'on emploiera tels qu'on les aura obtenus, et des longueurs qu'on ne portera sur le dessin qu'en les réduisant dans un rapport constant.

3. **Échelles.** — Ce rapport indique l'échelle du plan.

On a, par extension, donné le nom d'échelles aux figures géométriques qui font connaître les longueurs des lignes du terrain au moyen de leurs homologues du plan ou réciproquement.

On indique souvent comme échelles graphiques topographiques celles qui, bonnes pour des épures très-exactes, permettent d'apprécier des longueurs plus petites que celles que l'œil peut percevoir.

Mais si on observe qu'en topographie les projections des points ne sont, presque toujours, déterminées sur la projection qu'avec une certaine approximation représentant la limite des longueurs appréciables à l'œil, on reconnaîtra qu'il est inutile d'employer des échelles donnant plus de finesse d'appréciation qu'il n'y a d'exactitude d'exécution, et qu'il suffit de tracer au bas du dessin, avec la mention chiffrée de l'échelle, une ligne droite divisée en unités appropriées à la nature du dessin, unités numérotées et prolongées indéfiniment dans un sens, tandis que dans l'autre elles cèdent la place à l'une d'elles subdivisée en fractions dix fois plus petites.

Cela constitue l'échelle simple, suffisante pour les besoins de la topographie, et qui, connue de tout le monde, n'exige pas de plus longs développements.

La différence d'échelles des plans les a fait classer en topographie, corographie et géographie.

Les cartes topographiques construites à de grandes échelles donnent beaucoup de détails. Les cartes géographiques sont celles qui indiquent seulement les points principaux de la surface du globe. Les cartes corographiques forment l'intermédiaire entre les deux genres précédents.

Une ancienne locution les classe encore en cartes à grand point ou à petit point, suivant qu'elles renferment beaucoup ou peu de détails.

A cette classification il faut ajouter les cartes hydrographiques ou marines qui représentent des portions de la mer et des côtes avec des sondes indiquant la profondeur des eaux.

Les échelles décimales sont les seules usitées maintenant. On peut, sans prétendre le faire d'une manière absolue, les ranger ainsi qu'il suit :

$\frac{1}{2000}$ ou $\frac{1}{2500}$ pour les levés de places fortes, villes, routes, canaux, fortifications de campagne et, en général, pour tous les plans spéciaux ;

$\frac{1}{5000}$ principalement pour réduire et réunir les matériaux levés à la précédente échelle, ou pour tracer des projets ;

$\frac{1}{10000}$ pour les levés de la topographie complète d'un pays de médiocre étendue, des campements, des marches des armées, et pour servir de base aux reliefs construits pour l'étude du terrain ;

$\frac{1}{20000}$ pour les levés de très-grande surface, les reconnaissances, levés de champ de bataille et pour les réductions de la précédente ;

$\frac{1}{40000}$. Cette échelle est employée dans les travaux de la nouvelle carte de France, pour y ajouter, aux réductions du cadastre, les détails modifiés et omis et pour y figurer le relief du terrain.

$\frac{1}{80000}$. Celle-ci est adoptée pour la gravure de la carte de France.

Le 200000[e], le 500000[e], le 1000000[e] et le 2000000[e] sont affectés aux cartes corographiques et géographiques.

On peut réduire facilement toutes les échelles anciennes à la forme d'une fraction ayant l'unité pour numérateur. Celle de Cassini est de 1 ligne pour 100 toises : en réduisant 100 toises on trouve 86400 lignes, et l'on peut l'écrire sous la forme $\frac{1}{86400}$.

S'il s'agissait de 6 lignes pour 100 toises, ce serait $\frac{6}{86400}$ ou $\frac{1}{14400}$.

Si l'échelle était de 1 pouce pour 100 toises, on écrirait $\frac{1}{7200}$.

4. Relief. — Nous avons dit que, à la projection horizontale effectuée d'une manière suffisamment exacte sur le plan horizontal, il fallait joindre un second mode de représentation destiné à donner une idée des hauteurs relatives des aspérités de la surface terrestre.

L'idée qui se présente d'abord à l'esprit est d'employer, comme en géométrie descriptive, un second plan vertical de projection.

Mais si on observe que les accidents du terrain offrent toujours très-peu d'élévation, on voit que tous les points de la projection verticale seraient confondus dans une zone très-étroite, ce qui rendrait le dessin illisible.

Cette méthode a dû, en conséquence, être repoussée, et on a eu recours à celle des plans cotés qui, légèrement modifiée, a donné naissance aux cotes, aux courbes et aux lignes de plus grande pente qui définissent assez bien les formes qu'il est nécessaire de rendre sur le dessin.

Cotes. — Par des procédés que nous exposerons plus tard, on détermine les différences de niveau des points remarquables du terrain, et on inscrit, à côté de leur projection, leurs hauteurs par rapport à la *surface horizontale* réellement existante sur la terre, et non pas, comme on le dit habituellement, par rapport au plan horizontal de projection. Les opérations de nivellement qui invoquent successivement l'existence des verticales de tous les lieux d'observation, rapportent d'elles-mêmes les cotes à la surface horizontale continue, quelle que soit du reste la forme de celle-ci.

On choisit comme surface de repère celle qui, prolongée horizontalement, se confondrait avec les eaux moyennes de la mer.

Courbes.—Quel que soit le nombre des points ainsi cotés, il ne pourra jamais être assez grand pour faire connaître les hauteurs de tous les points du terrain. On suppose alors celui-ci engendré par un plan horizontal se mouvant parallèlement à lui-même, et déterminant, par ses sections avec le sol, une suite de courbes quelconques représentées en vraies grandeur et forme sur le plan horizontal de projection.

Si le nombre des sections était infini, l'ensemble de celles-ci reproduirait exactement le terrain. Dans la pratique il faut nécessairement restreindre le nombre de ces sections, et on les espace de telle sorte que les plans sécants soient distants les uns des autres d'une quantité constante pour un même levé, quantité qu'on appelle *équidistance*.

La cote de l'une des sections ou *courbes horizontales* étant connue, celles des autres courbes s'en déduisent par de simples additions ou soustractions.

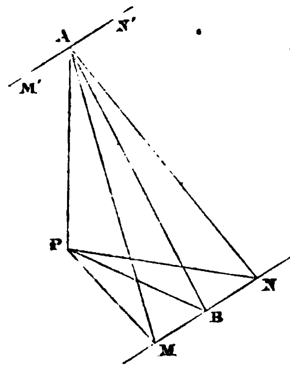
Les courbes étant une conséquence des formes, pourront définir plus ou moins exactement celles-ci. L'équidistance étant constante, ces courbes seront, en projection, inégalement espacées et d'autant plus rapprochées que la pente sera plus rapide. En résumé, des courbes ou tranches construites dans les circonstances de l'hypothèse, donneront donc une idée assez exacte des formes du terrain par leurs inflexions, et de sa pente par leur rapprochement.

Ce mode de représentation est celui qu'il faut préférer lorsqu'il s'agit d'un levé à une grande échelle destiné à établir un projet de fortification, par exemple. Il faut alors que les courbes aient été tracées très-exactement par l'un des procédés que nous indi-

querons lorsque nous traiterons du nivellement continu. Mais quand on exécute un levé topographique proprement dit, l'étendue du terrain est trop grande pour que l'on puisse déterminer rigoureusement les courbes. Elles ne sont qu'une conséquence de cotes toujours assez rares et de dessins à vue représentant les formes du terrain. Elles perdent donc en grande partie le mérite de la rigueur presque mathématique qui les fait préférer par le génie militaire, et elles ont l'inconvénient de ne pas parler suffisamment aux yeux dans certaines circonstances, lorsque, par exemple, le terrain étant peu incliné, elles deviennent très-espacées. On leur adjoint alors un second mode de représentation.

Lignes de plus grande pente. — La ligne de plus grande pente se définit elle-même par son nom. Elle jouit de la propriété d'être perpendiculaire à la courbe du terrain, tandis que sa projection est également perpendiculaire à celle de cette courbe.

Soit MN un petit élément de la courbe, AB la ligne de plus grande pente, dans un intervalle assez petit pour être confondue avec une ligne droite. L'élément du terrain AMBN sera sensiblement renfermé dans le plan tangent, et NB, MB seront des lignes droites, à très-peu près, si AM et AN sont très-peu écartés de AB.



Si P est la projection du point A sur le plan horizontal, on aura, par le moyen de deux triangles rectangles :

$$\tang B = \frac{AP}{PB} \qquad \sin B = \frac{AP}{AB}$$

$$\tang M = \frac{AP}{MP} \qquad \sin M = \frac{AP}{AM}$$

D'après la définition, l'angle B doit être plus grand que tout angle tel que M ; il faut donc que AB < AM et BP < MP. Ce qui a été dit pouvant s'appliquer à la série de tous les points avoisinant B, il s'ensuit immédiatement la démonstration des deux propriétés énoncées.

La projection de la ligne de plus grande pente doit donc être

perpendiculaire aux courbes qu'elle rencontre et à toutes celles qu'elle rencontrerait si on en augmentait indéfiniment le nombre en diminuant l'équidistance. Elle ne peut par conséquent pas être une ligne droite, sauf dans le cas tout particulier où les courbes seraient des arcs de cercle concentriques. Généralement cette projection sera une ligne courbe qui, partant normalement à la première tranche, arrivera normalement à la seconde en s'infléchissant par degrés insensibles de façon à être toujours perpendiculaire aux tranches que l'on pourrait imaginer exister entre les deux principales, en les faisant participer à la fois des formes de ces deux-ci.

De même que les courbes indiquent la forme du terrain par leurs directions et leurs écartements, les projections des lignes de plus grande pente arrivent au même but par leurs directions et leurs longueurs, qui sont des conséquences des premières.

Constance des équidistances. — Si l'on désigne par E et H l'équidistance des plans horizontaux et la longueur de la projection de la ligne de plus grande pente pour un cas particulier dans lequel cette ligne pourra être regardée comme droite, et par e et h les longueurs correspondantes réduites à l'échelle, on aura pour mesurer l'inclinaison du terrain la formule très-simple

$$\tang \alpha = \frac{E}{H} = \frac{e}{h}$$

d'où il suit que, sur un dessin, la pente sera inversement proportionnelle à h ou à la longueur de la *hachure*.

Si de plus l'équidistance réduite e est constante, la même pente sera représentée par la même longueur de hachure, quelle que soit l'échelle adoptée.

Malheureusement, il n'est pas possible d'établir cette constance d'une manière absolue, par suite des grandes différences qui peuvent exister dans les déformations de la surface sphérique de la terre, suivant les contrées.

Cependant, autant que possible, on a soin d'exécuter les dessins topographiques dans l'une des trois circonstances suivantes: $e = 0^m,001$; $e = 0^m,0005$ et $e = 0^m,00025$, ce qui donne pour les équidistances réelles, aux différentes échelles, en désignant par M le dénominateur de l'échelle, dont le numérateur serait 1

$$E = M.0,001 \qquad E = M.0,0005 \qquad E = M.0,00025$$

équidistances qui se rapportent aux pays très-accidentés, moyennement ondulés ou très-plats.

Dans le cas le plus ordinairement employé, celui où l'équidistance graphique est de $\frac{1^{mm}}{2}$, l'équidistance réelle prend

les valeurs	$2^m,5$	5^m	10^m	20^m
aux échelles de	$\frac{1}{5000}$	$\frac{1}{10000}$	$\frac{1}{20000}$	$\frac{1}{40000}$

Expression du relief du terrain.—La loi donnée plus haut pour le tracé des hachures, suffisante pour faire connaître par réflexion les formes du terrain, ne précise pas d'une manière invariable les positions à donner à ces hachures. On a profité de l'arbitraire restant encore dans leur tracé pour établir des conditions qui rendent le relief du terrain plus facilement compréhensible.

Dans les anciennes cartes topographiques on exprimait les mouvements de terrain par des teintes obtenues de diverses manières, représentant des effets analogues à ceux produits dans la nature, par une lumière éclairant ce terrain diversement, suivant sa pente et même suivant la direction des accidents.

On le supposait à cet effet soumis à l'action de rayons lumineux inclinés de 50^g à l'horizon et dans la direction nord-ouest. Ce système a été abandonné en France, par ces motifs que les mêmes mouvements étaient rendus avec des intensités de teinte différentes, ce qui exigeait une espèce de calcul mental pour les apprécier. Quelquefois on y joignait l'usage des ombres portées, ce qui donnait encore plus de vigueur au dessin, mais en outrant davantage ce qu'il y avait d'illogique dans ce mode d'opérer.

De nos jours, on préfère se rapprocher de l'effet qui serait produit par une lumière verticale, pour laquelle l'orientation des mouvements de terrain serait indifférente.

Lumière zénithale. — Pour nous rendre compte de l'effet à exécuter sur le dessin, cherchons d'abord celui que l'hypothèse de départ produirait dans la nature. Comparons les résultats produits sur deux éléments de surfaces, l'une inclinée, l'autre horizontale. Négligeons la largeur commune de ces deux surfaces et apprécions seulement ce qui se passe sur la ligne de plus grande pente et sur sa projection, ces deux longueurs étant proportionnelles aux surfaces considérées.

Les deux lignes comprises entre les mêmes verticales recevraient la même quantité de lumière ; par conséquent chaque unité de longueur de chacune d'elles en recevrait inversement à la longueur totale de la ligne à laquelle elle appartiendrait. Les quantités de lumière reçues par la même unité de longueur dans

les deux cas, seront donc dans le rapport inverse des deux lignes, et il en serait de même des unités de surface à cause de l'égalité des secondes dimensions de ces surfaces.

Mais ce rapport est précisément celui qui représente le cosinus de l'angle à l'horizon, et on peut dire que les quantités de lumière reçues, à surface égale, sont proportionnelles aux cosinus des angles à l'horizon.

Si l'on cherche à rendre les effets produits par la lumière verticale, il faut encore connaître les lois suivant lesquelles ces quantités de lumière reçue seraient renvoyées verticalement, car l'œil est supposé placé au zénith dans les cartes topographiques, par suite de l'existence de la projection horizontale.

On suppose que les surfaces éclairées ne sont pas réfléchissantes, ou du moins qu'elles ne renvoient que de la lumière diffuse; c'est en effet ce qui a lieu dans la nature. Quelle loi suivent ensuite les rayons diffusés ? C'est ce qu'il est impossible de préciser, d'autant plus que ces lois doivent varier avec la nature des surfaces.

Dans l'ignorance où l'on se trouve du résultat produit, on s'est dit qu'il n'est pas trop déraisonnable d'admettre que *les surfaces paraissent, dans l'hypothèse de la lumière zénithale, d'autant plus claires qu'elles sont proches de l'horizontalité.*

Il n'y a pas un grand inconvénient à ne pas employer une loi rigoureuse, introuvable du reste, car l'effet que l'on cherche ne se trouve pas dans la nature; il n'y a en effet que certaines latitudes, et deux époques de l'année, pour lesquelles le soleil passe au zénith. On cherche plutôt à rendre un effet parlant à l'imagination qu'un effet naturel qui n'existe pas.

Pour préciser une loi toujours préférable à la fantaisie individuelle, quelle que soit du reste l'imperfection de cette loi, on a admis en dernier lieu qu'on ferait des teintes conformes à la formule

$$\text{teinte} = \frac{\text{noir}}{\text{blanc}} = \tfrac{2}{3}\ \text{tang. de l'angle à l'horizon.}$$

Les pentes qu'il est utile d'exprimer ne dépassant pas 50^g, on a la ressource des teintes allant de 0 à $\frac{2}{3}$ pour représenter les pentes de 0 à 50^g. Passé cette dernière limite, on confond toutes les inclinaisons avec celle de la limite elle-même.

Diapason. — Cette loi admise, on pouvait l'appliquer de différentes manières en l'adjoignant aux courbes horizontales qui précisent plus mathématiquement les formes. Le lavis eût été

très-convenable s'il n'eût pas entraîné une difficulté d'exécution que tout le monde ne peut pas vaincre, et qui aurait causé des inexactitudes dans bien des cas.

On a préféré se servir de la projection de la ligne de plus grande pente ou hachure, qui, pour nous, n'est sujette jusqu'à présent qu'à la condition d'être normale à la courbe.

Les hachures terminées aux deux tranches horizontales que sépare une équidistance, laissent en vue l'existence de celles-ci, ce qui est avantageux, et en donnant la teinte admise, elles indiquent rapidement à l'œil la pente correspondante. Mais cette teinte pouvait être obtenue soit en grossissant, soit en rapprochant la hachure. On a utilisé ces deux causes de variations et on les a combinées de telle sorte que le grossissement qui donne de la vigueur et le rapprochement qui permet mieux la lecture des détails de la projection horizontale, satisfassent aux deux conditions, vigueur et clarté.

La projection horizontale ou planimétrie étant plus facilement visible aux grandes échelles, on pouvait prendre les traits plus gros afin de perdre moins de vigueur, et réciproquement.

On a établi en conséquence plusieurs diapasons ou modèles graphiques pour les différentes échelles. Pour s'en servir, il suffit de prendre celui qui correspond à l'échelle et d'appliquer le tracé des hachures correspondantes à la pente qu'on veut rendre en copiant celles qui, sur ce diapason, représentent cette même pente. Mais, sur les dessins topographiques, les inclinaisons du sol ne sont connues que par les longueurs des hachures à tracer. On a donc dû les indiquer de la même manière sur le diapason; aussi, en regard de chaque type de hachures, a-t-on mis l'écartement des courbes qui correspond à la teinte représentée ou à la pente qu'elle est destinée à rendre. Mais cet écartement pour un même angle à l'horizon dépend de l'équidistance et de l'échelle, car

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{E}{H}$$

ou bien encore

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{e}{h}$$

e étant l'équidistance réduite ou graphique, et *h* la longueur de la hachure. Si donc ces longueurs ont été calculées avec une seule valeur de l'équidistance graphique, les longueurs des hachures du dessin répondant à la même pente ne seront les mêmes qu'au-

tant que son équidistance graphique sera la même que celle du diapason. Si celle du dessin devient e', il faudra qu'on ait

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{e}{h} = \frac{e'}{h'}$$

$$h' = \frac{e'}{e}\,h$$

La longueur de hachure qu'il faudra prendre sur le diapason pour choisir la teinte convenable, sera moitié, par exemple, de celle marquée par les courbes du dessin, si l'équidistance réduite de celui-ci est double de celle qui a servi à la construction du modèle.

Il est essentiel de bien tenir compte de cette remarque et de ne pas agir sans se préoccuper de ce rapport des équidistances graphiques. En effet, chaque intensité de pente doit être rendue par une teinte unique indépendante de l'équidistance réduite qui est une conséquence de l'échelle et de l'équidistance réelle qui a été choisie pour l'exécution du dessin.

Le diapason, tout en tendant à rendre des effets assez en harmonie avec ceux produits dans la nature par l'existence d'une lumière zénithale, n'en est pas moins entaché de beaucoup d'arbitraire. Il est le résultat de la comparaison d'un grand nombre de dessins dont l'exécution a semblé la plus convenable. Du reste, cet arbitraire importe peu ; son principal mérite vient de l'uniformité qu'il est appelé à établir entre les dessins exécutés par des mains différentes, uniformité qu'il était essentiel d'obtenir, du moins d'une manière approchée.

Il sera donné plus tard, au chapitre XII, qui traitera de l'exécution graphique, la description du diapason et les renseignements, très-simples du reste, relatifs à son emploi.

LEVÉS RÉGULIERS.

PLANIMÉTRIE.

Reprenons la construction de la projection horizontale de tous les points du terrain. On peut les imaginer liés entre eux par des droites, de manière à former une suite de triangles, et l'on con-

çoit que l'un de ces triangles étant donné, on pourra construire les autres de proche en proche.

Cette division complète du terrain en triangles nécessitant une trop grande quantité d'angles, et des côtés trop petits parfois, la détermination de ces éléments deviendrait très-pénible et souvent impraticable. On se contente d'en concevoir un certain nombre dont la forme et les dimensions soient favorables à leur calcul et à leur tracé, et aux côtés desquels viennent se rattacher ensuite, par différentes opérations, tous les points de détail qui n'ont pas servi de sommets. Ces triangles, formés par des lignes fictives, composent un canevas dont l'exécution doit être la première opération d'un levé topographique, et qui est achevé lorsqu'on a multiplié les côtés de manière à pouvoir y rattacher tous les détails sans erreur sensible au compas, ce qui dépend de l'échelle.

CANEVAS.

CHAPITRE II.

MESURE DES DISTANCES

5. Les projections des points du *canevas* ou *triangulation*, projections qui doivent représenter ces points sur la planimétrie, sont regardées comme les sommets de triangles horizontaux qui peuvent être déterminés par un quelconque des trois moyens qui spécifient un triangle particulier: 1° en mesurant les trois côtés; 2° deux côtés et un angle; 3° un côté et deux angles. Pour le canevas, et autant que possible pour le levé de détail, le troisième moyen est seul applicable pratiquement, par suite de la longueur des opérations nécessaires pour mesurer les distances.

Si des données préalables dues à la géodésie, qui détermine les sommets principaux beaucoup plus exactement que la topographie, n'existent pas, il est indispensable de mesurer directement au moins un premier côté, qui prend alors le nom de *base*.

Les erreurs commises dans une suite d'opérations nombreuses déplaçant les positions des sommets des triangles horizontaux d'autant plus qu'on s'éloigne davantage du point de départ, il est bon de choisir la base vers le milieu de la surface à trianguler, autant que cela est possible. Elle doit être horizontale ou en terrain uniformément incliné pour la facilité d'une correction dont nous aurons à nous occuper. Enfin, elle doit être d'un parcours libre d'obstacles, et de ses deux extrémités il faut qu'on puisse apercevoir quelques-uns des points qu'il sera convenable de choisir comme sommets de triangles.

Le choix de la base fait, en tenant compte de ces conditions, on la jalonne et l'on mesure successivement ses différents éléments par l'un des deux procédés que nous allons indiquer.

6. **Chaîne.** — La chaîne est composée d'un certain nombre de petites tiges de fer de $0^m,2$ de longueur, reliées par des anneaux dont quatre sont en fer et le cinquième en cuivre. Ceux-ci indiquent par conséquent les mètres. La chaîne a ordinairement 10 ou 20 mètres de longueur. Son emploi exige aussi celui de tiges, dont voici l'usage.

Deux observateurs tenant chacun une extrémité de la chaîne la portent successivement à la suite d'elle-même, suivant la ligne droite qu'il s'agit de mesurer, en la tendant horizontalement, ce qui évite la réduction à l'horizon, ou mieux en la posant sur le sol. Chaque fois qu'une longueur entière a été ainsi ajoutée aux précédentes, l'observateur qui marche en avant pique en terre une des fiches dont il a dû se munir. Le second observateur recueille toutes ces fiches, et il connaît ainsi le nombre de longueurs de la chaîne contenues dans la ligne à mesurer. Ce nombre devra généralement être complété d'une fraction dont on trouvera la valeur en comptant le nombre d'anneaux compris entre la dernière fiche et le point d'arrivée.

Il faut avoir soin que les anneaux et les tiges ne se mêlent pas entre eux, sans quoi la base obtenue serait plus longue que celle de la nature.

Pour obvier à cet inconvénient, on construit quelquefois l'appareil d'un seul ruban métallique élastique qu'on enroule et déroule à volonté.

Ce procédé de mesure directe, d'une extrême simplicité, a l'inconvénient d'être d'un emploi très-lent et de ne pouvoir être

mis en usage lorsqu'il existe certains obstacles sur la ligne à parcourir.

7. Stadia. — L'usage de cet instrument, beaucoup plus délicat que celui du précédent, est avantageux en ce sens qu'il n'exige pas le parcours des distances à mesurer, mais il n'offre peut-être pas les mêmes garanties d'exactitude.

Pour fournir des résultats suffisamment approchés, la stadia doit être adaptée à une lunette; mais nous réserverons sa théorie complète pour le moment où nous aurons exposé les principes d'optique, en nous bornant à l'expliquer maintenant telle qu'elle serait sans le perfectionnement essentiel que nous ne sommes pas encore en mesure de développer. Prévenons toutefois que les résultats qui seraient obtenus par ce procédé ainsi tronqué ne conviendraient qu'à des levés expédiés.

Soit AB une mire ou grande règle peinte d'une couleur voyante, située à une distance inconnue D, d'une station à laquelle l'observateur place l'œil. En a et b sont deux fils situés à une distance constante d du point O. On aura évidemment l'égalité

O *d* *a* D *b* A B

$$D = \frac{d.AB}{ab}$$

La connaissance de D résulterait évidemment de celle d'un système quelconque de d.AB, ab, variant simultanément; mais on arrive au même résultat en laissant deux de ces quantités constantes et la troisième seule variable.

Mais l'une d'elles, d, distance des fils à l'œil dont la position est précisée par une petite visière, ou au centre optique de l'oculaire lorsqu'on emploie une lunette, doit être à peu près constante pour la netteté de la vision, dans les deux cas; elle est de plus excessivement petite et presque impossible à mesurer dans le second.

On est alors forcé de la laisser constante, et les seules variables admissibles sont la grandeur de la mire AB, ou l'écartement des fils ab, qui donnent naissance à deux espèces de stadias.

Mire. — La mire est une grande règle en bois d'environ 4^m de hauteur, composée de deux parties égales reliées entre elles par une charnière, de telle façon que, pour le transport, ces deux parties peuvent être repliées l'une sur l'autre.

Cette mire est divisée en parties égales dont la valeur est quelconque par rapport au mètre ; la division inférieure, placée à peu près à la même hauteur que la stadia, est subdivisée en parties dix fois plus petites.

Pour lire le nombre de divisions comprises dans l'angle *aob*, l'observateur vise de manière qu'un des fils tombant exactement sur une des divisions marquées, l'autre se trouve dans la partie subdivisée; on lit alors le nombre entier et la fraction supplémentaire. C'est du reste le procédé qu'on emploie quand on veut trouver une distance graphique par le secours d'un compas et d'une échelle simple.

Stadia à fils fixes. — Les deux fils peuvent être invariablement fixés. Dans ce cas, la mire AB doit être graduée, et l'œil placé en O aperçoit sur cette mire un nombre de divisions variable avec la distance, et toujours de façon que l'on ait

$$D = d.\frac{AB}{ab}.$$

Si l'on connaissait une fois pour toutes $d.ab$ et la valeur d'une des divisions de la mire, tout serait connu dans chaque circonstance quand on aurait lu le nombre de divisions interceptées par les deux fils. La mesure directe de ces trois quantités très-petites entraînerait des erreurs considérables au résultat final. On les détermine alors par une expérience directe. Pour cela il est nécessaire de mesurer à la chaîne une première distance.

D' répondrait à une lecture $a'b'$ exprimée par un nombre quelconque n' de divisions de la mire graduée.

Dans un cas quelconque où D et n seraient la distance inconnue et la lecture correspondante, on sera en droit d'écrire $\frac{D}{D'} = \frac{n}{n'}$ ou $D = D'\frac{n}{n'}$.

Mais pour éviter le calcul qui résulte de l'emploi de cette formule, il est bien préférable d'opérer de la manière suivante.

On mesure également à la chaîne une distance de 100^m par exemple, mais on y fait transporter une mire blanche non encore graduée, et on marque dessus la portion interceptée par les deux fils. Cet intervalle est ensuite divisé en autant de parties qu'il y avait de mètres dans la distance employée, 100 dans le cas actuel. On devra alors avoir $100^m = \frac{d}{ab}AB$. Mais $AB = 100$ petites

divisions marquées sur la mire, lesquelles ont une valeur métrique quelconque α. Donc

$$100^m = \frac{d}{ab} 100.\alpha^m. \quad \text{ou} \quad 1 = \frac{d}{ab}\alpha.$$

Dans une circonstance quelconque, on aura lu un certain nombre n de petites divisions, la distance correspondante devra être

$$D^m = \frac{d}{ab} n\alpha^m$$

mais $\frac{d}{ab}\alpha = 1$, donc $D = n$ mètres. Les nombres d'unités contenues dans la lecture indiqueront donc les nombres de mètres renfermés dans les distances.

Stadia à micromètre. — Dans cette modification de la stadia, la grandeur de la mire est constante, et l'écartement des fils est variable. La mesure de cet écartement exige un mécanisme particulier adapté au tube qui porte les deux fils, et composé comme il suit. Un des fils est fixe tandis que l'autre s'en écarte ou s'en rapproche suivant le mouvement d'une vis a tête plate qui entraîne dans son mouvement une aiguille qui parcourt les divisions d'un petit limbe invariablement fixé à l'instrument. Latéralement se trouve une petite roue dont les dents sont numérotées et qui peut tourner autour de son centre. Lorsque les deux fils sont en contact, une aiguille marque la graduation 0 du premier limbe, et la dent du second, qui porte le numéro 1, est un peu en arrière de l'aiguille. Pour obtenir la valeur d'un écartement des deux fils, on tourne la vis qui entraîne l'aiguille en lui faisant parcourir les divisions du limbe. Lorsque le second fil s'est écarté du premier d'une distance égale au pas de la vis, l'aiguille est revenue au 0 des divisions; mais à ce moment elle rencontre la première dent portant le numéro 1, et ainsi de suite, en sorte que, dans une circonstance quelconque, le nombre de pas de vis sera donné par le numéro de la dent de la roue mobile, et la partie fractionnaire par la division du limbe fixe marquée par l'aiguille.

On a toujours l'équation $D = \frac{d.AB}{ab}$. Désignons par β la valeur inconnue du pas de la vis; on aura $ab = n\beta^{\text{mètres}}$, n étant la lecture faite sur les limbes, et $D = \frac{d.AB}{n\beta}$.

Une expérience directe nous donnera, comme dans le premier cas, le moyen de déterminer la constante $\frac{d.AB}{\beta}$. Cette expérience aura conduit à une équation telle que

$$100^m = \frac{d.AB1}{\beta\ p}$$

d'où $\frac{d.AB}{\beta} = 100^m p$; par suite, dans une circonstance quelconque, on aura D par l'équation

$$D^m = \frac{100^m . p}{n}.$$

Il faudra donc dans chaque cas diviser la constante $100p$ par le nombre de tours et de fractions de tour. Il faut alors sur le terrain avoir une petite table construite d'avance. On pourrait aussi se servir d'une règle logarithmique ou à calcul.

8. **Réduction à l'horizon.** — Lorsque la base de départ ou toute autre distance a été mesurée sur un terrain incliné, il est nécessaire de la réduire à l'horizon, puisque nous sommes convenus de projeter toutes les lignes du terrain sur le plan horizontal.

On a obtenu par la mesure directe une longueur B. Mais cette longueur est inclinée d'un angle α. La ligne qu'il faut prendre est b qu'un triangle rectangle, dont les éléments sont B, b et α, fournit immédiatement sous la forme $b = B \cos \alpha$.

On préfère calculer la différence $B - b$ pour deux raisons qui seront exposées dans le cours de géodésie. On se sert pour cela de la formule

$$B - b = B\,(1 - \cos \alpha) = 2B \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha$$

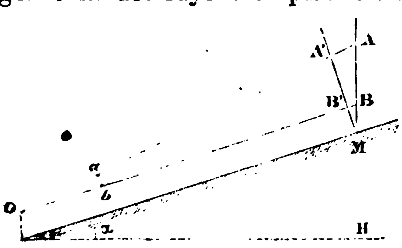
qui est une conséquence de la première.

On a construit des tables fournissant, pour une base prise pour unité, les réductions répondant aux différents angles de pente. Il suffit de multiplier les résultats qu'elle donne par la base employée, pour avoir ceux qui conviennent à chaque cas particulier.

Dans bien des circonstances, l'inclinaison est assez petite pour que la correction puisse être regardée comme insignifiante, et souvent on la néglige dans l'appréciation des mesures linéaires de détail.

Pour la base d'un canevas, il y a toujours lieu d'en tenir compte.

Correction provenant de l'emploi de la stadia. — Il a été sous-entendu, dans la comparaison des deux triangles sur lesquels est fondé le principe de la stadia, que les côtés désignés par AB et *ab* étaient parallèles; *a* et *b* étant les fils réellement existants, ou, ce qui sera plus généralement vrai, l'un d'eux étant la projection de l'autre, faite sur le rayon visuel correspondant, par une parallèle à AB. La graduation de l'instrument aura été faite en terrain horizontal avec une mire verticale, en dirigeant un des rayons O*b* parallèlement au sol, approximativement du moins. Les circonstances resteraient les mêmes si, en terrain incliné, la mire était placée perpendiculairement à ce terrain, car alors *ab* perpendiculaire à O*b* aurait bien été parallèle à la mire ABC, et la lecture A'B' eût été convenable. Mais dans la pratique il n'y aurait aucun moyen pour le porte-mire de s'assurer de cette perpendicularité de la mire, en sorte que celle-ci, mise verticalement au lieu d'occuper la position A'B'M, occupera en réalité la position ABM, et la partie interceptée par les fils sera AB au lieu de A'B'. Le calcul conséquence de cette lecture AB sera donc inexact, et la base qui aurait dû être prise proportionnelle à A'B' aura été prise proportionnelle à AB. Par conséquent, si on désigne par B la valeur de cette base calculée, la base vraie devra être égale à $B\frac{A'B'}{AB} = B\frac{A'M}{AM}$, si on remarque que l'ouverture angulaire *a*O*b* devant nécessairement être très-petite, les lignes OA, OB sont sensiblement parallèles; mais l'angle M du triangle AMA' est l'angle à l'horizon, puisqu'il est formé par une verticale et par une perpendiculaire au sol. De plus, le triangle est sensiblement rectangle en A' puisque, d'après ce qui a été dit plus haut, OA, OB sont à peu près parallèles, et qu'une d'elles OB a été dirigée parallèlement au sol ou perpendiculairement à MA'. On est donc en droit de poser approximativement $\frac{AB}{A'B} = \cos\alpha$, et par suite, *b* désignant la base corrigée, $b = B\cos\alpha$.



Mais cette valeur est celle de la base inclinée à l'horizon; elle doit être encore corrigée, comme précédemment, de cette cause d'erreur. La base qui doit appartenir à la projection

sera donc en définitive

$$\beta = b \cos\alpha = B \cos^2\alpha$$

Si l'on veut calculer la différence au lieu de la quantité elle-même, il suffit de prendre

$$B - \beta = B(1 - \cos^2\alpha) = B \sin^2\alpha.$$

9. Considérations générales sur les mesures de distance. — Ce que nous avons dit jusqu'à présent sur ce sujet, quoique traité à propos du canevas, se rapporte à toute distance linéaire mesurée topographiquement, et l'on verra plus tard, au chapitre traitant du levé de détail, que ces mesures doivent être très-nombreuses.

La grande perte de temps qui résulte de l'emploi de la chaîne ou de celui de la stadia, pour la mesure des distances, a engagé plusieurs personnes à se livrer à la recherche d'autres instruments destinés au même objet, mais n'exigeant pas, comme les seuls qui soient connus jusqu'à présent, le parcours même de ces distances. On atteindrait le but le plus utile à la topographie si l'on pouvait connaître la distance qui sépare un point de station d'un autre point déterminé seulement par un objet de forme quelconque et non pas par une mire graduée comme l'exige l'emploi de la stadia, mire dont le transport au point à déterminer est obligatoire.

C'est en raison de l'importance du résultat qu'on a en vue que nous allons expliquer les tentatives qui ont été faites à ce sujet, tentatives que quelque nouvel explorateur pourra peut-être faire fructifier.

Si l'on veut trouver un procédé qui permette à l'homme d'apprécier une chose de la nature, il faut chercher comment cette chose peut agir sur ses sens.

Des cinq sens dont il dispose, deux sont évidemment hors de cause, le goût et l'odorat. Passons en revue les trois autres.

Le toucher. C'est lui qui conduit, avec l'aide accessoire de la vue, à l'emploi de la chaîne.

L'ouïe. Par l'intensité d'un son de force constante produit à des distances diverses, l'ouïe donne une idée de ces distances, mais une idée tellement vague qu'elle ne peut conduire à aucun résultat.

Par le temps écoulé entre la production d'un bruit et son ar-

rivée à l'oreille, et par la comparaison de ce temps et de la vitesse du son dans l'air, on peut obtenir un renseignement utile.

Mais ce moyen, qui exige du reste l'action combinée de l'ouïe et de la vue, utilisé dans certains levés expédiés, exige un signal multiple agissant sur les deux sens et n'atteint pas le but de simplicité qu'on recherche. Il ne conduit en outre qu'à des résultats peu exacts.

Vue. Il ne reste que la vue qui puisse être utilement employée. C'est en effet par son secours que l'homme apprécie, assez grossièrement, les distances.

Pour essayer de l'utiliser, il faut se rendre compte des moyens que la nature a mis à la disposition de l'homme pour arriver à ce but, afin d'employer ces mêmes moyens, en les amplifiant, en vue du seul cas particulier qui nous occupe.

La vue donne une sensation un peu confuse des distances par quatre moyens différents.

L'écartement des deux yeux donne à ceux-ci une convergence qui, variant avec la distance, peut donner une idée de celle-ci. L'amplification de ce moyen d'appréciation conduit au procédé topographique ordinaire de la détermination d'un triangle dont la base mesurée représente l'écartement des deux yeux.

La grandeur angulaire d'un objet de dimension connue, qui varie avec la distance, a été utilisée dans l'emploi de la stadia.

La perspective aérienne, qui éteint la couleur propre des objets en les teintant d'une nuance bleuâtre ou grisâtre due à la lumière réfléchie par l'air ou par le brouillard, est encore un élément d'appréciation, mais qui n'a d'action que sur les grandes distances, en temps ordinaire du moins, et qui n'est susceptible d'aucune mesure. Cet effet ne peut être utilisé que par les peintres, qui l'exagèrent même beaucoup pour obvier en partie au défaut d'existence des deux points de vue dont l'homme dispose avec ses deux yeux.

La contractibilité du cristallin, nécessaire pour que l'image réelle qui doit donner une sensation sur la rétine se forme exactement sur celle-ci, est analogue au tirage des lunettes, tirage qui varie excessivement peu avec la distance.

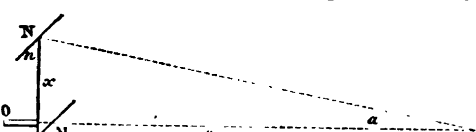
Cette propriété de l'œil n'a jusqu'à présent donné lieu à aucun essai, et cependant on pourrait peut-être l'utiliser, comme on l'indiquera un peu plus tard.

Nous donnons à titre de renseignement, pour les inventeurs à

venir, la description de quelques procédés qui ont été proposés, procédés s'appuyant sur les deux premières propriétés dont la vue dispose.

10. *Instruments divers.*— Ces instruments reposent sur des propriétés qui n'ont pas encore été étudiées dans cet ouvrage. Pour bien les comprendre, il faudrait consulter le chapitre VI du livre Ier et le livre V qui traite de l'optique, si toutefois les notions qui y sont enseignées ne sont pas déjà familières au lecteur.

Le premier instrument proposé se compose d'une règle graduée MN; à l'une des extrémités M, est placée, dans une direction qui lui est perpendiculaire, une lunette O, en face de laquelle un miroir M est fixé invariablement sur la règle avec laquelle il fait un angle de 50^g :



il n'est étamé qu'en partie, de manière que la lunette puisse faire voir à l'observateur dont l'œil est en O, un objet tel que A, situé en avant. Un second miroir N, entièrement étamé et mobile parallèlement à lui-même, est maintenu sur la règle par un coulisseau garni d'une vis de rappel destinée à lui imprimer les plus légers mouvements dans le sens de la règle. Quelle que soit son inclinaison sur elle, il est évident que, si la règle est suffisamment longue, on trouvera toujours une position du miroir N telle que le faisceau lumineux émanant de A qu'il réfléchira, se dirigera suivant NM, et viendra rencontrer le miroir M en sa partie étamée. Ce dernier, en vertu de la position qui lui a été assignée, renverra ce faisceau de M en O, de manière que l'observateur éprouvera la double sensation simultanée produite par l'objet A lui-même et par son image. A ce moment, il y aura entre les longueurs MN et MA un rapport qui sera constant, quel que soit l'éloignement d'un objet tel que A, en supposant toutefois que l'inclinaison du miroir sur la règle soit aussi constante.

Cherchons ce rapport. On a évidemment

$$\text{tang.}\, \alpha = \frac{x}{s} \quad \text{et} \quad \alpha = 100^G - (200^G - 2n) = 2n - 100^G$$

$$\text{tang.}\, \alpha = -\cot.\, 2n \quad \text{et} \quad \text{tang.}\, 2n = -\frac{s}{x}$$

En admettant que le miroir N soit toujours incliné sur MN, de

l'angle n rigoureusement constant, x sera toujours proportionnel à la distance à mesurer s; mais voyons quelle erreur entraînera une variation impossible à éviter, sur la valeur de cet angle. Supposons que l'instrument doive être gradué de manière à donner $\frac{s}{x} = 1000$; alors tang. $2n = -1000$. L'angle $2n$ doit donc être $> 100^g$, d'une quantité que nous désignerons par v, et on pourra écrire

$$\text{tang.}\,2n = \text{tang.}\,(100^g + v) = -\cot.\,v = -\frac{s}{x} = -1000.$$

En cherchant la valeur de v répondant à cot. $v = 1000$, on trouve $v = 0^g{,}0636'',6$; par conséquent,

$$2n = 100^g{,}0637'' \qquad n = 50^g{,}0318''$$

Pendant le mouvement du miroir N le long de la règle graduée, l'angle d'inclinaison pourra ne pas rester mathématiquement constant; voyons l'effet que produira une variation fort petite, $1'$ par exemple.

Désignons par x' la nouvelle longueur de la règle répondant à la même distance s, avec la nouvelle inclinaison $50^g{,}0418$, on aura

$$\text{tang.}\,(2n + 2') = \text{tang.}\,100^g{,}0837 = -\cot.\,0.0837 = \frac{x'}{s}$$

ce qui conduit à $\frac{x'}{s} = \frac{1}{760{,}9}$

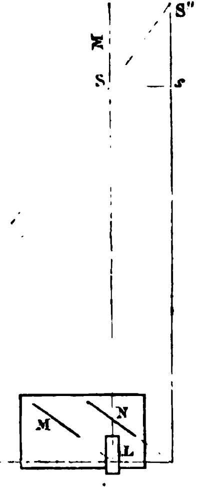
en sorte que la lecture x' que l'on fera sur la règle, sans tenir compte de la variation angulaire, sera prise comme se rapportant à l'échelle de $\frac{1}{1000}$, tandis qu'elle devrait être comptée comme faite au $\frac{1}{761}$. Ainsi, par exemple, dans une telle circonstance, on estimerait $x = 0^m{,}1$ comme répondant à une distance $s = 100^m$, et la distance réelle ne serait pourtant que de $76^m{,}1$.

L'influence du déplacement serait plus considérable pour des échelles plus petites, et moindre pour des échelles plus grandes.

Comme notre supposition de $1'$ de dérangement dans l'inclinaison du miroir mobile, pendant le mouvement longitudinal de ce miroir, est en deçà des limites possibles, il s'ensuit que l'on ne pourrait avoir aucune confiance dans les résultats obtenus.

Nous nous sommes occupé personnellement de la recherche d'un instrument du genre de celui dont nous venons de donner la description. Soient M et N deux miroirs parallèles invariable-

ment fixés, L une lunette armée d'un micromètre, et placée vis-à-vis du miroir N étamé à moitié. Si dans la direction SL de l'axe optique de cette lunette, on place une série de points tels que S envoyant des rayons lumineux sur le miroir M, le lieu des images de ces points sera la ligne OS′ inclinée sur M du même angle *m* formé par ce miroir avec l'axe optique LS. Le point S, par exemple, sera remplacé par une image virtuelle S′, située également sur SS′ perpendiculaire à M. En vertu de l'existence du second miroir N, les rayons partis d'un point quelconque du prémier lieu géométrique OS′ se réfléchiront de manière à former un second lieu géométrique O′S″ symétrique à O′S′ par rapport à N, et par suite parallèle à l'axe optique LS, et en définitive, il se formera, relativement au point S, une dernière image virtuelle S″ dont les rayons pénétreront dans la lunette. Celle-ci aura donc connaissance simultanément des deux points S et S′. Nous rentrons dès lors dans le cas d'une stadia à micromètre et à mire constante, sans avoir été obligé d'employer une mire effective.



Le point important à examiner est la grandeur de cette mire virtuelle. Sans envisager la question de la manière la plus générale pour une inclinaison quelconque du miroir sur la ligne de visée, contentons-nous de dire que le cas le plus favorable, pour la disposition des miroirs, est celui où cette inclinaison sera de 50^g. Pour cette circonstance particulière, la mire artificielle Ss ou $S''\Sigma$ ($Ss \rightleftharpoons S''\Sigma$ sont très-petits par rapport à LS) est égale à l'écartement des deux miroirs, mesuré perpendiculairement à l'axe optique.

Malheureusement ces miroirs ne pourraient jamais être écartés considérablement. Ainsi l'application du système à une planchette ne fournirait qu'une mire d'environ $0^m,5$.

Nous ne pouvons pas entrer ici dans des discussions de formules tendant à trouver les approximations possibles, aux di-

verses distances; nous dirons seulement qu'on pourrait arriver peut-être à mesurer une distance de 100^{m} à un mètre près.

Cet instrument aurait sur le précédent l'avantage de la constance du parallélisme, tandis que dans celui-là on ne peut pas répondre de la constance de l'inclinaison. Ce parallélisme serait établi et vérifié aussi souvent qu'on le voudrait, en visant un objet très-éloigné qui devrait donner à peu de chose près la superposition des deux fils du micromètre.

Les deux instruments seraient sujets également à une cause d'erreur qui aurait, croyons-nous, une grave importance sur les résultats. Par suite même du but qu'on se propose d'atteindre, les objets à viser directement et par seconde réflexion, peu visibles dans tous les cas, seraient des points quelconques de la campagne, d'un mauvais pointé, et il serait, par conséquent, difficile d'amener la superposition des deux images avec le premier instrument, ou de mesurer leur distance par l'emploi du second.

Nous avons dit que la modification apportée dans la forme de l'œil, par suite des variations des distances, est analogue au tirage des lunettes, mais que celui-ci devenait à peine sensible quand ces distances n'étaient pas très-petites. Il est pourtant possible de le rendre extrêmement considérable par une certaine combinaison. Pour comprendre ce qui va suivre, il est nécessaire que les notions d'optique qui seront traitées dans le livre V soient bien présentes à l'esprit.

Les renseignements que nous donnons ici n'étant que des espèces de jalons placés pour ceux qui voudront approfondir davantage la question de la mesure des distances sans parcours et sans mire, nous n'entrerons pas dans des explications détaillées.

En prenant les notations qui seront toujours employées dans le livre V, le foyer d'une lentille sera donné par la formule

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{f}+\frac{1}{s}$$

F désignant la distance focale principale, et f la distance focale relative à la distance s,

F étant positif pour les verres convergents et négatif pour les verres divergents,

f positif ou négatif suivant que l'image est réelle ou virtuelle,

s positif ou négatif suivant que les rayons qui se rapportent à l'objet sont divergents ou convergents.

Si, après l'action produite par cette première lentille, on reçoit les rayons lumineux sur un second verre, dont les éléments, analogues aux précédents, sont F', f', s', on a la formule finale

$$f' = \frac{F\left(Fs + m(F - s)\right)}{Fs + (m - F')(F - s)}.$$

qui donne la position de l'image due aux deux opérations, en fonction de la distance de l'objet, des éléments des verres et de la distance m qui sépare ces deux verres.

Si dans cette formule on fait $m = F + F'$, elle se réduit à

$$f = F' + \frac{F'^2}{F^2}(F - s) = F' + \frac{F'^2}{F} - \frac{F'^2}{F^2}s$$

en sorte que

$$f - \left(F' + \frac{F'^2}{F}\right) = - \frac{F'^2}{F^2}s$$

la quantité écrite dans le premier membre, qui est dans une relation fort simple avec f', est donc proportionnelle à la distance à mesurer, et le coefficient de la proportionnalité $\frac{F'^2}{F^2}$ peut être rendu aussi grand qu'on le veut par le choix des distances focales des deux verres employés.

Pour suivre la marche du foyer f' qui conduirait à la connaissance de s, il faudrait, l'image étant virtuelle, la changer d'abord en une autre réelle obtenue au moyen d'une troisième lentille qui, mobile et pouvant suivre la marche de f', donnerait cette image réelle cherchée, située à une distance constante du troisième verre, quand celui-ci serait lui-même à une distance constante de l'image virtuelle f'. La position de l'image réelle serait reconnue constante (par rapport à la dernière lentille), soit en la recevant sur un écran, soit en la suivant avec un oculaire.

Un système de graduations plutôt expérimentales que fournies par la formule donnerait la marche de f' et par suite celle de s.

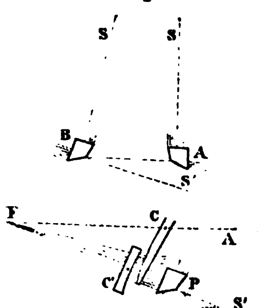
Les difficultés pratiques de ce système proviennent de la difficulté de combiner la longueur et le grossissement qui ne doit pas être exagéré, quoiqu'il ne soit pourtant pas nécessaire de conserver une grande clarté aux images, par suite du but seulement spécial de la lunette.

Télomètre du commandant Goulier. M. Goulier, professeur à

l'École de Metz, a imaginé un instrument d'une construction un peu délicate, qui permet d'apprécier des distances assez considérables au moyen de la connaissance d'une base de petite dimension.

Nous n'avons pas vu l'instrument et nous n'avons eu que pendant peu de jours la description qui en a été faite. L'explication que nous allons donner de son principe pêchera peut-être par quelques détails, mais nous espérons que l'esprit général en sera exact.

Soit S un point dont on cherche la distance à une station A.



On trace le triangle rectangle SAB de la manière suivante. Un observateur reste en A pendant qu'un second observateur, déroulant un fil métallique dont une extrémité demeure au même point, se transporte à une distance constante de 20^m ou 40^m limitée par la longueur totale du fil. Pour préciser la position B répondant à la rectitude de l'angle A, l'observateur situé en ce point est armé d'un instrument donnant l'angle droit, par exemple une chambre claire dont les angles sont convenablement disposés, et il guide par des signes l'observateur B, jusqu'à ce qu'il aperçoive celui-ci directement, se confondant avec l'image de S due à la chambre claire.

Le problème est alors ramené à la mesure de l'angle SBA qui finirait de préciser le triangle.

Pour arriver à ce résultat sans employer un goniomètre ordinaire, qui pourtant pourrait y conduire assez simplement si, au lieu de lui faire marquer les angles, on lui faisait indiquer les résultats métriques provenant de la résolution du triangle, on emploie le procédé suivant qui arrive à faire connaître l'angle ASB.

L'observateur B a, comme le premier, une chambre claire qui lui permet de voir l'objet S dans une direction BS' perpendiculaire à BS, en sorte que l'angle à mesurer se trouve être ABS' = ASB. Cette mesure est faite par le même observateur B qui est muni d'un appareil particulier composé de deux lentilles dont les centres optiques sont C et C'; ces lentilles ont des courbures inverses, l'une plane convexe et l'autre plane concave, de manière qu'après les avoir traversées successivement les rayons

lumineux soient divergents ; pour que cette divergence soit convenable pour tous les observateurs, on la rétablit telle que dans la nature, en donnant aux deux verres même distance focale, et par suite même courbure aux surfaces convexe et concave.

L'une de ces lentilles, la divergente, C', est placée à demeure derrière le prisme P de telle sorte qu'elle donne naissance à une image virtuelle S'' de S' située dans la direction C'S' obtenue par le prisme ; la seconde lentille est au contraire mobile longitudinalement afin qu'on puisse lui donner la position convenable pour que l'image réelle de A, qui serait formée à son foyer principal F par les rayons qui ne seraient soumis qu'à son action, se trouve sur C'S'. Ceux de ces rayons qui traverseront en outre la première lentille C' donneront naissance à une dernière image virtuelle qui, située encore sur la direction C'S', se confondra, pour l'observateur, avec l'image S'' de S, due aux actions combinées du prisme et de la première lentille C'.

La lentille mobile devra être coupée suivant un plan horizontal passant par son centre C, de telle façon que ce plan laisse au-dessous de lui la partie conservée de la lentille et au-dessus de lui la face inférieure du prisme P, de manière que l'œil placé à une hauteur convenable puisse recevoir à travers la lentille fixe C' les rayons soumis aux actions séparées de P et de C.

On pourrait établir la même section dans la lentille fixe et recevoir alors directement à l'œil nu ceux des rayons qui paraissent émanés de S'. On aurait ainsi l'avantage d'avoir des images finales S' et A' situées à la même distance, sensiblement du moins, tandis que dans l'autre cas, A', image de A, aurait été placé à la même distance que celui-ci, et S'', image de S', se serait trouvé au foyer principal de C'.

La distance focale F peut être prise aussi grande qu'on le veut : plus elle sera grande, plus elle augmentera la précision des observations en augmentant les distances telles que CC' ; mais en revanche en produisant un instrument plus volumineux.

Nous ne pouvons pas certifier que la disposition que nous venons d'indiquer soit exactement celle de l'appareil de M. Goulier, mais elles doivent présenter une grande analogie, si ce n'est une identité complète.

La distance convenable CC', comptée perpendiculairement à FC, est le sinus de l'angle F ou ABS' multiplié par la distance focale du verre C, et on comprend qu'on pourrait l'obtenir pour aider ensuite à la résolution du triangle ASB.

Au lieu de recueillir ainsi les éléments d'un calcul incommode à faire sur le terrain, surtout d'une manière expéditive, on recueille directement les résultats de ce calcul marqués en chiffres sur une petite règle que parcourt un index fixé à la lentille mobile. Quelques renseignements d'expérience auront permis de trouver la distance focale F qui entre dans les formules de résolution

$$\sin B = \frac{CC'}{F} \qquad SA = AB \text{ tang. } B$$

qui, pour les grandes distances, peuvent être remplacées par

$$SA = AB \frac{CC'}{F}$$

Pour un même système AB et F, on aura trouvé diverses valeurs de CC', marquées sur la réglette, répondant à différentes distances SA mesurées directement à la chaîne ou à la stadia, et les valeurs intermédiaires auront dû être obtenues par une interpolation graphique plutôt que calculée.

Cet appareil, très-ingénieux du reste, mais trop délicat et trop compliqué, ne nous semble pas applicable aux opérations topographiques, mais il atteint avec avantage le but que s'était proposé son auteur, l'appréciation des distances pour le tir des bouches à feu.

Remarquons en terminant que nous avons dit que le problème était ramené à la mesure de l'angle SBA, après le tracé du triangle rectangle, et que cette mesure pourrait être effectuée avec un goniomètre quelconque portant des graduations provenant de la résolution du triangle ASB, résolution basée sur l'angle réellement marqué par le goniomètre. La solution semblerait ainsi plus simple que celle qui résulte de l'emploi du télomètre. Cela est vrai, mais en même temps elle serait beaucoup moins exacte. Observons en effet que l'angle B sera généralement très-petit par suite de la petitesse de la base AB, et de petites variations subies par lui ou de petites erreurs commises dans son appréciation auront une grande influence sur la valeur de la distance à mesurer AS. Il est donc nécessaire que cet angle soit exactement apprécié.

Avec un goniomètre, le sextant gradué par exemple, cette mesure serait donnée par l'arc sous-tendant cet angle dans un

cercle dont le rayon serait celui de l'instrument nécessairement petit.

Avec l'emploi du télomètre, au contraire, l'angle ABS' complément de ABS est obtenu par le sinus de l'arc, ou approximativement par l'arc qu'il sous-tend dans un cercle dont le rayon est la distance focale de la lentille mobile, distance qui peut être prise très-grande, sans que l'instrument cesse d'être petit.

CHAPITRE III

MESURE DES ANGLES

11. Pour déterminer les sommets des triangles horizontaux, on se transporte généralement aux deux extrémités de la base et on mesure les deux angles appartenant au triangle dont cette base est un côté et dont le point inconnu est le troisième sommet. Ce triangle se trouve alors déterminé, et ses deux côtés peuvent devenir des bases pour la recherche des autres points du canevas. C'est donc par des mesures d'angles que se font habituellement les opérations.

Si on voulait se servir des instruments qui mesurent les distances, les observations seraient modifiées; mais comme l'usage de ces instruments est souvent impossible, et dans tous les cas très-long, nous nous bornerons à indiquer les procédés qui reposent sur la mesure d'une seule base et sur l'emploi des instruments qui donnent les angles. Ceci s'applique plus spécialement au canevas, dans lequel les côtés sont très-grands, et en partie seulement au levé de détail pour lequel les mesures de longueur sont souvent indispensables.

On mesure les angles au moyen de deux sortes d'instruments, les *goniographes* et les *goniomètres*.

Les premiers donnent les angles graphiquement, les seconds en donnent la mesure. Ces derniers exigent ensuite l'emploi d'un autre instrument pour permettre le tracé graphique de l'angle par suite de la connaissance de sa mesure. C'est un inconvénient attaché à l'usage des goniomètres. On se sert à cet effet d'un

rapporteur ou d'une table des cordes, dont il sera parlé plus tard.

Quelquefois on utilise les mesures d'angles par le calcul, dans l'exécution d'un canevas topographique, comme cela se fait dans les opérations cadastrales ; on rentre alors dans le domaine de la géodésie.

Choix des points. Forme préférable des triangles. — Avant de passer à la recherche des angles qui feront connaître les projections des points principaux, il faut s'occuper du choix de ceux-ci. Comme ils doivent plus tard servir à la détermination de toutes les autres parties du travail, il faut qu'ils soient visibles d'une grande partie du terrain à lever, et répandus en quelque sorte uniformément sur ce terrain. Enfin, les triangles qui les détermineront devront satisfaire à certaines conditions de forme. Pour connaître cette forme la plus avantageuse, il faut chercher dans quelles circonstances les erreurs inévitables commises dans l'observation des angles donneront le résultat le moins défectueux. Soit AB le côté connu supposé exact, A un angle quelconque, exact aussi. Il est évident que l'erreur CC′ commise sur le côté AC, pour une même erreur affectant l'angle B, sera d'autant plus petite que l'angle C sera proche de 100^g, ce qu'indique suffisamment la figure. Elle sera encore d'autant moindre que A et BC seront petits, car elle est représentée par β.BC. Mais ce que nous venons de dire pour les déplacements sur AC, est aussi important pour les déplacements sur BC qui auraient lieu par suite de l'erreur qui entacherait inévitablement l'angle observé A, que nous avions supposé exact jusqu'à présent. La forme préférable est donc celle du triangle isocèle rectangle.

On ne pourra pas s'astreindre à n'admettre que cette forme mathématique : aussi se bornera-t-on, dans la pratique, à ne pas employer des angles trop aigus ou trop obtus.

La forme type des triangles étant ainsi déterminée, il faut encore savoir s'ils peuvent être d'une grandeur quelconque ou s'il existe une limite qu'on ne peut dépasser sans inconvénient.

Limite de longueur des côtés. — Soit β l'erreur inévitable provenant de l'emploi d'un instrument particulier, goniographe ou goniomètre. L'erreur correspondante commise sur un côté opposé sera du même ordre de grandeur et plus considérable que l'arc de cercle sous-tendu par l'angle d'erreur β, lequel arc a pour valeur $K\beta$. Quelque petite qu'elle puisse être dans un cas particulier, cette erreur n'en existera pas moins. Il faut faire en sorte, puisqu'on ne pourra pas atteindre la perfection, qu'on en approche au-dessous d'une certaine limite de tolérance. Cette erreur $K\beta$, dans la nature, est $k\beta$ réduite à l'échelle, c'est-à-dire sur la feuille du levé. Supposons qu'on se croie permis de négliger sur le papier une distance plus petite qu'une certaine valeur, que l'on sera toujours bien obligé de tolérer, quelque faible que soit l'importance qu'on lui accorde. Admettons qu'on puisse ainsi négliger le quart de millimètre. Il faudra que l'erreur provenant de l'emploi de l'instrument soit plus petite sur la projection que $\frac{1}{4}$ de millimètre, *à fortiori* $k\beta < \frac{1^{mm}}{4}$. La seule quantité variable avec la volonté de l'observateur est la projection k, du côté ; il faudra donc choisir celui-ci tel que

$$k < \frac{0^m,00025}{\beta}$$

ou le côté de la nature $K < \frac{0,00025}{\beta} M$, si l'échelle est $\frac{1}{M}$.

Cette limite de longueur est très-variable, non-seulement avec le genre de l'instrument, mais avec des instruments du même genre, et avec des opérateurs différents.

Nous appliquerons plus tard cette formule à l'usage des principaux instruments de topographie, à mesure que ceux-ci s'offriront à notre étude.

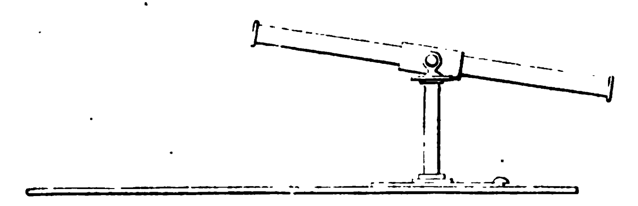
12. Planchette et alidade. — La manière la plus exacte de déterminer les angles provient de l'emploi de l'alidade et de la planchette : aussi est-ce par l'usage de l'ensemble de ces deux instruments qu'on détermine habituellement les points du canevas.

La planchette est une table légère, en bois bien sec, bien aplani, à laquelle est fixé un genou qui est placé sur un trépied de hauteur convenable ; le genou permet de faire tourner la planchette sur elle-même, ou de la rendre fixe suivant les cas. Celle-ci, qui porte collé le papier sur lequel on a rapporté la

longueur de la base à l'échelle, doit représenter le plan de projection ; il faut donc la mettre horizontale. Cela se fait habituellement, sans moyens bien précis, en écartant plus ou moins les branches du trépied. On apprécie quelquefois cette horizontalité simplement à l'œil ; d'autres fois, et cela est préférable, on s'assure que cette condition est satisfaite au moyen d'une bille ou simplement d'un crayon.

On pourrait établir plus rigoureusement cette horizontalité avec un niveau à bulle d'air réglé ; mais cela nécessiterait l'existence de deux mouvements rectangulaires qui compliqueraient le mécanisme et le poids du pied, sans grand avantage réel. Les réductions à l'horizon d'angles peu inclinés sont en effet fort petites.

L'alidade se compose d'une lunette mobile autour d'un axe de rotation perpendiculaire à une règle en cuivre de 3 à 4 déci-



mètres de longueur, règle à laquelle il est joint par un montant qu'un mécanisme particulier permet de rabattre sur cette règle, pour la facilité du transport.

Un des côtés de la règle, désigné sous le nom de *ligne de foi*, sert à tracer les côtés des angles.

La marche de l'opération est très-simple et se borne à ce qui suit. Mettant la ligne de foi sur la projection connue de l'un des deux côtés de l'angle à tracer, on fait tourner sur elle-même la planchette, qui doit rester horizontale, jusqu'à ce qu'on aperçoive l'image du point qui détermine ce côté, à la croisée des fils du réticule. A ce moment on serre le genou de l'instrument et on fait pivoter la ligne de foi autour de la projection du point de station jusqu'à ce qu'on aperçoive, à la croisée des fils, le point qui détermine le second côté de l'angle. Cette ligne de foi aura parcouru l'angle formé par les deux plans verticaux qui contenaient les deux positions de l'axe optique, ou les lignes de la nature, et c'est précisément l'angle qu'il fallait obtenir. Il suffira donc de tracer au crayon la seconde position de la ligne de foi.

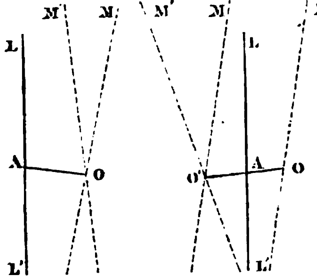
On appelle axe optique d'une lunette la ligne qui passe par la croisée des fils du réticule et un point de l'objectif qu'on appelle centre optique. Ce point jouit de la propriété remarquable que le rayon lumineux qui passe par lui n'est pas dévié, en sorte que lorsque l'image d'un point est à la croisée des fils, l'axe optique et la ligne de la nature sont superposés.

Vérification de l'alidade.— Pour que la marche que nous avons indiquée plus haut soit exacte il faut que la rotation de la lunette fasse décrire à son axe optique un plan vertical ou perpendiculaire au plan de la planchette, puisque celle-ci a été mise horizontale. En effet n'est-il pas évident que les directions de la ligne de foi doivent être les mêmes quand on vise différents points d'une même verticale ? Mais, pour passer de l'un de ces points à l'autre, on doit se servir du mouvement de rotation de la lunette; il faut donc, dans ce mouvement, que l'axe optique décrive un plan vertical.

L'existence de ce plan vertical exige deux conditions: d'abord que la surface décrite par l'axe optique soit plane, et en second lieu qu'elle soit verticale, c'est-à-dire que l'axe de rotation soit horizontal.

La première condition exige que l'axe optique soit perpendiculaire à l'axe de rotation. Cette vérification peut se faire de deux manières. Dans une première position on a pointé dans la direction OM et on a tracé la ligne de foi LL'. On enlève une vis qui retient la lunette et, retirant la douille de celle-ci de l'axe de rotation, on la retourne de 200^g sur elle-même, et on rétablit la ligne de foi le long de la ligne tracée qui a précisé sa première direction. Dans la deuxième position l'axe optique a pris une position OM' symétrique à la première, et qui par conséquent ne se confondra avec elle que dans le cas de perpendicularité de l'axe de rotation et de l'axe optique. Si donc cette condition n'est pas satisfaite, on ne pourra pas retrouver le même pointé à la croisée des fils, tant que la ligne de foi sera restée dans la même position. Pour faire la correction nécessaire, il suffira de mettre celle-ci sur la direction intermédiaire entre les deux positions qui permettaient également le pointé et de faire changer de position l'axe optique seul, jusqu'à ce qu'on aperçoive de nouveau le point de la nature. Pour effectuer ce changement de l'axe optique, il suffira d'imprimer au réticule un mouvement convenable, par un procédé particulier à chaque instrument.

Mais quelquefois la vis qui relie la lunette à l'axe de rotation n'est pas mobile ; on a alors recours au moyen suivant.



Après avoir visé, comme précédemment, un point de la nature et avoir obtenu une certaine trace LL' de la ligne de foi, on retourne celle-ci bout pour bout et on la replace le long du trait marqué au crayon. L'axe de rotation, qui était projeté en AO dans la première opération, sera projeté en AO' dans le prolongement de AO après le retournement. De même la projection OM de l'axe optique sera venue parallèlement en O'M. On ramène vers soi l'oculaire de la lunette, de sorte que si l'axe optique n'est pas perpendiculaire à l'axe de rotation, il décrit un cône ou une surface gauche et vient se projeter en O'M' lorsqu'il est arrivé à la hauteur qui eût été convenable pour voir le point déjà visé. La correction se fait comme par le premier procédé.

Le plan décrit par l'axe optique doit être vertical, ce qui exige que l'axe de rotation auquel il est perpendiculaire soit lui-même horizontal. On s'en assurera en visant l'arête verticale d'un édifice, que la croisée des fils devra couvrir constamment. Cette manière d'opérer peut même suffire pour la première vérification, qui n'a pas une grande importance. Elle n'en aurait aucune, en effet, si les points visés étaient à la même hauteur. Il n'en est pas rigoureusement ainsi, mais les variations de hauteurs angulaires étant en réalité très-faibles, l'erreur provenant de la non-verticalité de la surface décrite sera peu importante. De plus, l'existence du plan vertical dépendant de l'horizontalité de l'axe de rotation qui dépend lui-même de la position de la planchette, position assez mal précisée, il n'y a pas lieu de déterminer celui-ci avec une grande rigueur.

Les instruments ne sont, en effet, pas habituellement munis d'un mécanisme qui permette d'effectuer cette correction.

Il est une troisième opération qu'on indique habituellement comme vérification. Quoiqu'elle nous paraisse inutile, nous ne pouvons la passer sous silence. Elle consisterait à s'assurer que le plan vertical décrit par la lunette est parallèle à la ligne de foi. Elle exigerait la connaissance préalable de l'inclinaison d'un côté sur le méridien et le tracé d'une méridienne sur le terrain

Nous avons dit qu'il était inutile que cette condition fût remplie. En effet, si on se reporte à la marche de l'opération, on verra que l'existence d'un angle formé par la ligne de foi et par la trace du plan vertical de l'axe optique, a pour effet de reporter dans le même sens, et d'une quantité angulaire égale, toutes les lignes du canevas, par rapport aux directions du terrain ; mais cela n'empêche pas les angles tracés d'être égaux à ceux de la nature. Le seul inconvénient qui en résulte, et qui ne se présentera que dans des cas excessivement rares, consiste en ce qu'il ne sera pas permis de changer d'alidade, en une station, après avoir fixé la planchette dans une position dépendant d'un premier instrument ; car évidemment les angles de déviation ne seraient pas les mêmes pour les deux instruments, et par suite les lignes de foi ne seraient pas inclinées du même angle sur toutes les directions visées.

Limite de longueur des côtés. — L'alidade, employée avec soin, est un instrument susceptible d'un assez grand degré d'exactitude. Estimons, d'une façon assez arbitraire toutefois, qu'on puisse, par son emploi, éviter des erreurs angulaires plus grandes que 5′. Dans les limites d'approximation que nous avons admises, nous avons trouvé que $K < \frac{M\,1^{mm}}{\beta\,4}$, K étant le côté de la nature, et $k < \frac{\frac{1^{mm}}{4}}{\beta}$, k étant celui du dessin. Dans l'hypothèse admise, $\beta = 5' = \frac{0,00078}{1}$ en rapport. Il faut donc que

$$k < \frac{0,00025}{0,00078} \quad \text{ou} \quad \frac{25}{78}$$

On satisfera à peu près à cette condition en ne donnant pas à k des longueurs plus grandes que le tiers du mètre, ce qui est environ la dimension des règles des alidades.

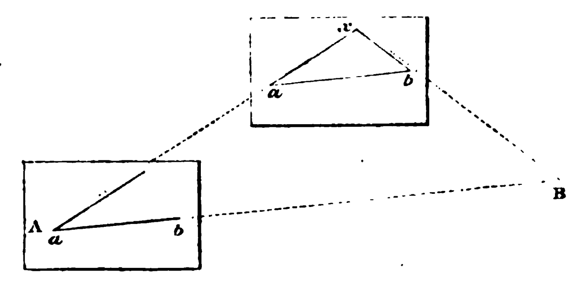
Le côté du terrain dont la limite ne devra pas être dépassée variera avec l'échelle. Ainsi, au $\frac{1}{10000}$, il sera 3333^{m}, au $\frac{1}{20000}$, 6000 à 7000^{m}.

Problèmes principaux. — Maintenant que nous connaissons l'instrument qui sert à mesurer les angles du canevas et la manière d'obtenir ceux-ci, voyons comment il faudra opérer pour déterminer les projections des points principaux.

1° *Méthode d'intersection.* — Les deux sommets connus du triangle dont le troisième sommet est à trouver, peuvent être

accessibles. Dans ce cas on se transporte à l'un d'eux A, et l'on s'y met en station, de façon que la projection *a* de A soit sur la verticale même de ce point; cela, du moins, se fait plutôt en théorie qu'en pratique, et il importe peu en réalité que ce soit un point quelconque de la planchette qui se trouve sur la verticale de A; l'erreur commise ainsi serait bien au-dessous de celle qui est inévitable par suite de l'emploi de l'instrument. On place ensuite la ligne de foi sur la projection *ab* de AB, et l'on tourne la planchette entraînant avec elle l'alidade jusqu'à ce qu'on aperçoive le second point connu B. A ce moment la planchette est dite *déclinée* ou *orientée*. Ces expressions ne sont convenables qu'autant que la ligne de foi est parallèle à la trace horizontale du plan vertical décrit par l'axe optique, ce qu'on ne sait jamais; dans ce cas, la ligne du terrain AB est parallèle à sa projection *ab*, et il en est de même des autres directions qui ont pu être déjà tracées sur le papier. Dans le cas le plus ordinaire, ce parallélisme n'existera pas, mais nous savons que les angles obtenus n'en seront pas moins bons. Quoique alors la feuille de dessin ne soit pas réellement orientée, nous conserverons les expressions en usage et nous nous conformerons à cette hypothèse dans l'exécution des figures, pour rendre celles-ci plus lisibles.

On fera ensuite pivoter l'alidade autour du point *a* jusqu'à ce qu'on aperçoive, à la croisée des fils, l'image du point inconnu X. On tracera alors *ax* le long de la ligne de foi, et l'on connaîtra une première ligne qui devra contenir la projection cherchée. La même opération, répétée en B en se déclinant sur BA, donnera une seconde direction *bx*, sur laquelle devra se trouver le point; par suite, la position de celui-ci sera à la rencontre des deux lignes *ax* et *bx*.



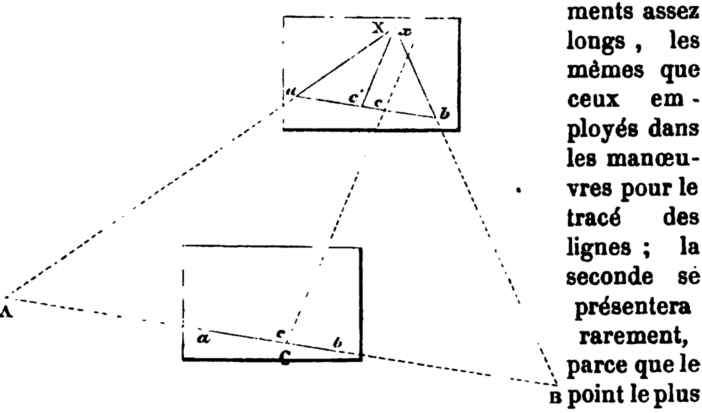
2° *Méthodes d'intersection et de recoupement.* — L'un des sommets A est toujours accessible, et l'autre ne permet pas d'y

faire station, mais on peut stationner au point cherché. On se transporte en A, et se déclinant sur AB, on détermine comme dans le cas précédent la projection *ax* de la ligne AX du terrain. Stationnant ensuite en X, on se décline sur XA au moyen de sa projection *xa,* et faisant pivoter la ligne de foi autour de *b,* on vise B, ce qui donne une ligne *bx* qui, par sa rencontre avec la première, fait connaître la projection cherchée *x*.

Lors de cette seconde station, on n'a pas pu mettre exactement la projection inconnue de X sur la verticale de celui-ci ; mais nous avons fait observer que l'erreur qui en résulte est complétement négligeable.

Ces deux premiers cas sont ceux qui se présentent le plus souvent.

3° *Méthode de recoupement.* — Les points donnés A et B sont inaccessibles, mais on peut stationner sur la ligne AB ou sur son prolongement. La première circonstance exigera des tâtonnements assez longs, les mêmes que ceux employés dans les manœuvres pour le tracé des lignes ; la seconde se présentera rarement, parce que le point le plus proche cachera souvent le plus éloigné.



Stationnant au point C, on se déclinera sur AB, et visant X on tracera *cx* faisant avec *ab* le même angle que les deux lignes de la nature, mais passant par un point quelconque *c*, projection arbitraire de C. Se transportant ensuite en X et visant C avec l'alidade, après avoir mis la ligne de foi sur la projection temporaire *xc'*, on sera décliné. Visant A et B successivement, en faisant pivoter la ligne de foi autour des projections *a* et *b*, on obtiendra deux directions *ax' bx'* qui, inclinées convenablement par rapport à *xc* et, par suite, par rapport à *ab*, détermineront un

triangle abx' semblable à ABX et donnant la projection cherchée x'.

La très-légère erreur commise est la même que dans le cas précédent; elle provient de ce que x' n'a pas pu être mis au-dessus de la verticale de X.

Si l'on veut ensuite obtenir la vraie position c' projection du point intermédiaire C, il suffira de viser celui-ci, la ligne de foi étant placée sur le point x. La nouvelle direction sera sensiblement parallèle à xc par suite du peu d'importance de cc' comparé à XC.

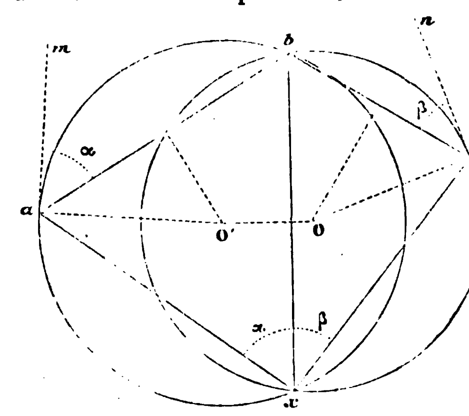
4° Les deux points donnés sont inaccessibles ou invisibles l'un de l'autre, et l'on ne peut stationner sur la ligne qui les joint. Ce problème, qui a pour but de *changer une base inaccessible en une autre qui soit accessible*, consiste à déterminer simultanément deux nouveaux points X et Y. Pour cela on se donne deux projections arbitraires x et y de X et Y. La ligne xy ne sera pas à l'échelle et ne sera pas orientée sur le papier. Stationnant successivement en X et Y on se décline, d'une manière fausse mais la même aux deux stations, en mettant xy dans la direction XY, et l'on vise a et b; cela détermine sur la feuille un quadrilatère semblable à celui du terrain, mais qui n'est pas à l'échelle adoptée, et n'est pas à sa place par rapport aux projections connues. Si les positions arbitraires x et y avaient été exactes, les deux points α et β, qui sont les projections de A et B résultant de cet arbitraire, se seraient confondus avec les projections vraies a et b. Il suffit donc, pour rétablir convenablement les choses, de décrire sur ab un quadrilatère $abx'y'$ semblable à $\alpha\beta xy$, et les points x' et y' seront les projections cherchées des points X et Y.

Les quatre cas que nous avons examinés ont déterminé les positions inconnues, mais sans vérifications. Pour obtenir celles-ci, qui sont nécessaires à avoir, de temps en temps du moins, il faut chercher un même point par plusieurs opérations, par exemple en le trouvant à la rencontre de trois lignes au lieu de deux.

Nous avons vu que les côtés ne devaient pas dépasser une certaine limite, pour les points à déterminer. L'inverse a lieu pour les côtés qui doivent servir à décliner la planchette; en effet, pour cette opération, il faut mettre la ligne de foi en coïncidence avec la ligne du papier, et cette coïncidence s'établira d'autant plus exactement que les deux droites auront plus de longueur.

Détermination d'un point par le moyen de trois autres. — Les stations aux points importants sont souvent difficiles à faire, parce que ceux-ci sont habituellement des clochers, des cheminées, des moulins, des sommets d'arbres; il arrive alors qu'on est obligé d'avoir recours au procédé suivant, qui détermine *à priori* un point duquel on en recoupera ensuite plusieurs autres, lorsque de celui-ci on aperçoit plusieurs points connus.

Le problème est possible lorsque, en y stationnant, on aperçoit au moins trois des points connus. En effet, mesurant les deux angles AXB, CXB, il suffira de décrire sur les cordes *ab* et *bc* deux segments capables de ces deux angles. La construction faite à l'échelle du levé donnera deux cercles se rencontrant en *b* et *x* projection du point inconnu X. Le tracé géométrique peut se faire sur une feuille quelconque. Pour éviter la multiplicité des constructions et surtout l'emploi du rapporteur, on peut opérer sur les lignes déjà tracées sur le papier.



On décline la projection *ab* sur XB, et faisant pivoter la ligne de foi autour de *a* jusqu'au pointé de A, on obtient tout tracé en *mab*, l'un des angles ayant leurs sommets en X. Le second angle est obtenu en déclinant *cb* sur XB, et en faisant pivoter la ligne de foi autour de *c* jusqu'au pointé de C. La construction à exécuter ensuite est celle indiquée dans les éléments de géométrie, élever sur les milieux de *ab* et *bc* deux perpendiculaires à ces lignes, jusqu'à la rencontre en O et O′ de perpendiculaires menées par *a* et *c* à *am* et *cn*. Les deux points obtenus sont les centres des cercles qui, par leur rencontre, font connaître le point cherché. Pour éviter le tracé de ces cercles, on peut remarquer qu'il suffit d'abaisser de *b* une perpendiculaire à la ligne OO′ qui joint les centres et de prolonger cette perpendiculaire d'une quantité égale à elle-même.

Quelle que soit la simplicité de cette construction géométrique, elle est incommode à tracer sur le terrain : aussi emploie-t-on

habituellement, pour résoudre ce problème, un des deux procédés suivants.

On peut se servir d'un papier à calque qui, bien tendu sur la planchette, permettra de tracer dessus trois lignes passant par un même point et formant entre elles les angles dont les sommets sont au point inconnu. On fera ensuite pivoter ce papier jusqu'à ce que ces trois lignes passent par les projections des trois points connus. Au moment où cette condition sera satisfaite, on piquera le point de rencontre des trois lignes du papier à calque, sur la feuille de projection. Il est à remarquer que, dans ce mode d'opérer, la planchette n'a pas dû être déclinée, ce qu'il était du reste impossible de faire. Le point ainsi obtenu devra être vérifié, ce qui aura lieu si, le considérant comme bon en se déclinant sur l'une des trois directions, les deux autres vont passer par les deux points restants.

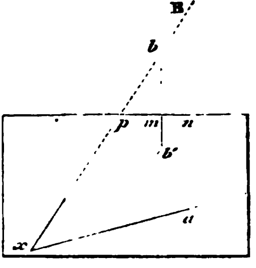
Le troisième procédé consiste à opérer par *tâtonnements*, au moyen de *courbes de recherche*. Si l'orientation était possible, il suffirait de viser les trois points successivement en faisant passer la ligne de foi par leurs projections, et l'on obtiendrait trois directions se rencontrant en un point unique. Si donc on se donne une orientation arbitraire proche de sa vraie valeur, ce qui se voit toujours à simple vue, ces trois lignes, au lieu de se rencontrer au même point, se couperont deux à deux, en donnant naissance à un petit triangle. En changeant un peu l'orientation, on obtiendra un second triangle, puis un troisième, etc. La suite des sommets homologues obtenus par les rencontres successives de deux mêmes directions, appartient à une courbe continue que quelques points suffisent pour définir; les trois courbes ainsi tracées iront se rencontrer en un même point qui devra être la projection du point de station. Il est bon d'observer que ces trois courbes sont les cercles des segments capables de la construction géométrique. La position devra être vérifiée comme avec l'emploi du papier à calque.

Utiliser un point extérieur à la feuille de projection. — Lorsque les points donnés sont peu nombreux, le cas suivant peut se présenter.

Le point B visible du terrain à lever est trop éloigné pour que la projection *b* puisse être marquée sur la planchette. On trace alors dans le cabinet une ligne quelconque *bb'*, en prenant *mb'* égal à une fraction connue de *mb*, soit $mb' = \frac{1}{2}\, mb$, et on se sert



de la projection arbitraire b' de la manière suivante. Par une opération préalable, on a déterminé de A une direction ax qui doit contenir le point x projection de X. Se transportant ensuite à ce point, on se décline sur XA. En se recoupant sur B et plaçant la ligne de foi sur b, on aurait une seconde direction contenant x; mais b n'existe pas sur le papier. Si on place la ligne de foi en b' pour viser B, on obtiendra une ligne $b'n$ sensiblement parallèle à bx, vu la grande distance de B. Si bx pouvait être tracé, il donnerait naissance à un triangle pbm semblable à $b'mn$; il suffira donc de prendre $pm = 2mn$, en vertu de notre hypothèse $mb' = \frac{1}{2} mb$, et de mener par le point p une parallèle à $b'n$, ce qui se fera en mettant la ligne de foi sur ce point, et visant B.



Rapprochement des points du canevas. — Il est bon que les points du canevas couvrent à peu près régulièrement toute la surface à lever; s'il y a une exception à cette règle, elle doit porter sur une plus grande accumulation de ces points dans les endroits où la planimétrie sera le plus chargée. On devra, en principe, rapprocher les points déterminés jusqu'à ce que leur écartement moyen réponde au maximum de longueur que permettra l'usage de l'instrument qui sera ensuite employé au levé de détail.

Tout en se rappelant ces règles, on sera souvent obligé de s'en écarter, forcé comme on le sera presque toujours par les circonstances naturelles.

Nous avons exposé tout ce qui a trait à la confection du canevas exécuté sans aucune donnée préalable. Quelque exactitude que l'on apporte dans la réalisation des procédés indiqués, si le travail a quelque étendue, les figures se déforment assez rapidement.

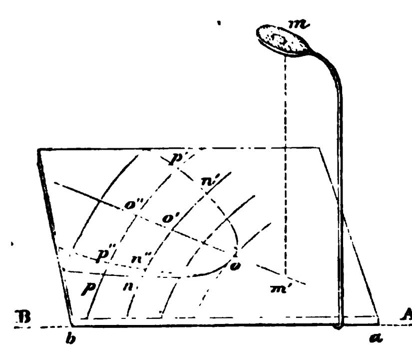
Il est donc bon d'avoir un premier travail qui donne le canevas des plus grands côtés obtenu par des moyens plus précis que ceux que possède la topographie. La géodésie atteint ce but en faisant connaître les positions géographiques de quelques-uns des points principaux du terrain à trianguler. Ces positions sont facilement rapportées graphiquement sur la planchette, et en abrégeant les opérations en les facilitant, elles permettent en-

core de les contrôler et de faire disparaître les erreurs qu'on a nécessairement commises au bout d'un certain temps de travail.

13. Orientation. — On est généralement dans l'usage d'orienter les dessins par rapport à la méridienne, et par conséquent de tracer cette ligne sur les levés topographiques. Nous allons indiquer plusieurs manières d'atteindre ce but.

On peut tracer la méridienne au moyen des hauteurs correspondantes du soleil, et le problème se réduit à avoir l'angle que fait un côté du canevas avec la méridienne.

Soient AB un côté sur le terrain, et *ab* sa projection provisoire : on orientera la feuille de papier suivant ces lignes ; on élèvera sur le plan disposé horizontalement, un style vertical terminé par une plaque de fer noircie, percée d'un petit trou à son centre *m* et disposée de manière à recevoir à peu près perpendiculairement le rayon du midi : on projettera le centre *m* en *m'* au moyen d'un fil à plomb ; du point *m'* comme centre, on décrira plusieurs circonférences *no'n'*, *po''p'*, etc. ; on observera la marche du soleil un peu avant et un peu après midi ; on divisera en deux parties égales chacune des portions de circonférences interceptées par la courbe produite par l'image solaire ; les points milieux *o,o'o''*, etc., et *m'* appartiendront à la méridienne. Si l'opération a été faite avec soin, ils seront exactement en ligne droite ; sinon, il faudra prendre pour trace du méridien la droite qui passera le mieux possible par ces points.

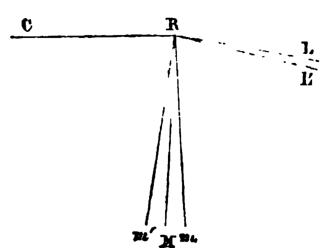


Le procédé que nous venons de décrire suppose que le soleil décrit sensiblement un même cercle de déclinaison pendant le temps que dure l'observation, ce qui est plus exact vers les solstices qu'à toute autre époque de l'année, parce qu'alors la variation en déclinaison est la plus petite.

S'il était nécessaire, pour avoir plus de précision, de tenir compte de la variation de déclinaison, on opérerait ainsi qu'il

suit. Soit R le point de station, on décline d'abord la planchette sur une direction connue et on observe avec la lunette d'une alidade, garnie d'un verre noirci, le lever L et le coucher C du soleil le même jour, et l'on marque les projections de ces directions sur le papier.

Par la raison indiquée au paragraphe précédent, et abstraction faite de la variation en déclinaison, le méridien devrait partager l'angle LRC en deux parties égales. Soit donc Rm la ligne qui satisfait à cette condition. Pour la durée d'un jour, la déclinaison ayant varié, l'angle que fait la vraie méridienne avec RC est plus petit que celui qu'elle fait avec RL. (Nous supposons que le soleil se dirige du solstice d'été à celui d'hiver, et d'après la figure, que l'opération est postérieure à l'équinoxe d'automne.)



La ligne Rm est donc un peu trop orientale ; mais, si l'on combine le coucher C avec le lever L' du lendemain plus tardif que celui de la veille, la ligne Rm' qui partagera en deux parties égales l'angle CRL' sera, par une raison contraire, trop occidentale. Donc, en prenant une direction moyenne RM, elle sera très-sensiblement la méridienne.

Cette seconde méthode n'est pas encore rigoureusement exacte, parce que la variation en déclinaison n'est pas constante ; mais l'erreur qui en résulte est bien au-dessous des erreurs habituelles de la topographie. Son plus grand défaut vient de la difficulté de son emploi ; elle est en effet fondée sur l'observation du lever et du coucher ou autrement dit de l'astre au moment où il est à l'horizon, moment qui ne peut être reconnu que lorsque l'on observe dans une île éloignée des côtes. Si l'on voulait rendre cette méthode théorique réellement applicable, il faudrait la combiner avec la précédente en déterminant par celle-ci la branche $p''n'$, des ombres du style, relatives à la matinée suivante, et continuant à opérer comme il vient d'être dit.

La première méthode exposée, fondée sur l'hypothèse de la constance de la déclinaison solaire, pendant la durée de l'opération, nous semble du reste bien suffisante pour les usages de la topographie, qui, en définitive, n'a pas besoin, pour opérer, de connaître la direction du méridien, qui n'est sur un dessin to-

pographique, qu'un renseignement utile mais non indispensable.

Nous conseillons même de se contenter, dans un levé isolé, d'orienter le dessin par l'emploi d'un déclinatoire qu'on place sur la planchette de manière qu'un des côtés de la boîte coïncidant avec la projection donnée, soit dirigé sur le côté correspondant de la nature, afin que la planchette soit déclinée; la direction de l'aiguille aimantée reportée vers le nord, du nombre de degrés qui marque la déclinaison actuelle, fournit la direction de la méridienne à tracer sur le papier.

Ce procédé est certes fort grossier, par suite du très-mauvais mode de visée employé, mais ceux qui reposent sur les observations de hauteurs correspondantes du soleil ne sont-ils pas aussi entachés d'une cause d'erreur assez grave? Il y est dit, en effet, qu'on commencera par décliner la planchette sur un côté de la nature; si on emploie à cet effet une alidade, rien ne permettant de savoir si le plan vertical de l'axe optique est parallèle à la ligne de foi, il arrivera habituellement que les deux lignes du terrain et du dessin ne seront pas superposées, tandis que la méridienne tracée sur le papier sera identique avec la méridienne naturelle. Il vaudrait mieux dans ce mode de détermination sacrifier l'exactitude du pointé dû à l'emploi de la lunette, et décliner simplement le dessin avec deux épingles piquées dans le bois de la planchette en deux points de cette ligne.

La méridienne n'étant exactement tracée sur le papier par rapport aux lignes du canevas, qu'autant que le plan vertical décrit par l'alidade est parallèle à la ligne de foi, on peut en déduire un moyen de reconnaître l'existence de cette condition, lorsque, par des procédés qui sont du ressort de la géodésie, on connaît l'orientation exacte d'une ligne de ce terrain; il faut pour cela décliner, avec l'alidade, sur cette ligne, tracer la méridienne par l'emploi des hauteurs correspondantes et voir si le résultat obtenu concorde avec le tracé de la ligne provenant des renseignements géodésiques.

Mais, pour opérer ainsi, il faut avoir ces renseignements, et la question de l'orientation se trouve résolue par eux; le travail supplémentaire de vérification de l'alidade n'aurait qu'un but de curiosité insignifiante, puisque nous savons que cette vérification est complétement inutile pour l'emploi de cet instrument, et il nous semble raisonnable de ne pas perdre son temps et son travail à ce sujet.

Une orientation suffisamment exacte et indépendante de

l'erreur provenant de l'emploi de l'alidade s'obtiendrait sans plus de travail que l'observation des hauteurs correspondantes n'en exige, en déclinant le côté connu au moyen d'une alidade, laissant la planchette en station pendant une nuit, et observant les élongations extrêmes d'une même étoile, la polaire par exemple. Une seule observation de celle-ci, faite à un instant quelconque, fournirait déjà, suivant la ligne de foi de l'alidade, une direction méridienne dont le maximum d'erreur ne dépasserait pas $1^g \frac{2}{3}$, complément de la déclinaison de l'étoile. Les élongations extrêmes fourniraient une grande exactitude (sous le point de vue topographique), mais en exigeant les observations dans deux verticaux, symétriques par rapport au méridien, à un intervalle de temps assez long.

CHAPITRE IV

LEVÉ DU DÉTAIL

14. Le levé de détail exige que l'on multiplie la recherche des points principaux du terrain, beaucoup plus que dans le canevas. Ces points secondaires sont déterminés toujours par la mesure d'angles appartenant à des triangles dont un côté est connu, soit par *intersection*, soit par *recoupement*. Il y a intersection quand on stationne aux points connus, et recoupement lorsque la station est au point inconnu.

Pour l'emploi de ces deux méthodes, il est indispensable que les points à relever soient visibles des points déjà obtenus, ou réciproquement. C'est ce qui n'a pas toujours lieu. Aussi est-on obligé de combiner les deux procédés indiqués plus haut avec un troisième appelé *cheminement*, et qui consiste à partir d'un point connu déterminé par le canevas, ou trouvé par recoupement ou intersection au moyen de celui-ci, à viser une direction et à mesurer la distance qui sépare, sur cette ligne, le point de départ d'un point d'arrivée auquel on se transporte.

Ce système, appliqué d'une manière continue, permettra de

tracer sur le papier une ligne semblable à celle suivie sur le terrain, si toutefois des erreurs n'ont pas été commises. Mais ces erreurs doivent être grandement à craindre: aussi les fait-on disparaître en recoupant sur des points du canevas certaines stations du cheminement, et modifiant d'une manière convenable, s'il y a lieu, la portion du travail qui s'étend jusqu'à la précédente station vérifiée.

On ne peut pas toujours suivre les lignes du terrain qu'il est important de relever. On détermine alors les points remarquables de ces lignes, ainsi que les objets isolés, soit par intersection, en les visant de deux des stations du cheminement, soit en ne les visant que d'une seule station, et mesurant à la chaîne ou à la stadia les distances qui les séparent de cette station. Quel que soit le nombre des points ainsi déterminés, il sera toujours indispensable, pour compléter le travail, de les rejoindre entre eux par lignes tracées à vue semblablement à celles du terrain.

15. Planchette, alidade et déclinatoire. — Après avoir exposé l'ensemble des opérations relatives au levé de détail, nous allons décrire les instruments qui peuvent être employés à cet usage. Nous avons vu que les opérations se bornent *à l'intersection, au recoupement* et *au cheminement*. Les deux premières sont les mêmes que pour le canevas ; il est donc naturel de rechercher si elles ne pourraient pas être effectuées par le secours de la planchette et de l'alidade ; il serait certes possible d'opérer avec ces instruments, mais dans des conditions d'infériorité relative qui seront expliquées au chapitre V, qui expose l'ensemble des opérations relatives à la planimétrie.

L'adjonction d'un déclinatoire à la planchette et à l'alidade permet de décliner immédiatement, sans le secours d'aucune direction connue.

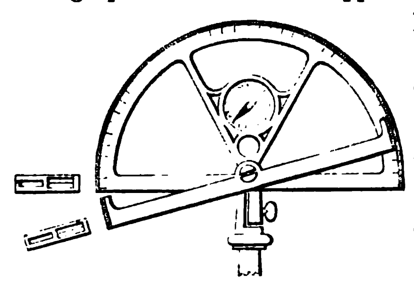
Le déclinatoire est une boîte carrée ou rectangulaire renfermant un limbe gradué, dans le premier cas, ou une portion de limbe, dans le second, au centre duquel est une aiguille aimantée posée sur un pivot.

On sait que, pour un même lieu géographique, l'aiguille aimantée se dirige constamment dans une direction que nous regarderons momentanément comme constante, en nous réservant d'entrer dans de plus grands détails au sujet de la boussole. Le déclinatoire est fixé sur la planchette au moyen de deux vis. Voici l'usage qu'on en fait. En une station où l'orientation de la

planchette peut se faire convenablement, c'est-à-dire sur une longue base bien déterminée, on effectue cette orientation par l'emploi de l'alidade ; après quelques oscillations, l'aiguille du déclinatoire s'arrête vis-à-vis d'une graduation. Il est évident que toutes les fois que ce chiffre se trouvera en regard de l'aiguille libre, ce qu'on aura soin de faire au moyen du mouvement général de la planchette, toutes les lignes du dessin seront parallèles aux directions qu'elles avaient lors de l'expérience de départ, c'est-à-dire que la planchette sera orientée et disposée convenablement pour la visée de directions inconnues. Remarquons que cette orientation n'est pas absolue si la ligne de foi n'est pas parallèle au plan vertical décrit par l'axe optique, ce qui ne doit presque jamais avoir lieu : aussi le chiffre de la graduation du déclinatoire obtenu avec une alidade, ne sera-t-il convenable que pour l'emploi de cette même alidade.

16. **Graphomètre.** — Quoique le graphomètre ne soit plus employé actuellement, nous ne pouvons le passer sous silence à cause de son ancienne réputation et parce qu'il peut se présenter des cas où le manque d'autres instruments force à revenir à l'usage de celui-ci.

Le graphomètre doit être supporté par un pied fixe. Il se compose d'un demi-cercle métallique gradué de 0 à 200 grades, portant une lunette ou deux pinnules aux extrémités de son diamètre fixe. Un second diamètre, mobile, portant une autre lunette ou deux autres pinnules, peut parcourir toutes les graduations. Les pinnules sont de



petites fenêtres placées perpendiculairement au plan du limbe et portant des fils également perpendiculaires à ce plan, fils qui servent, comme les deux premiers, à déterminer assez grossièrement un plan de visée. On recule à cet effet l'œil en arrière de la plus proche, et l'on fait tourner l'alidade jusqu'à ce qu'on aperçoive les fils superposés tous deux sur l'objet.

L'opération consiste simplement à amener successivement les deux lignes de visées dans la direction des deux objets, en com-

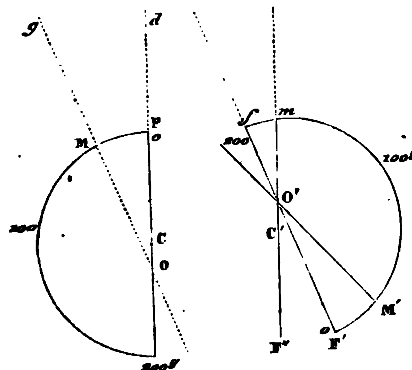
mençant par celle qui appartient au diamètre fixe. Ces deux lignes formeront l'angle à mesurer qui sera marqué sur le limbe gradué par un index ayant participé au mouvement du diamètre mobile. On commencera par le point de droite ou par celui de gauche suivant le sens dans lequel auront été tracées les graduations.

Vérifications. — L'angle lu par le moyen du graphomètre ne sera vrai pourtant qu'autant que les deux conditions suivantes seront satisfaites.

1° L'index de l'alidade mobile doit marquer le zéro des graduations quand les quatre pinnules sont dans la même direction. C'est ce qu'on reconnaît en visant le même point avec les deux alidades, et s'assurant que la lecture est zéro. Quand cela n'a pas lieu, l'instrument peut encore servir, seulement il faut ajouter ou retrancher à toutes les lectures une quantité constante, dite *erreur de collimation.*

2° Il n'est pas nécessaire, et on ne pourrait du reste pas s'en assurer, que les deux alidades soient des diamètres, mais il faut que l'alidade mobile pivote autour du centre même du cercle gradué pour que les divisions de celui-ci donnent bien la mesure des angles parcourus par l'alidade mobile, ou par l'index qui fait corps avec celle-ci. Voici comment s'effectue cette vérification.

Si les graduations vont dans le sens FM, on vise d'abord directement l'objet de droite au moyen de l'alidade fixe, et l'on amène ensuite l'alidade mobile sur le point de gauche On obtient une lecture FM.



On retourne l'instrument comme dans la seconde figure, et l'on vise le point de gauche avec l'alidade fixe, suivant F'O'. L'alidade mobile qui avait été fixée au limbe au moyen d'une vis de pression, est venue en O'M'. Lâchant le mouvement qui la retient, on l'amène sur l'objet de droite en F''*m*. Il est évident que si O est le centre du cercle divisé, les deux arcs

F'M' = FM et *fm* doivent être égaux, par conséquent les deux lectures doivent être supplémentaires. S'il n'en est pas ainsi, la rotation de la partie mobile ne se fait pas autour du centre du limbe, et l'instrument défectueux donne naissance à des erreurs variables. Il est pourtant possible de se servir d'un pareil graphomètre, mais en augmentant beaucoup le travail; en effet, l'angle cherché est bien F'O'F'' dont la mesure est $\frac{F'M' + fm}{2}$, ou en désignant les deux lectures par l et l', $\frac{l+200-l'}{2} = 100 - \frac{l'-l}{2}$.

Les angles employés en topographie sont ceux fournis par les plans verticaux; aussi est-il bon de mettre, à l'œil, le plan du graphomètre horizontal et de chercher seulement les positions des alidades qui permettent de voir les objets cachés par des points quelconques des fils verticaux.

Si l'on voulait avoir l'angle dans le plan même des objets, il faudrait adjoindre d'autres fils à ceux-ci, de sorte que les points de croisement déterminassent des lignes parallèles au plan du limbe.

On adapte quelquefois au limbe du graphomètre un déclinatoire de petite dimension; l'instrument peut alors être assimilé à une boussole, mais avec des circonstances défavorables; il faut, dans ce cas, le régler comme celle-ci, par le moyen qui sera indiqué plus tard, tracer des directions sur le papier et rapporter, en se servant de leur secours, les angles lus sur l'alidade mobile lorsque, par le mouvement général, on aura amené le déclinatoire à marquer l'indication qui devait exister lors du règlement pour que la lecture du limbe et celle du papier concordassent.

Le rapport, inversement à ce qui a lieu pour la boussole, doit être fait dans le sens des graduations du déclinatoire, parce qu'ici la lecture est faite sur la ligne de visée et non pas à l'extrémité de l'aiguille aimantée.

Le déclinatoire remplace l'observation du point de droite qui devient virtuellement placé constamment sur la directrice du terrain.

Nous avons dit que, ainsi modifié, le graphomètre pouvait être assimilé à une *mauvaise boussole;* en effet, on a non-seulement l'inconvénient de deux lectures, mais l'une d'elles, celle qui doit constater la fixité du déclinatoire, sera défectueuse par suite de la petitesse de celui-ci.

17. Vernier. — Nous avons dit que l'alidade mobile est munie

d'un index qui parcourt les divisions du limbe ; mais celui-ci est nécessairement d'un petit diamètre, par suite, ses divisions sont elles-mêmes fort petites, et il est très-difficile de faire les lectures. On augmente beaucoup l'exactitude de celles-ci par l'adjonction d'un vernier dont le zéro sert d'index.

Le vernier sert à apprécier des suppléments de longueurs que l'œil ne pourrait pas estimer; habituellement appliqué aux arcs de cercle, il fait connaître les angles mesurés par ceux-ci.

Sa construction est fondée sur le principe suivant : une portion de ligne droite ou d'arc de cercle est divisée en $m-1$ parties égales; une seconde ligne de même forme, juxtaposée à la première et de même longueur, est divisée en m parties égales. Si on désigne par D l'amplitude d'une des parties de la première ligne, et par d celle d'une unité de la seconde, on aura évidemment $d = \frac{m-1}{m} D$, d'où $D - d = \frac{D}{m}$. La différence entre une division du limbe et une division du vernier est égale à la première divisée par le nombre d'unités contenues dans le vernier. Voyons à utiliser cette construction.

Le zéro du vernier ayant parcouru l'arc qui mesure un angle cherché, s'est arrêté, après être parti du zéro du limbe, à une position o située au delà d'une division a représentant des unités quelconques, des grades par exemple. L'angle dont on veut connaître la mesure est donc égal à a grades, plus la valeur angulaire représentée par l'arc de cercle ao. On cherche sur le vernier quelle est celle des divisions qui se confond ou qui est le plus près de se confondre avec une division du limbe. Supposons que ce soit la 8ᵉ; la différence entre les divisions précédentes du limbe et du vernier sera, comme nous l'avons vu, égale à une division du limbe divisée par le nombre de divisions contenues dans le vernier. Supposons, pour préciser, qu'on ait pris 19 divisions ou grades du premier pour former un vernier divisé en 20 parties. La différence dont nous venons de parler sera $\frac{1^g}{20} = 5'$.

Continuant à comparer chacune des divisions du vernier par rapport à celle qui lui correspond sur le limbe, nous verrons que la seconde, à partir du contact de la division 8, sera en avance du double de la fraction trouvée, et ainsi de suite, jusqu'à ce que, comparant la 8ᵉ division à partir du contact, ou le o du vernier,

à la division correspondante a du limbe, on arrive à trouver que l'avance de la 1re sur la 2e est de 8 fois la fraction précitée, ce qui représente l'intervalle oa qu'il fallait ajouter au nombre de grades lus directement. Dans le cas actuel, la valeur totale de l'angle serait $a^g + 8 \times 5' = a^g,40'$.

En général, pour se servir d'un vernier, il faudra, à la lecture directe faite sur le dernier chiffre dépassé par le o du vernier, ajouter une fraction dont le numérateur est la valeur d'une des plus petites divisions du limbe, et dont le dénominateur est le nombre de divisions contenues dans le vernier, laquelle fraction devra être répétée autant de fois qu'il y aura de divisions du vernier à partir du 0 jusqu'à celle de ces divisions qui est dans le prolongement de l'une de celles du limbe.

Il semble que, puisque l'approximation est donnée par la fraction $\frac{d}{m}$, l'exactitude de la lecture pourra être poussée indéfiniment loin, soit par la diminution de d, soit par l'augmentation de m. Mais il n'en est pas ainsi. Passé un certain degré de petitesse, les divisions d du limbe ne sont plus faciles à distinguer les unes des autres, et la lecture directe effectuée sur le limbe peut être entachée d'erreur. D'un autre côté, en augmentant le nombre des divisions du vernier on fait naître de l'indécision dans l'appréciation de celle des divisions qui se confond avec une de celles du limbe.

Il n'est donc possible de pousser l'appréciation des lectures que jusqu'à une certaine limite qui dépend, s'il s'agit d'un cercle gradué, du rayon de ce cercle.

Le vernier devant s'appliquer successivement sur chaque partie du limbe divisé, celui-ci doit avoir une courbure uniforme, et il ne peut, par suite, être qu'une ligne droite ou un arc de cercle.

18. **Boussole.**— On sait que l'aiguille aimantée, lorsque rien ne l'empêche d'obéir à l'action magnétique, se dirige vers le nord, non pas exactement, mais en faisant avec le méridien un angle qui varie en raison du temps et des lieux, suivant une loi inconnue jusqu'à présent. Cet angle se nomme la *déclinaison*, sa valeur est actuellement de 20^g à Paris. Ses variations un peu considérables ne s'opèrent pas d'une manière brusque, en sorte qu'on peut le considérer comme constant pendant une campagne entière. L'aiguille, outre le mouvement graduel dont

elle est animée, éprouve chaque jour des oscillations à peu près régulières.

Ces oscillations n'ont pas une importance excessive en topographie, cependant elles sont suffisantes pour produire des erreurs appréciables. On sait, en effet, que suivant les saisons et les lieux, les variations diurnes peuvent atteindre une limite de 20′ sexagésimales.

Dans les environs de Paris, elles sont d'environ 15′ = $0^g,27'$ à 28′ centésimales, du mois d'avril au mois de juillet, et de 15′ à 16′ dans la saison opposée. Le minimum de la déclinaison a lieu vers huit heures du matin et huit heures du soir, le maximum vers trois heures du soir, tandis que la nuit elle est constante. C'est donc précisément aux époques des opérations que les variations existent, et elles peuvent donner au même angle deux valeurs différant entre elles d'un quart de grade. Cette valeur est aussi la limite d'exactitude de la lecture faite sur une boussole ordinaire, mais il faut bien observer que les deux erreurs de lecture et de variation de déclinaison pouvant s'ajouter dans certains cas, l'exactitude de l'angle ne sera obtenue qu'à un demi-grade près. Il ne faut donc pas demander à cet instrument, très-avantageux du reste sous d'autres rapports, une trop grande précision et vouloir, comme on a proposé de le faire, le rendre propre à remplacer les instruments de géodésie, en apportant à sa construction des modifications destinées à mieux préciser les lectures ou en augmentant ses dimensions qui tendent au même but, puisqu'il existe une erreur innée sur laquelle on ne peut pas agir.

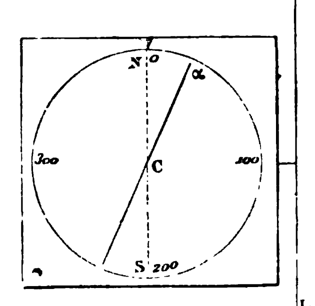
Ceci se rapporte à l'emploi ordinaire de la boussole ; mais si, par cas fortuit, on voulait se servir de cet instrument pour avoir l'angle compris entre deux directions visées, l'influence des variations diurnes serait annulée.

L'*inclinaison* de l'aiguille aimantée, d'environ 73^g à Paris, actuellement, exige que cette aiguille soit suspendue par un point autre que son centre de gravité, pour rester horizontale, comme cela est nécessaire pour l'usage de la boussole.

La *boussole* se compose d'un limbe gradué de 0 à 400^g renfermé dans une boîte recouverte d'un verre transparent, d'une aiguille aimantée librement suspendue, de manière à rester horizontale, sur un pivot dont la pointe occupe le centre du limbe, et d'une lunette fixée à la boîte, par un axe autour

duquel elle peut tourner en décrivant un plan perpendiculaire à celui du limbe.

La boussole peut tourner sur elle-même au moyen du mouvement particulier d'un genou, qui sert encore à la fixer sur un pied en bois, et à la mettre horizontale à simple vue.



Supposons qu'on ait pu marquer sur la boîte, par un index, le diamètre SN, parallèle au plan décrit par l'axe optique de la lunette et faisons tourner le limbe seul jusqu'à ce que ce diamètre se confonde avec celui marqué 0.200^{g}. Quand l'extrémité nord de l'aiguille marquera le chiffre 0, le diamètre précipité et par suite l'axe optique LL′, qui lui est parallèle, seront dans la direction du méridien magnétique. Dans une deuxième circonstance l'aiguille marquera une graduation α, lorsque la lunette sera dirigée sur un objet. Si les divisions du limbe vont du nord à l'est, comme cela a lieu ordinairement, l'axe optique de la lunette LL′, parallèle à SN ou au diamètre 0.200, aura marché vers l'ouest d'un angle égal à α, par rapport à l'aiguille; et comme celle-ci reprend toujours la même direction (pour le même temps et le même lieu), la ligne visée sera inclinée d'un angle α à l'ouest du méridien magnétique.

Si au lieu d'avoir fait marquer à SN le chiffre 0, on a mis, à demeure, N vis-à-vis du nombre qui représente la déclinaison du lieu, toutes les lectures deviendront plus fortes de la valeur de cette déclinaison et représenteront par conséquent les angles formés à l'ouest du méridien terrestre.

Il suffira donc de les rapporter dans ce sens, ce qui se fera avec facilité au moyen du rapporteur, si on a eu soin de tracer sur le papier une série de lignes parallèles indiquant les méridiens qui sont sensiblement parallèles pour le même lieu, et des perpendiculaires à ces méridiens pour faciliter la manœuvre du rapporteur.

Si enfin, au lieu de mettre, dans la direction du diamètre parallèle à ligne de visée, le nombre qui exprime la déclinaison actuelle, on a mis un nombre quelconque de grades, les angles lus dans chaque circonstance représenteront ceux que forment

les lignes de la nature, avec des directrices inclinées sur le méridien magnétique de ce même nombre de grades.

Le méridien vrai ne joue pas, dans l'emploi de la boussole, un rôle différent de ceux qui sont joués par des grands cercles quelconques de la sphère terrestre passant par le lieu d'observation.

Si un levé devait être exécuté entièrement à la boussole, sans canevas préalable, il suffirait d'employer cet instrument tel que le hasard l'aurait présenté, sans règlement; tous les angles lus se rapporteraient à des directrices inconnues qu'on représenterait sur le papier par une série de parallèles qui serviraient à rapporter les angles tels que l'instrument les aurait donnés.

Règlement.—Mais si un canevas a été préalablement exécuté, ce qui est le cas ordinaire, il y a lieu, ou de tracer les directrices répondant aux lectures de la boussole, ou si ces directrices sont données, de modifier les lectures de manière qu'elles donnent les mêmes angles que ceux qui sont formés sur le papier par les lignes du canevas.

On dit souvent que, pour régler une boussole, il suffit d'amener le chiffre de la déclinaison sous l'index qu'elle porte habituellement fixé à la boîte qui la contient et presque en contact avec la circonférence du limbe mobile.

Mais cela suppose que deux conditions sont remplies : 1° le rapport des angles devant être fait, dans ce cas, par rapport au méridien vrai, les directrices du papier doivent être des méridiennes convenablement inclinées par rapport aux lignes du canevas déjà tracé ; 2° le diamètre qui passe par l'index et qui porte, par hypothèse, le chiffre de la déclinaison, doit être parallèle au plan vertical décrit par la ligne de visée.

Quand même la première condition serait satisfaite, ce qui peut ne pas avoir lieu, par exemple quand on fait un levé isolé non basé sur des opérations géodésiques, et qu'on n'a pas déterminé la méridienne exactement, comment saura-t-on jamais que la seconde l'est également, autrement du moins qu'en faisant le règlement de la boussole ?

Voici la seule manière d'opérer qui puisse conduire à des résultats exacts ; elle devra toujours précéder l'emploi d'une boussole.

On trace sur le papier une série de parallèles au méridien ou à toute autre direction. On se transporte en un point donné par la triangulation à la planchette, on vise une direction égale-



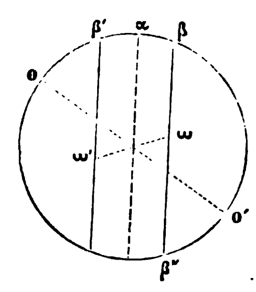
ment donnée par celle-ci, et on lit un certain angle α. Mesurant au rapporteur l'angle formé sur le papier par la direction employée et la ligne la plus proche de la série des parallèles, on obtiendra un autre angle α'. On fera alors tourner le limbe dans la boîte, soit à la main, en enlevant le verre de la boussole, soit avec une clef destinée à cet usage, jusqu'à ce que, la lunette restant pointée dans la direction choisie, la lecture soit α', celle du papier.

Si les lignes parallèles de la feuille de projection sont bien des méridiens, et si le diamètre passant par l'index est bien parallèle au plan de l'axe optique, cet index marquera le chiffre de la déclinaison, sinon il marquera un chiffre quelconque.

Inversement, comme il suffit qu'il y ait identité de lecture sur la boussole et sur le papier, au lieu de faire varier la première, on peut la laisser constante et modifier la seconde, en changeant les directrices du papier. Ce second mode d'opération est rarement employé, parce que souvent les directrices choisies sont des méridiennes ou elles ont du moins la prétention de l'être.

Vérification. — Centrage. — Théoriquement, le limbe doit être horizontal, et le plan décrit par l'axe optique doit être vertical. Pratiquement, on se contente de satisfaire à ces deux conditions à simple vue; les erreurs qui en résultent sont sans importance relativement à celles qui proviennent de l'instrument lui-même.

La seule vérification à faire consiste à s'assurer que le point de suspension de l'aiguille est bien le centre du limbe gradué ou plutôt que le dernier est la projection orthogonale du premier. En effet, supposons que c soit le centre du limbe et ω le point de suspension ; l'aiguille qui aurait dû être en $c\alpha$ marquant une lecture α, sera en $\beta\omega$ donnant une lecture β, en erreur de $\beta - \alpha$, qui peut aller de c à l'angle correspondant à l'arc dont le sinus serait $c\omega$ dans un cercle de rayon égal à celui du limbe. Il est donc essentiel de s'assurer que les points ω et c se confondent.



Deux moyens peuvent être employés pour arriver à ce résultat; le premier consiste à reconnaître la rectitude de la ligne formée par le point de suspension et par les deux pointes

de l'aiguille. Celle-ci pose sur le pivot au moyen d'une chape ou agate évidée coniquement dont le sommet se confond avec la pointe du pivot et par suite avec le centre de rotation qui n'est autre que cette pointe. Si on a pu constater cette rectitude, il suffit, pour s'assurer du centrage, de faire les lectures aux deux pointes de l'aiguille, lectures qui doivent différer de 200^g.

Si ces deux lectures ne satisfont pas à cette condition, on peut les combiner de manière à avoir la lecture vraie. En effet, si on désigne par e l'erreur relative à la lecture β faite à la pointe nord de l'aiguille, par β'' celle qui est faite à la pointe sud et par α la lecture vraie, on a évidemment,

$$\beta = \alpha + e \text{ et } \beta'' = 200^g + \alpha - e$$

par suite

$$\beta + \beta'' = 2\alpha + 200 \text{ ou } \alpha = \frac{\beta + \beta''}{2} - 100$$

il suffit donc de faire la demi-somme des deux lectures et d'en retrancher 100^g.

Mais ce résultat n'est exact qu'autant que la vérification préalable de rectitude a pu être faite. Cette vérification, toujours plus ou moins difficile à faire rigoureusement, peut conduire à un résultat négatif; il faut alors avoir recours au procédé suivant, toujours plus exact.

On retourne la boîte de la boussole de 200^g, et ramenant vers soi l'oculaire de la lunette, on vise de nouveau le point qui avait donné la lecture β.

Le o des graduations vient en o', ω en ω', et l'aiguille aimantée β' prenant la direction $\omega'\beta'$ parallèle à $\omega\beta$, donne une lecture $o'\beta' = 200^g + \beta'$.

Si l'instrument avait été centré, les deux lectures $o\alpha + o'\alpha$ eussent différé de 200^g; si les lectures réellement faites ne donnent pas cette différence, il y a erreur commise.

On peut, avec ces deux lectures, obtenir celle qui répondrait au centrage; pour s'en assurer, il suffit de refaire le calcul du premier en remarquant que le β' actuel est le même que le β'' précédent, et on arriverait au même résultat, c'est-à-dire que l'angle vrai est égal à la moyenne de la somme des deux lectures diminuée de 100^g. Mais cela serait très-incommode; il vaudrait mieux, si l'erreur était sensible, faire retoucher l'instrument par le constructeur, ou même le corriger soi-même par tâtonnements, en infléchissant le pivot qui supporte l'aiguille.

Il est important d'effectuer cette vérification sur plusieurs directions. On ne s'apercevrait pas en effet de l'erreur si la direction choisie se trouvait telle que C et ω fussent sur le méridien magnétique. C'est ce qu'on n'aura pas à craindre si l'on opère ensuite sur une seconde ligne à peu près perpendiculaire à la première.

Il ne faut pas croire que la vérification qui vient de nous occuper n'ait pas besoin d'être renouvelée de temps en temps pour le même instrument, car le support de l'aiguille aimantée est une tige très-mince dont l'extrémité peut, à la rigueur, être facilement tordue.

Limite de longueur des côtés. — Les limbes des boussoles bien construites portent des divisions de 50′ en 50′; on pourra donc faire les lectures à moins de 25′ d'erreur. Si nous reportons cette valeur dans la formule d'appréciation que nous avons trouvée précédemment, $k < \frac{1^{mm}}{4}\frac{1}{\beta}$, nous aurons

$$k < \frac{0^{m},00025}{25'} = \frac{25}{390} = 0^{m},064$$

pour la limite de longueur des côtés réduits à l'échelle. C'est à peu près la longueur de l'aiguille aimantée.

On arrive encore au même résultat par le raisonnement suivant. L'erreur de lecture, car nous ne pouvons pas tenir compte de celle qu'on commettra en faisant usage du rapporteur, et qui tendra encore à diminuer la limite de longueur admissible pour les côtés, provient de ce qu'on ne pourra pas juger avec certitude de la position exacte de l'extrémité nord de l'aiguille. Cette erreur sera de même amplitude que celle dont l'œil ne peut pas tenir compte dans la position de la projection du point visé. On ne dépassera pas la limite de cette dernière si la projection de ce point ne se trouve pas plus éloignée du sommet de l'angle en erreur, c'est-à-dire de l'autre extrémité du côté, que cela n'a lieu pour l'extrémité de l'aiguille. C'est-à-dire qu'il faut que les côtés employés ne soient pas plus grands en projection que la longueur de l'aiguille aimantée.

Décentrage de la lunette. — On place le centre du limbe sur la verticale du point de station, et on vise des directions LA, LA′, LA″, qui nécessitent des rotations partielles du limbe, en sorte que ces points, qui sont pourtant situés sur une même ligne

droite partant de la station, donnent naissance à des lectures d'angles ou *azimuts*, différant entre eux de $e = ALA'$.

Il y a évidemment erreur commise par suite de cette excentricité de la lunette, excentricité qui est forcée par les nécessités de la construction ; estimons-en l'importance.

Supposons que la boussole ait été réglée sur le point A, ordinairement très-éloigné ; lorsque ensuite on visera le point A', l'erreur angulaire commise sera $e = \frac{CAL \times (K - K')}{K'}$, en confondant les sinus avec les angles A et e, qui sont très-petits, ou $e = \frac{r}{K} \frac{K - K'}{K'}$, erreur qui sera dans un sens ou dans l'autre, suivant qu'on visera un point plus éloigné ou plus rapproché que le point employé lors du règlement.

Pour que cette erreur angulaire soit plus petite que celle qui provient de la lecture même, il faut que $e = r\left(\frac{1}{K'} - \frac{1}{K}\right) < 25'$ ou $\frac{1}{250}$ environ, en rapport.

Dans le cas du plus grand éloignement, le maximum, qui correspond à $K' = \infty$, est

$$e = -\frac{r}{K} < 25' < \frac{1}{250};$$

il suffit donc que $K > 250.r$; l'excentricité d'une boussole qui donne les lectures à 25' près étant d'environ $0^m,1$, il faut que le règlement ne se fasse pas sur un côté plus petit que 25^m.

Dans le cas d'un plus grand rapprochement du point visé, l'erreur angulaire est toujours plus petite que $\frac{r}{K}$, et pour qu'elle ne dépasse pas 25', il faut que $\frac{r}{K'} < \frac{1}{250}$, ou que le côté employé ne soit pas plus petit que 25^m, limite répondant à un règlement supposé fait sur un côté infiniment grand.

Observations. — Le cheminement peut être un peu abrégé en ne faisant qu'une station sur deux. En effet, s'il s'agit de déterminer une suite de points A, B, C, D, on part d'un point connu

A, et visant B on obtient un angle qui permet de tracer la projection *ab*, qu'on limite en vraie grandeur au moyen de la distance AB directement mesurée et réduite à l'échelle. Si on stationnait ensuite en B pour viser C, le cheminement effectué serait conforme à l'idée simple que nous en avons donnée précédemment; mais si, passant en B sans s'y arrêter, on mesure également la distance BC pour aller stationner en C, on pourra de celui-ci viser le point B et obtenir l'angle formé par la direction CB avec le méridien de C. La projection de ce point n'est pas connue, il est vrai, mais il suffit de remarquer que l'angle correspondant à la direction BC tracée par *b*. qui est connu, diffère de celui fourni en C par la boussole de 200^g en plus ou en moins. On pourra donc tracer ce côté *bc* et le limiter en *c* par suite de la connaissance de la longueur mesurée BC.

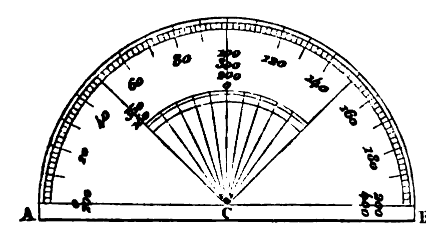
Nous avons dit qu'en opérant ainsi on abrégeait les opérations, mais dans de petites limites; en effet, les angles et les distances à mesurer sont aussi nombreux, il n'y a économie que dans l'installation de la boussole. Le principal avantage de ce procédé ne réside pas là, selon nous, mais bien en ce qu'on peut éviter ainsi une partie des pointés défectueux qui se présentent à chaque instant dans le cheminement et entachent celui-ci d'erreurs considérables. En effet, tous les points qu'il importe de relever ne sont pas toujours marqués par des objets remarquables que l'on puisse viser; ainsi, par exemple, le coude d'un chemin pourra n'offrir qu'un pointé très-défectueux; on lui fera jouer alors le rôle que nous avons attribué au point C qui, dans le procédé dont nous nous occupons, n'a pas besoin d'être visé. En résumé, on pourra distribuer ses stations sur les points remarquables de la planimétrie qui ne sont marqués par aucun objet bien visible, et réserver les points visibles pour n'y pas stationner.

Opérations par écrit. — Quelquefois, par exemple par le mauvais temps, on ne peut pas opérer directement sur la feuille de projection; on trace alors sur un calepin, à l'œil, des croquis semblables aux polygones à relever, en inscrivant en chiffres les angles et les distances correspondantes. On fait ensuite le tracé exact dans le cabinet, au moyen de ces renseignements recueillis sur le terrain.

L'inconvénient de cette manière d'opérer provient de l'oubli qu'on peut faire très-facilement de l'inscription d'un élément, oubli qui ne peut pas avoir lieu par le procédé ordinaire, puisque

tous ces éléments sont indispensables pour le tracé qui a dû être fait sur place. Il est alors nécessaire de retourner au lieu, souvent éloigné, où cette omission a eu lieu. L'inconvénient est encore plus grand lorsque, au lieu d'avoir été oubliée, une inscription a été faussement effectuée. Il faut alors recommencer la partie du travail qui suit un point recoupé et reconnu exact.

19. **Rapporteur.** — Nous venons de voir comment on se sert du graphomètre ou de la boussole pour mesurer l'angle compris entre deux objets ou entre une ligne et une directrice fixe. Il s'agit actuellement de le décrire graphiquement sur le papier. On emploie pour cela un instrument nommé rapporteur. C'est un demi-cercle en corne assez épaisse pour ne pas se voiler trop facilement par la chaleur, sans cependant cesser d'être transparente. La surface du demi-cercle est augmentée du rectangle A 0^g B 200^g, et la ligne AB parallèle au diamètre 0—200 sert de règle pour tracer les lignes sur le papier. Le diamètre a de $0^m,15$ à $0^m,2$.



La circonférence porte une double graduation : l'une de 0^g à 200, l'autre de 200 à 400. Les grades sont divisés en deux, de sorte que l'approximation est la même que dans la boussole.

Il est facile de comprendre l'usage de cet instrument. On opère en l'employant sur la projection comme on fait avec la boussole pour déterminer les angles sur le terrain. On sait que dans cette dernière circonstance, lorsqu'on lit l'angle que fait une ligne avec la directrice, on sous-entend une opération préalable, mais superflue, celle d'avoir visé dans le sens de cette directrice. Pour rapporter cet angle sur le papier, on peut supposer que l'on procède d'une manière analogue, ce qu'au reste font effectivement les personnes qui n'ont pas encore acquis l'habitude de cette très-simple opération. On place d'abord le diamètre 0^g — 200^g sur la projection de la directrice, ce qui revient à diriger sur le terrain la lunette dans la direction de celle-ci ; puis faisant tourner le rapporteur en conservant son centre au même point, on n'arrête ce mouvement qu'à l'instant où le chiffre qui indique l'angle à rapporter se trouve sur la projection de la directrice, et celle-ci sert ici de repère comme l'extrémité de l'ai-

guille dans la boussole. Il est évident qu'alors la règle du rapporteur fait bien le même angle que la lunette avec le méridien. Le nombre de degrés, d'après la convention établie, indique de suite dans quelle région se trouve le point visé.

Il serait fort incommode, vu la multiplicité des points de détail, de tracer pour chacun d'eux une directrice. Pour obvier à cet inconvénient, on en trace un certain nombre assez rapprochées, à $0^m.1$ par exemple : on met le centre du rapporteur sur la plus voisine du point ; on le fait pivoter jusqu'à ce que la règle fasse l'angle voulu, puis on le fait glisser dans cet état, parallèlement à lui-même, jusqu'au moment où la règle passe par le point. On obtient ce parallélisme de la règle dans les deux positions, en conservant toujours sur la directrice le même chiffre et le centre.

Si l'angle à rapporter est très-petit, il faut modifier l'opération en se servant du rapporteur complémentaire, dont les chiffres de la graduation diffèrent de 100^g de ceux du rapporteur ordinaire, et l'on emploie, au lieu de la méridienne, une ligne qui lui est perpendiculaire. Au surplus, on peut facilement se passer du rapporteur complémentaire et tirer le même parti de l'autre. L'opération mentale à faire est tellement simple qu'il nous paraît inutile de chercher à l'éviter.

Table des cordes. — On peut, au lieu du rapporteur, employer une table qui donne les cordes des arcs qui mesurent les angles dans un cercle de rayon donné ; pour se servir de cette table, il faut, de chaque sommet pris comme centre, décrire un arc de cercle avec ce rayon, et du point de rencontre de ce cercle avec celle des directions qui est connue, il reste à décrire un nouvel arc avec un rayon égal à la corde trouvée ; le point de rencontre appartient à la direction cherchée.

CHAPITRE V

ENSEMBLE DES OPÉRATIONS DE LA PLANIMÉTRIE

20. Nous avons passé en revue les différents instruments employés au levé de détail : nous avons indiqué leur usage particu-

lier, le degré de précision dont ils sont susceptibles, leurs vérifications et rectifications, ainsi que les problèmes les plus essentiels dont ils peuvent fournir la solution. Il reste maintenant, pour donner une idée nette de l'ensemble du travail, à indiquer l'esprit de méthode qui doit diriger depuis la formation du grand canevas jusqu'à l'expression des détails les plus minutieux. Si l'on avait plusieurs points déterminés dans le levé, il faudrait avant tout les vérifier ; si quelques-uns d'entre eux ne s'accordaient pas avec les autres, on les rejetterait, et si enfin il y avait trop d'incertitude, on les rejetterait tous. La première opération à faire est une reconnaissance générale du terrain à lever, dans laquelle on signale tous les points qui doivent servir de sommets de triangles, et la base à mesurer, s'il y a lieu. Nous ne répéterons pas ce que nous avons dit là-dessus, et nous supposerons les grands triangles construits sur le canevas, les points rapportés sur les feuilles du levé, les directrices tracées ; et enfin les points assez rapprochés pour que les projections de leurs distances ne soient pas plus grandes que l'aiguille de la boussole ou du déclinatoire.

Toutes les opérations préliminaires seront faites très-exactement avec une bonne planchette, lorsque l'étendue du terrain n'excédera pas la limite indiquée des levés topographiques. On aura soin de s'orienter sur des points éloignés, et de déterminer des points rapprochés de la station.

Quoique cela ne soit pas indispensable, on construit quelquefois le canevas à part, afin de conserver propre le papier de la minute. Il faudra avoir soin encore, lorsque l'on rayonnera sur des objets non signalés, tels qu'arbres, cheminées, flèches de clochers, etc., de les dessiner légèrement sur le canevas, à l'extrémité des lignes tracées et hors du cadre, afin de soulager la mémoire.

On passe ensuite à l'exécution du levé de détail, pour lequel on peut employer quatre instruments différents, la planchette et l'alidade sans déclinatoire ou avec l'adjonction de ce dernier, le graphomètre et la boussole. Les deux premiers donnent immédiatement les angles tout tracés ; les deux derniers exigent l'emploi d'un rapporteur qui cause une perte de temps et des erreurs provenant de la lecture et du rapport même de cette lecture déjà quelque peu erronée. Le graphomètre et la planchette seule exigent la connaissance d'un point de plus que les deux autres. La combinaison de ces avantages et de ces inconvénients



indique déjà que le graphomètre, qui ne possède que ces derniers, doit être abandonné toutes les fois qu'on en aura le choix.

Il en sera de même de la planchette seule, si au désavantage d'exiger un point connu en plus, on ajoute l'inconvénient qu'elle présente au cheminement. Cette méthode d'opérer exigerait de la planchette une orientation déterminée par l'observation du dernier élément parcouru, élément toujours très-petit et donnant par suite une orientation défectueuse. Il est bien vrai que les positions des points du cheminement seraient aussi mal déterminées par l'emploi de la boussole ou du déclinatoire adjoint à la planchette, car les erreurs proviennent surtout du très-mauvais pointé qui résulte de l'emploi même du cheminement; les points visés ne sont, la plupart du temps, pas bien reconnaissables des deux stations consécutives. Mais nous savons que, pour parer à cet inconvénient, il faut se recouper le plus souvent possible sur les points visibles du canevas. Là apparaît l'avantage de la boussole ou du déclinatoire. En effet, la direction fournie par ce recoupement est indépendante de la mauvaise position du point de station, et n'est entachée que de la légère erreur de lecture; pour la planchette, au contraire, cette direction sera une conséquence de l'orientation, et celle-ci sera basée sur le dernier élément du cheminement, élément souvent défectueux et que le recoupement a pour but de vérifier.

La vérification serait donc une conséquence du travail qu'on veut contrôler, et elle ne conduirait à aucun résultat concluant. Il ne reste donc que deux instruments qui puissent être convenablement employés: la planchette et l'alidade avec adjonction du déclinatoire, et la boussole; ils donnent même approximation dans la lecture, variable sur la boussole, constante sur le déclinatoire, s'ils ont le même rayon. Le premier donne immédiatement les angles sur le papier, mais il est assez lourd et d'un transport difficile, et de plus il ne permet pas l'exécution, quelquefois utile, d'un levé par croquis. La boussole exige l'emploi du rapporteur, mais elle est plus légère que la planchette et elle permet le travail par croquis.

Il nous semblerait, en résumé, que l'avantage reste encore au premier procédé; mais une considération importante fait préférer le second. Le nivellement exige l'emploi d'un autre instrument, l'éclimètre, qui, s'adaptant beaucoup plus facilement à la boussole qu'à l'alidade, fera donner la préférence à la première,

qui permettra, par un transport facile, d'exécuter les deux parties intégrantes d'un levé régulier.

Il est nécessaire d'avoir toujours avec soi la chaîne ou tel autre instrument propre à mesurer les distances, un rapporteur, une planchette légère sur laquelle est placée la minute, un compas, une échelle et un calepin pour recueillir les observations : car, bien qu'il faille autant que possible rapporter de suite sur le terrain, il est bon d'être en mesure de pouvoir reconstruire, s'il s'était glissé quelque erreur. Ce calepin, contenant les angles fournis par la boussole et les distances mesurées, pourrait être ainsi disposé, en supposant que l'on ne s'arrête qu'à une station sur deux.

NOMS des STATIONS.	COTÉS.	LONGUEURS des CÔTÉS.	ANGLES avec la DIRECTRICE.	OBSERVATIONS.
B........	AB	50m	354g	
	BC	60	50	
D........	CD	100	225	
	DE	200	2	
	DY	etc.	etc.	
	DZ	etc.	etc.	

On voit dans ce tableau que nous avons supposé que, étant en station en D, on a visé deux points Z et Y hors du polygone ABCD, etc., que l'on suit.

Tout étant ainsi disposé, on réglera la boussole sur une direction connue et on partira de l'un des points déterminés. On rayonnera de là les points les plus saillants du détail, et la direction sur laquelle on veut marcher, en visant un jalon. On mesurera la distance entre les deux stations en abaissant en même temps sur cette direction, des perpendiculaires que l'on mesurera, soit à la chaîne, soit au pas, ou que l'on estimera à vue, de tous les points de petits détails situés à droite ou à gauche du chemin que l'on suit. Pour cela, on se servira de la méthode qui sera indiquée pour l'équerre d'arpenteur. Arrivé à une station déterminée par le chaînage et vérifiée par des intersections sur des points du canevas, ou quelquefois obtenue seu-

lement par ce dernier procédé, on rapportera sur la minute, au moyen des observations inscrites sur le calepin, tout ce que l'on a fait entre les deux stations.

On figurera à vue et très-légèrement les ondulations du terrain autour de ces deux stations, à une petite distance et sans s'occuper de les rattacher aux formes générales. Nous verrons bientôt d'après quel principe on devra se guider dans ce travail.

On suivra autant que possible les principales communications sans s'astreindre toutefois à marcher continuellement dans la voie tracée, et l'on fera les stations aussi longues que possible, eu égard à l'échelle.

On s'écartera peu, dans l'expression du détail, de la direction que l'on parcourt, et l'on fera en sorte d'aboutir de temps en temps à quelque point du canevas pour se vérifier.

Lorsque le pays sera découvert, on fera usage des méthodes d'*intersection* et de *recoupement* comme plus exactes et plus expéditives en ce qu'elles dispensent du chaînage.

Si, au contraire, le pays est couvert, on ne pourra guère employer que la méthode de *cheminement*.

Les parties que l'on doit arrêter avec le plus grand soin, dans tous les travaux topographiques, quelle que soit l'échelle, sont :

1° Les grandes routes, grands chemins et percées de forêts ;

2° Les fleuves, rivières, ruisseaux, lacs, étangs et fontaines ;

3° Les rues et contours des villes et villages ;

4° Les habitations isolées, moulins, chapelles, châteaux, ponts, bacs, usines, carrières, etc.

Les grandes routes, grands chemins, etc., seront, s'il est possible, déterminés à la planchette, par quelques-uns de leurs points recoupés des stations du canevas, et si on y emploie la boussole, il faudra s'arrêter à chaque coude que l'on déterminera par tous les moyens possibles, chaînages, recoupements, etc.

Les deux bords d'une rivière s'obtiendront en cheminant sur l'un d'eux et recoupant sur l'autre, soit des points remarquables tels que arbres, poteaux d'amarres, etc., soit des jalons que l'on y fera successivement placer. Les sinuosités entre deux stations se figureront à vue ou par des ordonnées, sur la direction principale. Les ruisseaux se détermineront comme les rivières, ou par des intersections, sur des points de leur cours assez rapprochés les uns des autres.

Pour les villes et villages, on commencera par en lever les contours avec beaucoup de soin : on amorcera en même temps les principales issues, puis on partira de l'une d'elles pour suivre les différentes rues; d'une station à l'autre, on abaissera sur le chaînage les perpendiculaires de tous les points remarquables, tant d'un côté que de l'autre, comme angles de murs, portes cochères, etc., et l'on pénétrera ensuite dans les habitations pour figurer les massifs de maisons, cours, jardins, etc. Quand les murs que l'on rencontrera à l'intérieur auront quelque étendue, on en prendra les directions à la boussole.

Pour les habitations isolées : si les contours que l'on suit, en cheminant, n'y conduisent pas, et si l'on n'a pu de loin les placer par recoupement, on déterminera dans leur voisinage un point au moyen de plusieurs autres, et l'on en partira pour faire le détail.

Les contours de bois se feront à la boussole, en ne s'arrêtant qu'à une station sur deux, si du moins les intermédiaires ne sont pas nécessaires au recoupement des points environnants; ceux des forêts seront relevés avec beaucoup de précision, surtout par rapport aux amorces des routes droites dont elles sont percées; car, celles-ci se réunissant souvent à des carrefours, il n'en pourrait pas être de même de leurs projections, s'il s'était glissé quelque erreur.

On représente de suite, en s'occupant de la planimétrie, les petits accidents de terrain tels que les escarpements, ravins, carrières, mares, massifs de rochers et, en général, tout ce qui se dessine à vue.

Nous terminerons en disant que la méthode la plus prompte consiste à lever avec exactitude. Si l'on tolère d'abord des erreurs assez légères, elles s'accumulent souvent et finissent par être telles que l'on ne peut plus s'y reconnaître, et, malgré soi, l'on est obligé de recommencer des parties souvent considérables. On fera donc bien de ne négliger aucune des vérifications possibles, et lorsque, malgré ces soins, quelque partie se trouvera altérée, il faudra de suite la reprendre en déterminant dans son intérieur un point au moyen de plusieurs autres dont on sera sûr.

Il est possible que l'étendue du terrain à lever ne permette pas, eu égard à l'échelle, de la représenter sur une seule feuille de papier, ou que l'on soit obligé d'en faire le partage en feuilles, pour que le travail puisse être exécuté par plusieurs per-

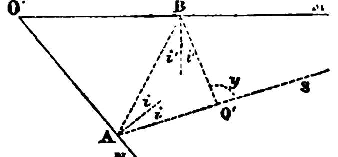
sonnes à la fois. Dans ce cas, on divise le canevas que l'on a fait à part, en plusieurs rectangles, et l'on construit chacun d'eux isolément sur une feuille de papier et à l'échelle adoptée pour le levé. Ensuite, on y reporte les points du canevas par leurs distances aux côtés du cadre. On fera en sorte que chaque feuille ait trois points au moins. On peut encore prendre pour côtés des cadres sur lesquels doivent se raccorder des levées contiguës, les droites qui unissent les clochers ou autres objets remarquables faisant partie du canevas. Il serait superflu de reproduire ici les différents problèmes qui peuvent se présenter sur le terrain; notre but était seulement de résumer la marche à suivre pour opérer avec méthode.

CHAPITRE VI

INSTRUMENTS A RÉFLEXION

21. Les instruments que nous allons décrire sont rarement employés en topographie; cependant nous devons les faire connaître parce qu'ils peuvent être utilisés dans certains cas, et qu'ils ont l'avantage de ne pas exiger de support fixe. Ils sont en conséquence propres, les uns aux observations régulières par leur exactitude, les autres seulement aux levés expédiés, et très-utiles tous deux, puisque, s'en servant à la main, ils peuvent être employés sur un sol mobile, sur le pont d'un navire par exemple.

Ces instruments sont fondés sur les lois de la réflexion de la lumière, lois qui disent que tout rayon lumineux qui rencontre une surface réfléchissante, se réfléchit en restant dans le plan normal à cette surface, et en faisant avec la normale un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence.



Soient OA et OB les traces de deux miroirs sur le plan qui contenant un rayon lumineux SA, ou plutôt un faisceau très-

délié de rayons sensiblement parallèles émanés d'un même point éloigné, est perpendiculaire à ces miroirs; le rayon lumineux se réfléchira en restant toujours dans ce plan.

Rencontrant la première surface N en A, il prendra la direction AB telle que l'angle d'incidence égalera l'angle de réflexion.

Réfléchi de nouveau en B par le second miroir M, suivant les mêmes lois, il viendra rencontrer en O le rayon venu directement.

Le principe fondamental sur lequel repose la construction de cette espèce d'instrument, est que l'angle formé par le rayon direct et par sa seconde réflexion est le double de l'angle que forment les deux miroirs plans. En effet, l'angle y de la figure, extérieur au triangle ABO, est donné par

$$y = 200^G - 2\,i - 2\,i_{\prime}$$

d'un autre côté

$$O = 200 - OAB - OBA = 200 - (100 - i) - (100 - i') = i + i'$$

mais l'angle des deux rayons lumineux direct et réfléchi, est

$$200 - y = 2\,i + 2\,i' = 2 \times O,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Pour utiliser ce principe, on s'arrange de telle sorte que la seconde réflexion du premier objet se confonde avec le rayon direct venu d'un second; alors l'angle des deux miroirs est la moitié de l'angle des deux objets.

Pour pouvoir établir cette superposition, l'un des miroirs OB est étamé seulement jusqu'à moitié de sa hauteur, de sorte qu'en plaçant convenablement la pupille, on peut avoir les sensations simultanées de l'objet considéré directement au moyen des rayons qui ont traversé sans déviationl a partie non étamée et à faces parallèles, et de celui qui est vu par seconde réflexion, par le moyen des rayons qui ont frappé la partie étamée de ce miroir.

Il est évident que les objets doivent ainsi paraître peu lumineux. Aussi la manœuvre des instruments à réflexion demande-t-elle une assez longue pratique.

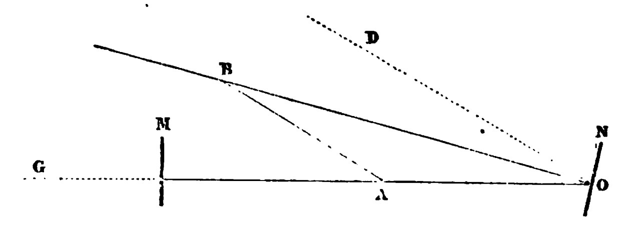
Remarquons que le principe fondamental nous a servi à mesurer l'angle formé par les rayons eux-mêmes, c'est-à-dire dans le plan des objets; nous indiquerons plus tard par quelle pré-

caution on peut arriver à avoir approximativement la valeur de l'angle à l'horizon, qui seul doit être employé en topographie.

Les trois instruments fondés sur la double réflexion portent tous trois le nom de *sextants*, parce que le principal d'entre eux, le sextant gradué, contient un arc de cercle qui est habituellement du sixième de quatre angles droits.

22. Sextant graphique. — Le premier de ces instruments est un goniographe qui donne l'angle sans se préoccuper de sa mesure.

OAM, AB et OB sont trois règles liées entre elles par des charnières ; B est de plus mobile dans une rainure longitudinale que porte OB, qui est variable de longueur, tandis que OA et AB sont constants et égaux entre eux. La figure OAB sera toujours un triangle isocèle, quelle que soit l'ouverture de l'angle A.



M et N sont deux miroirs placés perpendiculaires au plan formé par les règles, et perpendiculaires aussi, momentanément du moins, le premier à AO, le second à OB. Enfin le miroir N est entièrement étamé, tandis que M ne l'est que dans la moitié de sa hauteur.

Si un objet G est placé dans la direction OA, et un objet D dans la direction symétrique de OA par rapport à OB, ils paraîtront superposés pour un œil qui, placé en arrière de O, verra le premier point directement et le second par deuxième réflexion. Il suffit donc d'ouvrir l'instrument jusqu'à ce qu'il en soit ainsi, et l'angle à tracer sera GOD = GAB par suite de la forme isocèle du triangle OAB. Si donc on a eu soin de faire l'opération en mettant le point A sur la projection connue du point de station, et l'une des deux lignes OA ou OB sur la projection de la direction connue, il n'y aura que le second côté OB ou OA à tracer.

Vérifications. — Nous avons supposé les deux miroirs perpendiculaires aux deux règles OA et OB après lesquelles ils sont

fixés, pour la facilité de l'explication; mais cela n'est pas indispensable; il suffit en effet, par suite du principe fondamental, qu'ils soient inclinés du même angle sur ces règles; ils ne doivent pourtant pas s'éloigner sensiblement de cette perpendicularité, afin que les rayons réfléchis viennent rencontrer la pupille située vers le point O, car le faisceau de ces rayons n'a qu'une très-petite amplitude. Il ne faut pas croire que le déplacement de l'œil dans les environs du point O soit une cause sensible d'erreur; l'effet des miroirs, quand ils sont dans une direction convenable, est de transporter l'image de D sur la ligne OA à une distance égale à celle où ce point se trouve de l'observateur. Les deux points G et D' sont donc situés tous deux sur OA, mais à des distances très-grandes; un petit déplacement de l'œil sera alors sans influence sur leur superposition : aussi la position de l'œil n'est-elle fixée que par cette condition de se trouver sur le parcours du petit faisceau réfléchi.

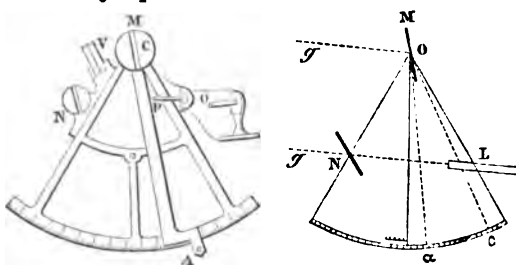
Nous venons de voir qu'il fallait que les deux miroirs fissent le même angle avec les deux règles qui les supportent. Il faut de plus, et c'est une conséquence du principe fondamental, que ces miroirs soient perpendiculaires au plan des règles.

Les sextants graphiques n'ont pas ce qu'il faut pour faire cette seconde vérification. Si l'on voulait l'effectuer, il faudrait avoir recours au procédé qui sera indiqué lorsque nous étudierons le sextant gradué. L'instrument qui nous occupe actuellement est d'une exactitude assez médiocre pour que l'on puisse se dispenser de faire cette vérification. Si la condition n'est pas satisfaite, les angles mesurés sont dans un plan autre que celui des objets, et la différence sera petite si on ne s'est pas écarté sensiblement de cette perpendicularité.

Quant à la première, qui consiste à s'assurer de l'égalité des angles formés par les miroirs et les règles, elle est beaucoup plus importante, en ce sens qu'une erreur commise sur cette égalité d'inclinaison se transportera non-seulement en vraie grandeur, mais en se doublant, sur la mesure des angles. On la vérifie très-simplement en s'assurant qu'elle est satisfaite dans un cas particulier, celui où l'angle à obtenir est nul. On met alors OB en coïncidence avec AO, l'angle obtenu sera nul et il faudra qu'il en soit de même de l'angle de la nature, c'est-à-dire qu'on devra apercevoir l'image directe d'un point se confondant avec la seconde réflexion du même point.

23. Sextant gradué. — Cet instrument, beaucoup plus exact que le précédent, est même susceptible d'une grande exactitude; il est encore employé par un grand nombre de marins pour les observations faites en mer; on lui a pourtant substitué avec avantage le *cercle à réflexion*, qui est fondé sur le même principe, mais qui a l'avantage de répéter les angles.

Il se compose d'un arc de cercle en métal, gradué, d'un miroir N étamé jusqu'à moitié de sa hauteur, fixé sur un rayon matériel en face d'une lunette PO aussi fixée sur un autre rayon matériel. Enfin, un miroir M entièrement étamé, mobile autour du centre C,



d'un limbe gradué, porte un vernier A, qui parcourt les graduations de ce limbe. On met habituellement en V un système propre à recevoir des verres noircis destinés aux observations du soleil.

On regarde avec la lunette l'objet de gauche directement, à travers la partie transparente de N, et l'on fait tourner le miroir M jusqu'à ce que cet objet se confonde avec la seconde réflexion de l'objet de droite. L'angle des deux objets est alors le double de celui formé par les deux miroirs, car *g*N et *g*O, venus du même point éloigné, sont très-sensiblement parallèles par suite de la petite dimension de l'instrument. Il n'y aura plus qu'à lire l'angle marqué par le vernier, si l'on a eu soin de mettre le 0 des graduations dans la position qui correspond au parallélisme des deux miroirs.

Par suite des considérations que nous avons exposées en traitant du sextant graphique, la lunette ne sert qu'à grossir et à indiquer vers quelle position passent les rayons efficaces; pour les mêmes raisons, elle n'a pas besoin d'être munie d'un réticule; elle peut se mouvoir un peu dans le sens perpendiculaire au plan du limbe, afin de recevoir dans des rapports convenables les rayons directs et les rayons réfléchis, pour que les deux images soient à peu près de même clarté. Enfin, le constructeur a dû la placer à peu près parallèlement au limbe, pour qu'elle soit traversée par les rayons qui ont eux-mêmes ce parallélisme.

Vérifications. — Les deux vérifications suivantes sont importantes à effectuer :

1° Les miroirs doivent être perpendiculaires au plan du limbe. On s'en assure au moyen de petits cubes viseurs dont les angles sont exactement droits. On vérifie d'abord un des miroirs en regardant directement une arête d'un des cubes et, par réflexion, celle d'un deuxième cube ; on jugera exactement du parallélisme rapproché de ces deux arêtes, qui, perpendiculaires en réalité au limbe, ne pourront paraître parallèles que lorsque le miroir sera parallèle lui-même à l'arête réfléchie, c'est-à-dire perpendiculaire au plan du limbe. On pourra agir de même isolément pour le second miroir, ou par seconde réflexion en s'appuyant sur la vérification préalable du premier.

2° L'index ou zéro du vernier doit marquer le 0 des graduations quand les miroirs sont parallèles. On s'en assurera, comme pour le sextant graphique, en superposant les deux images d'un même point et voyant si cette circonstance donne bien une lecture égale à zéro.

On inscrit habituellement sur cette sorte d'instrument la graduation double de ce qu'elle représente réellement, en sorte que la lecture donne directement l'angle des objets.

Le sextant gradué est un goniomètre ; il exige l'emploi du rapporteur quand il est employé aux opérations de la topographie.

Son pointé est difficile, car les images sont peu lumineuses, et la superposition ne pouvant avoir lieu que lorsque le plan du limbe se confond avec celui des objets, et lorsque l'ouverture de l'angle est convenable, les images sont oscillantes.

Nous avons dit qu'on donnait à cet instrument le nom de sextant parce que son arc gradué est du sixième de la circonférence, ce qui permet de mesurer des angles du tiers de 400^g ; quelquefois il ne comprend que le huitième de la circonférence et ne permet pas la mesures d'angles $> 100^g$; dans ce cas il prend le nom d'octant.

Le sextant gradué permet l'observation des angles à l'horizon. On l'emploie à cet égard comme le cercle à réflexion, ainsi qu'il sera dit au § 85 du livre II.

24. Sextant à un seul miroir. — Le sextant à un seul miroir, par cela seul qu'il n'exige qu'une seule réflexion, perd moins de lumière ; il est moins volumineux que les précédents,

mais son exactitude n'est suffisante que pour les levés expédiés.

M est un miroir plan mobile autour du centre d'un arc de cercle gradué du sixième de la circonférence ; O est une petite visière fixée sur la règle qui porte l'instrument, et qui détermine conjointement avec une raie verticale tracée sur le miroir et passant par le centre du limbe, la ligne de visée du point de gauche. La ligne de visée peut être également, plus exactement même, obtenue avec deux points fixes ou une lunette à réticule, car il doit y avoir quelque difficulté à placer rigoureusement la raie du miroir à l'axe de rotation, ce qui est nécessaire pour l'existence de la fixité du rayon visuel.

Lorsque, par le mouvement du miroir, on fera confondre avec OCg l'image du point de droite, l'angle gCM sera la moitié de celui que l'on cherche.

Un index fixé au miroir décrira les mêmes angles que ce miroir ; si on lui a fait marquer le 0 au moment où celui-ci était en M' perpendiculaire à la ligne de visée, il aura parcouru un angle $\alpha = ii' =$ MCM' lorsqu'on sera arrivé à la position convenable. L'angle cherché $= 2.g\text{CM} = 2\,(100 - \alpha) = 200 - 2\alpha$.

Telle serait la petite formule qu'il faudrait employer dans chaque cas ; mais il est facile d'inscrire immédiatement la lecture convenable ; en effet, si dans l'hypothèse de départ, les graduations sont marquées 0, 10, 20 . les angles observés correspondants devront être 200, 200 — 20, 200 — 40... ou 200, 180, 160, etc.; il suffira donc de faire ces inscriptions au lieu des précédentes.

Cet instrument donne encore lieu aux mêmes vérifications que les précédents ; mais nous dirons, comme pour le sextant graphique, que celle de la perpendicularité du miroir et du plan du limbe, peut être omise sans grand inconvénient. Quant à celle du point de départ des graduations, elle ne peut se faire qu'en comparant un angle lu, avec la valeur de ce même angle obtenue par un autre procédé ; ou bien en traçant un alignement de trois points et se transportant au point intermédiaire, qui devra donner 200^g pour l'angle formé par les deux points extrêmes.

Réduction à l'horizon. — Les instruments que nous avons passés en revue donnent les angles dans le plan des objets. Si on désire les avoir sans calcul réduits à l'horizon, comme cela est nécessaire pour les opérations topographiques, il faudra opérer approximativement de la manière suivante.

On mettra le limbe horizontal à l'œil, et on amènera les deux miroirs, alors verticaux, dans la position qui fait confondre les images non plus des deux points, mais des verticales de ces points; pour juger qu'il en est ainsi, il est nécessaire qu'une ligne perpendiculaire au plan du limbe ait été tracée sur un des miroirs dans ceux de ces instruments qui ne sont pas munis de lunette, et dans le cas contraire, qu'un fil ait été tendu dans la même direction au foyer de l'objectif.

CHAPITRE VII

ARPENTAGE. — CADASTRE.

25. Les *opérations cadastrales* sur lesquelles repose l'établissement de l'impôt foncier doivent être faites avec une grande rigueur : aussi les exécute-t-on à une échelle beaucoup plus grande que celles qu'on emploie dans la topographie ordinaire.

Le canevas est habituellement fait avec l'emploi du théodolite, qui donne la mesure des angles plus exactement qu'on ne les obtient graphiquement par l'usage de la planchette et de l'alidade; les résultats sont ensuite transformés en coordonnées par le calcul. Cette manière d'opérer est celle usitée en géodésie : seulement on n'a pas besoin de lui donner toute la rigueur que comporte cette dernière science, par suite de l'étendue restreinte des surfaces triangulées qui ne doivent pas être reliées entre elles.

Les procédés employés ensuite sont ceux que nous avons exposés, les instruments sont les mêmes que ceux que nous avons décrits; mais là où s'arrête la topographie, le cadastre a encore quelque chose à faire, il faut qu'il détermine exactement des détails peu importants au point de vue de la description du pays,

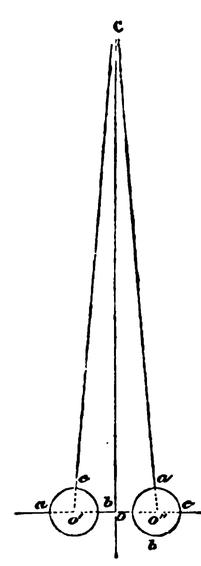
mais importants à celui du cadastre ; il doit préciser chaque parcelle de terre de manière à pouvoir en calculer exactement la surface, et pour cela il a dû préciser avec la même exactitude toutes les sinuosités de chemins, de rivières, etc., sur lesquelles s'appuient ces parcelles, et il y a lieu pour lui de faire de l'*arpentage*.

Le graphomètre, ou mieux la boussole et l'alidade aidée du déclinatoire, peuvent encore être d'un grand secours dans ces opérations de détails minutieux, mais il est souvent utile de leur substituer plus ou moins l'usage de la chaîne, d'alignements ou d'instruments dont la grande simplicité peut fournir une grande rigueur.

26. **Levés au goniographe et à la chaîne, ou à la chaîne seulement.** — Ces levés ne sont évidemment applicables pratiquement qu'aux détails de très-petites surfaces. Dans ce cas ils rentrent dans la méthode du cheminement qui a déjà été exposée. Cette méthode est complétée par l'emploi d'un grand nombre de théorèmes enseignés dans la géométrie plane élémentaire. Le rappel de ces théorèmes, familiers du reste à tous ceux qui ont quelques connaissances mathématiques, nous conduirait trop loin : aussi renvoyons-nous ceux de nos lecteurs qui voudraient s'occuper d'arpentage, aux livres spéciaux qui traitent de cette matière. Cependant nous donnerons quelques détails sur une modification apportée à la méthode ordinaire du cheminement par l'emploi d'un instrument particulier, l'équerre d'arpenteur.

27. **Équerre d'arpenteur.**—Par suite de son extrême simplicité, cet instrument peut donner des résultats exacts, qui le seraient encore bien plus si le mode de pointé n'y était pas aussi défectueux ; mais son emploi, qui exige beaucoup de temps, le secours incessant qu'elle réclame de la chaîne, ne le rendent propre qu'au levé de très-petites surfaces, c'est-à dire à l'arpentage. L'équerre est ordinairement un cylindre en cuivre de $0^m,08$ à $0^m,1$ de diamètre, dans lequel sont pratiquées quatre fentes verticales ou pinnules déterminées par deux diamètres rectangulaires. Cet instrument peut également se composer d'un cercle de cuivre auquel sont fixées quatre pinnules perpendiculaires à son plan, et placées comme les précédentes dans deux directions formant angle droit.

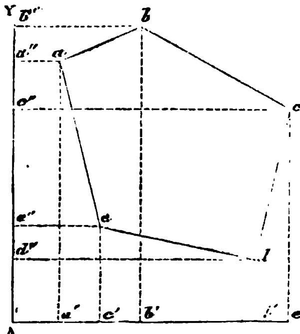
L'équerre se place sur un pied à trois branches ou sur un bâton ferré. On voit facilement que si l'on dirige l'une des alidades suivant un certain alignement, l'autre en déterminera un second perpendiculaire au premier. La seule vérification à laquelle on doit soumettre cet instrument consiste à s'assurer que les deux directions se coupent à angle droit. Pour cela, on vise à travers deux pinnules un objet éloigné et un second par les deux autres, puis l'on fait tourner l'instrument jusqu'à ce qu'on aperçoive le premier objet avec les secondes pinnules, et réciproquement. Si la coïncidence a lieu, l'équerre est juste. La plupart des équerres ne sont pas rectifiables ; néanmoins on peut encore résoudre plusieurs problèmes intéressants avec une fausse équerre comme avec une qui est juste. On peut, par exemple, mener par un point extérieur une perpendiculaire à une droite, car on trouvera O', par un premier coup d'équerre; et faisant ensuite venir l'alidade OC sur l'alignement AB, on marchera sur cet alignement jusqu'à ce que l'autre O*b* soit dans la direction de C : on divise en deux parties égales la distance du point O″ où l'on se trouve, à la première station O', et le point milieu O est le pied de la perpendiculaire abaissée de C sur AB.



Si la perpendiculaire devait être élevée en un point déterminé de la direction elle-même, on opérerait en ce point, en dirigeant successivement l'une et l'autre pinnule suivant la base : ces deux opérations auraient déterminé la position de deux jalons que l'on aurait eu soin de placer à même distance de l'instrument, au bout de la chaîne tendue si l'on veut. Le point milieu de la droite qui unit les deux jalons appartient à la perpendiculaire cherchée.

Pour lever un polygone, on détermine les coordonnées de ses sommets en les rapportant à deux axes rectangulaires. On prend une base AX, on marche dessus en mettant une des alidades dans sa direction jusqu'à ce que l'on arrive en *a'* où l'on aperçoit un point *a* dans la seconde alidade. On opère de même pour les autres points *b*, *c*, *d*, *e*, et l'on porte sur le papier les longueurs

Aa', Ae', Ab', mesurées directement et réduites à l'échelle. On prend un second axe AY sur lequel on effectue des opérations analogues aux précédentes, et les intersections des perpendiculaires à cet axe aa'', bb'', cc'', etc., avec celles que l'on a élevées en a', b', c', etc., déterminent les projections de tous les sommets du polygone.



On voit facilement quelle lenteur aura ce mode d'opérer, si on observe combien il faudra de tâtonnements avant de trouver les pieds a' c'... des perpendiculaires abaissées sur les deux axes des coordonnées.

Si les deux couples de pinnules n'étaient pas rectangulaires, il faudrait que les axes fissent le même angle qu'elles, et avoir soin, en opérant, de diriger toujours l'équerre de la même manière.

Il existe des équerres dont l'angle n'est pas constant : elles se composent de deux cylindres creux s'emboîtant comme les deux parties d'une tabatière. L'un porte une alidade et un index; l'autre une alidade et une division circulaire. Cet instrument ne peut être d'une très-grande précision, en raison de son petit diamètre, et il devient un graphomètre entraînant avec lui les inconvénients de celui-ci.

On peut encore, pour lever le plan d'une figure quelconque, agir ainsi qu'il suit : on mène dans l'intérieur, et dans le sens de la plus grande dimension, une droite que l'on nomme base ou directrice. De tous les angles du périmètre, on abaisse sur cette base des perpendiculaires que l'on mesure, ainsi que les segments qu'elles déterminent sur cette base.

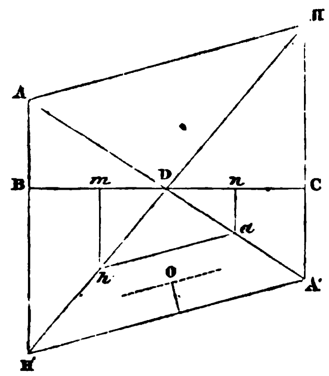
On peut se servir immédiatement du rapporteur sur le terrain pour construire les perpendiculaires.

Si l'intérieur du polygone est inaccessible, on emploie la première méthode indiquée, ou, en supposant que la figure soit curviligne, on lui circonscrit un quadrilatère ou tel polygone qui lui convient le mieux, et, de tous les principaux points du contour, on abaisse des perpendiculaires sur chacun des côtés pris successivement pour directrices.

28. Nous allons passer encore en revue quelques-uns des problèmes susceptibles d'être résolus avec l'équerre.

1° Par un point C mener une parallèle à une droite AB accessible. On cherche sur la ligne donnée le pied A de la perpendiculaire passant par C où l'on se transporte ensuite : on y dirige l'une des alidades de l'instrument suivant CA, et l'autre détermine la direction de la parallèle demandée.

2° Mesurer la distance à laquelle on se trouve d'un point A inaccessible. Si l'on est placé en B, on mesure une base BC perpendiculaire à AB, et dont on marque le point milieu D ; en C, on élève une perpendiculaire indéfinie AC à la base et on la jalonne ; on jalonne de même l'alignement AD prolongé, et le point de rencontre A′ détermine la solution du problème, car les deux triangles ABD, A′CD sont égaux puisque, rectangles tous deux en B et C, ils ont les angles en D égaux comme opposés par le sommet et les côtés BD, CD égaux par construction : donc A′C est égal à la distance cherchée AB.

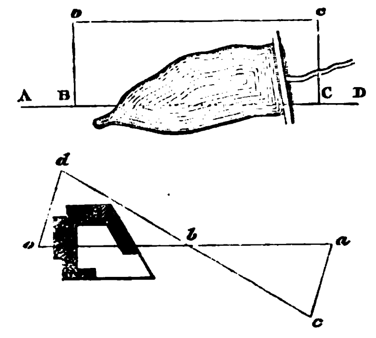


3° Mesurer la distance de A à H, tous deux inaccessibles, et par un point O donné, mener une parallèle à AH. On prend une base BC sur laquelle on cherche les pieds B et C des perpendiculaires abaissées de A et de H, puis on mesure la longueur de BC et l'on en marque le milieu D. Le terrain sur lequel on a tracé BC a été choisi tel que l'on puisse opérer avec précision. On prolonge, au moyen de jalons, les directions DA, DH jusqu'à la rencontre en A′ et H′ des perpendiculaires HC, AB aussi prolongées. Les deux triangles ABD, ADC, comme nous venons de le voir plus haut, sont égaux, puisqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux. La distance de A à B est donc connue ; elle est égale à A′C. La comparaison des triangles CDH, BDH′ donne également CH = BH′. Il en résulte que la figure AHA′H′ est un parallélogramme, que A′H′ est égal et parallèle à AH, et qu'ainsi la longueur AH demandée est connue. Pour mener enfin par O une parallèle à AH, cela revient

à tracer une parallèle à la droite accessible A'H' par le procédé indiqué au premier problème.

Si le terrain en arrière de la base n'était pas assez vaste pour opérer ainsi, on prendrait $Dn = \frac{1}{2}$ DC et $Dm = \frac{1}{2}$ BD ou DC : on élèverait par *m* et *n* deux perpendiculaires jusqu'à la rencontre des prolongements de AD et DH, et l'on arriverait à $ah = \frac{1}{2}$ AH.

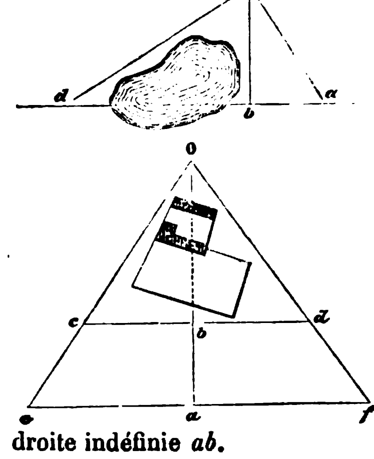
4° Prolonger avec l'équerre une ligne AB au delà d'un obstacle. On mène B*b* perpendiculaire sur AB ; *bc* perpendiculaire sur B*b* ; C*c* = B*b* perpendiculaire sur *bc*, et enfin CD perpendiculaire sur C*c*.



Suivant la position de l'obstacle, on pourra encore résoudre ainsi le problème. Par *b* on mène *cd* quelconque ; on choisit *d* de manière que *do* perpendiculaire à *cd* dépasse l'obstacle : on prend *bc* = *bd*. En *c* on élève la perpendiculaire *ca* que l'on mesure, puis faisant *do* = *ca*, on a le point *o* qui appartient au prolongement de *ab*.

Si l'on veut encore, on trace *bc* et *dc* perpendiculaires à *ab* et *ac*. Les deux triangles rectangles *abc*, *acd* étant semblables parce qu'ils ont un angle et un côté communs, fournissent la proportion *ab*:*bc*::*ac*:*cd*, de laquelle on tire, pour avoir la position de *d*,

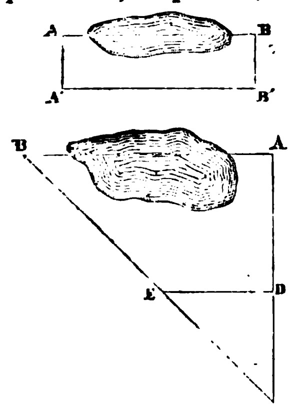
$$cd = \frac{ac \times bc}{ab}$$



Enfin, par *a* et *b* on mène *cd* et *ef* perpendiculairement à *ab* : on prend *cb* = *bd*, *ae* = *af* et les alignements *ec*, *df* prolongés donnent, par leur rencontre, un point O appartenant à la droite indéfinie *ab*.

5° Mesurer une ligne accessible à ses deux extrémités seulement. On construit le rectangle ABA'B', et l'on mesure A'B'. On

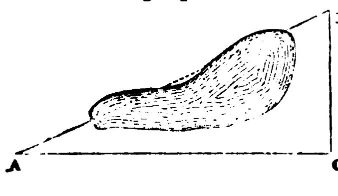
peut aussi, au point A, élever AC perpendiculaire à AB; mesurer AC; par un point D de cette ligne, mener une parallèle à AB jusqu'à la rencontre en E de CD : on mesure DC ainsi que DE, et l'on a $AB = \frac{AC.DE}{CD}$. On peut encore par A mener une droite quelconque AC que l'on prolonge jusqu'à ce que l'on atteigne le pied de BC perpendiculaire à AC, et l'on conclut



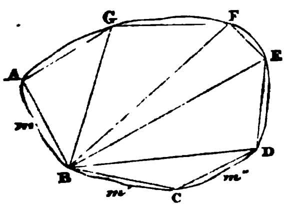
$$AB = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2}$$

ou enfin, si l'obstacle ne permettait pas de construire la figure précédente, on tracerait AA' puis A'C' perpendiculaire à AA' et BC' perpendiculaire à AC' : il viendrait alors

$$AB = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} =$$
$$= \sqrt{\overline{A'C}^2 + \overline{(BC' - AA')}^2}$$



6° S'il s'agit d'évaluer la surface d'un levé renfermé dans une courbe quelconque, rien n'est plus facile quand le périmètre est un polygone régulier. La géométrie fournit les méthodes à employer en pareilles circonstances. Si le contour est une figure irrégulière, le procédé consiste à inscrire, si l'intérieur est accessible, un polygone dont les côtés s'écartent le moins possible de la courbe, puis à décomposer la surface totale en triangles que l'on évalue partiellement au moyen de la formule $S = \frac{1}{2}$ BH, et que l'on peut vérifier par cette autre

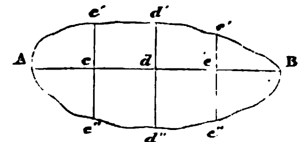


$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

p représentant la demi-somme des côtés.

Il ne reste plus alors à évaluer que les portions AmB, Bm'C, Cm''D, etc. Voici comment on procède : soit une surface terminée

par la courbe irrégulière $Ac'd'e'Be''d''c''$, on trace la droite AB suivant la plus grande longueur de la figure : on la partage en parties égales Ac,cd,de,eB, assez petites pour que l'on puisse regarder comme des lignes droites les portions de courbes comprises entre les perpendiculaires élevées par les points c, d, e. Ne considérons que la partie supérieure à AB puisque nous opérerions de la même manière à l'égard de l'autre. Nous voyons qu'elle est décomposée en une suite de trapèzes compris entre deux triangles. Désignons cc' par h, dd' par h', ee' par h' et faisons $Ac = cd = de = Be = b$; nous aurons, en représentant par S la surface totale et par s, s', s'', etc., les surfaces partielles.



$$s = \tfrac{1}{2}bh\,;\; s' = \tfrac{1}{2}b(h + h'),\; s'' = \tfrac{1}{2}b(h' + h'')\,;\; s''' = \tfrac{1}{2}bh''$$

d'où

$$S = \tfrac{1}{2}[b\,h + (h + h') + (h' + h'') + h''] = b(h + h' + h'')$$

Telle serait aussi la marche à suivre si l'intérieur de la courbe était inaccessible, comme seraient un étang, un bois, etc., car alors on circonscrirait un polygone. On en calculerait la surface, de laquelle on retrancherait celles des intervalles compris entre la courbe et les côtés du polygone. Nous voyons encore que si, dans le cas précédent, nous calculons la surface au-dessous de AB, comme nous l'avons fait pour celle qui est au-dessus, cela indique un moyen que l'on peut encore employer directement pour trouver l'aire d'une figure sans y inscrire de polygone.

NIVELLEMENT RÉGULIER.

28. Principes fondamentaux du nivellement. — Après avoir parlé de tout ce qui concerne la projection horizontale des points, il nous reste à indiquer le moyen de trouver leurs ordonnées verticales ou cotes. Tel est le but du nivellement. Les plus grandes opérations qui y sont relatives n'exigeant heureusement pas qu'on ait égard à la figure exacte de la terre, nous la considérerons comme une sphère de 40 millions de mètres de circonférence, et d'un rayon égal à 6,366,198ᵐ.

On nomme surface ou ligne de niveau toute surface ou ligne parallèle à la surface des eaux de la mer. Ainsi, deux points sont dits de niveau lorsqu'ils appartiennent à la même surface horizontale. S'il en est autrement, il existe entre ces deux points une *différence de niveau*, et c'est dans l'évaluation de cette différence que consistent la théorie et la pratique du nivellement.

Tous les instruments qu'il emploie sont fondés sur l'un des trois principes suivants :

1° Horizontalité d'une surface liquide en repos, dont chaque élément, normal à la verticale, donne sensiblement la direction du plan tangent horizontal au point où cette surface peu étendue est en station ;

2° Verticalité constante du fil à plomb ;

3° Différence de pesanteur des liquides ou d'un gaz et d'un liquide, dont le plus léger s'élève davantage.

Le troisième principe est le plus souvent employé. Il donne naissance au niveau à bulle d'air, élément essentiel de tous les instruments de nivellement présentant une grande exactitude. Quand un corps fermé contient un liquide et une bulle de gaz, en vertu des lois de la gravitation, cette bulle occupe la position la plus élevée, et son milieu est au point de tangence horizontale, si la section du corps est un arc de cercle.

Dans le cas où cette section ne serait pas un tel arc, le point de tangence horizontale ne correspondrait plus au milieu de la bulle, mais peu importerait, car on ne se sert pas de cette horizontale elle-même, s'il n'y avait lieu de tenir compte de l'effet de la dilatation. On n'en serait pas moins assuré *que la bulle étant dans la position même qu'elle occupait lors d'une première expérience, le niveau à bulle et toute la partie de l'instrument fixée après lui seront matériellement placés de la même manière par rapport à la verticale.*

Rien ne semblerait devoir empêcher le remplacement de la bulle d'air par une bulle d'un liquide plus léger que le premier; mais la température variant, les liquides, en se condensant, laisseraient apparaître une petite bulle de vapeur, et en se dilatant, ils feraient éclater l'enveloppe, qui doit être de verre, pour qu'on puisse juger si la bulle occupe la position qu'on lui a assignée lors du règlement préalable qu'exige tout instrument muni d'un tel niveau à bulle. Il faut donc que l'intérieur du tube renferme un seul liquide et une bulle d'air ou un vide promptement occupé par de la vapeur d'une tension variable avec la température. De cette sorte, le seul effet produit par la variation de cette tempé-

rature sera une augmentation ou une diminution de l'espace occupé par la bulle. Mais alors, si la section du niveau était quelconque, il faudrait que la surface du verre portât une série de divisions indiquant les positions occupées par la bulle, dans ses différents états de grandeur. Pour éviter cet inconvénient, il suffit que la section longitudinale devienne circulaire, car alors, pour que l'instrument se trouve placé par rapport à la verticale, de la même manière que dans l'expérience de vérification, il suffira que la bulle occupe la même place, ou qu'ayant augmenté ou diminué de volume par l'effet de la chaleur, ses extrémités aient marché en sens inverses, de longueurs égales facilement estimées au moyen de divisions égales marquées sur le verre. Pour vérifier la forme circulaire du tube, on pourrait le soumettre à diverses températures, en le laissant dans une position fixe, et voir si la bulle parcourt des divisions symétriques.

Nous avons dit que les instruments les plus exacts étaient fondés sur l'emploi du niveau à bulle d'air. Il faut pourtant mentionner une exception provenant d'une cause d'erreur très-petite, il est vrai, insignifiante pour la topographie, mais qu'il est utile de faire disparaître, quand cela est possible, pour les opérations qui exigent une très-grande précision.

Lorsqu'on cale le niveau à bulle, c'est-à-dire lorsqu'on cherche à l'amener dans la position adoptée, la bulle tend à prendre la position répondant à la tangence horizontale, mais cela en vertu d'une force extrêmement petite, lorsqu'elle arrive près de cette position. D'un autre côté, son mouvement est retardé par le frottement de tout le liquide contre les parois, et l'équilibre peut s'établir entre ces deux forces contraires un peu avant que l'une d'elles, celle qui détermine l'ascension, soit nulle, c'est-à-dire avant que la bulle soit arrivée à la position convenable. Pour obvier à cette cause d'erreur, on établit maintenant des instruments fixes, destinés aux observations astronomiques et ne pouvant servir que dans des circonstances toutes particulières, dans lesquels on invoque le premier principe, celui de l'horizontalité d'un liquide en repos. Sans entrer dans de longs détails à ce sujet, nous dirons seulement qu'il suffit de diriger l'axe optique d'une lunette sur une telle surface horizontale, et qu'on sera assuré de la verticalité de cet axe optique, lorsqu'on verra le réticule et son image superposés.

Le nivellement peut être *continu* ou *topographique*. Le premier, qui n'emploie que des horizontales et n'exige pas la connaissance

des bases, est très-exact, mais d'une exécution très-longue. Le second, qui repose sur la connaissance des bases et des angles de pente, est moins exact, mais beaucoup plus expéditif.

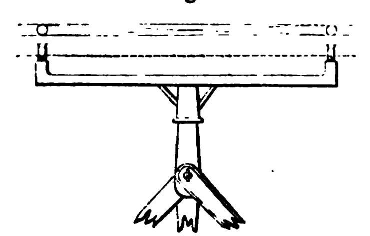
CHAPITRE VIII

NIVELLEMENT CONTINU

29. Le nivellement *continu* doit être employé toutes les fois que les résultats qu'on a en vue d'obtenir sont destinés à un emploi direct, comme dans le tracé des routes, chemins de fer, canaux, projets de fortifications, etc. Le nivellement topographique, fait à grands traits et s'étendant sur une grande surface, peut être consulté avec fruit pour l'établissement d'un premier projet, mais il doit être complété par un nivellement continu exécuté sur la portion du terrain que son inspection préalable a fait choisir.

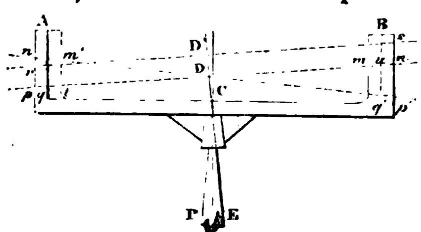
Les instruments qui donnent l'horizontale dont l'emploi est la source du genre de nivellement qui nous occupe actuellement, sont de quatre types différents, offrant des chances d'exactitudes différentes.

30. Niveau d'eau. — Cet instrument est fondé sur le premier des trois principes énoncés au § 28. Il est composé d'un tube cylindrique de ferblanc ou de cuivre, recourbé aux deux extrémités à angles droits sur la première direction. Deux fioles en verre, d'égal diamètre, bien jointes au tube, s'y engagent de part et d'autre. Une douille faisant corps avec l'instrument et soudée au milieu du cylindre, sert à le fixer sur un pied à trois branches, en lui laissant le jeu nécessaire pour faire un tour d'horizon. On verse l'eau par l'une des ouvertures, jusqu'à ce qu'elle monte dans les deux fioles, aux $\frac{3}{4}$ environ de leur hau-



teur. Lorsque le liquide, après sa chute dans le tube, est entièrement calmé, les plans qui le terminent dans l'une et l'autre fiole appartiennent à une même surface de niveau, en vertu d'une propriété connue des liquides. Si l'on imagine une tangente commune aux intersections de ces surfaces avec le verre, ce que l'on peut faire de quatre manières différentes, on aura la direction de la ligne de niveau. Il est d'autant plus facile de juger la position de cette tangente, que les petites surfaces sont terminées, en vertu de la capillarité, par une espèce d'onglet qui paraît noir. Pour agir avec plus de précision, on se met, pour viser, le plus loin possible de l'instrument.

Nous avons dit que les fioles étaient de même diamètre : si cette condition n'était pas sensiblement satisfaite, les opérations seraient défectueuses, puisque la ligne de niveau varierait pour chaque position que prendrait l'instrument en faisant un tour d'horizon. En effet, supposons que, dans une position première, la ligne de niveau soit *pn*, les deux fioles étant de diamètres différents, l'une double de l'autre par exemple : si l'axe de rotation, était parfaitement vertical, et le tube exactement horizontal, le mouvement de rotation que l'on imprimerait autour de DP n'apporterait aucune modification, mais ces conditions ne sont jamais entièrement remplies. Il en résulte qu'en faisant tourner de 200^g, la petite fiole qui était en A viendra en B. Admettons, pour faciliter l'explication de ce qui se passe, que le déplacement du liquide ne se fasse pas d'une manière continue pendant que l'on tourne l'instrument, ou, si l'on veut, qu'il soit congelé pour un moment. La surface *mn* prendra la position *m'n'* et *pq* deviendra *p'q'*, de telle manière que *pn'* = *p'n*. Rendons actuellement à l'eau sa fluidité : le poids du cylindre *m'n'pt* pesant sur le reste du liquide, tendra à l'élever dans le petit tube : il sera d'abord employé en partie à remplir la partie cylindrique vide *p'q'nu*, mais nous avons supposé l'un des cylindres d'une base double de l'autre, et comme les hauteurs *p'n*, *pn'* sont égales, il s'ensuit qu'il restera encore la moitié du liquide qui occupe *ptm'n'*. Il se partagera entre les deux fioles pour rétablir l'équilibre et élèvera ainsi en *rs*, l'horizontale primitive *pn*.

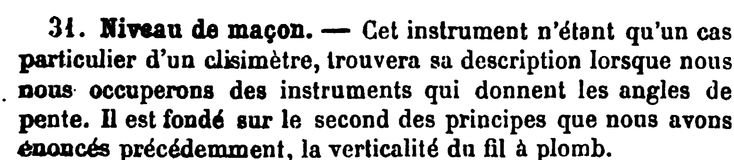


Quand on reste longtemps en station au même point, on a égard à l'évaporation, surtout si le soleil frappe sur l'instrument, ou à l'augmentation du liquide s'il pleut : car alors la hauteur de la surface de l'eau varierait. Ordinairement, pour obvier à ces inconvénients, les deux fioles sont recouvertes de tuyaux métalliques fermés par un bout, que l'on retire quand il est nécessaire. Ils ont encore pour but d'empêcher le liquide de se répandre dans les mouvements de translation. Si l'on opère dans l'hiver, on peut se servir d'alcool au lieu d'eau pour éviter la congélation.

L'effet de la capillarité étant d'élever le liquide le long des parois des fioles, et les lignes de visées étant déterminées par les courbes de contact avec le verre, des ménisques formés par le liquide, il faut que les deux élévations de ces ménisques soient les mêmes ; ceci exige que les diamètres des fioles soient égaux, condition déjà exigée du reste pour que les différentes horizontales soient les mêmes lorsqu'on vise dans des directions différentes.

Le pointé, dans l'usage du niveau d'eau, étant très-défectueux (voir la fin de l'*Optique*), cet instrument n'est plus guère employé dans les opérations qui exigent une certaine exactitude.

Modification du général Morin. — Pour tracer une horizontale avec le niveau d'eau, il faut que cette ligne ne soit interceptée par aucun obstacle qui arrête la vue ; on peut souvent tourner l'obstacle, mais la modification due au général Morin permet d'agir directement quand les deux points à niveler sont très-rapprochés, lorsque, par exemple, ils ne sont séparés que par un mur.



Un tube flexible t, en caoutchouc vulcanisé, relie deux fioles de verre f, f' ; on fait passer le tube par-dessous l'obstacle, ou latéralement à celui-ci, après l'avoir rempli d'eau ; les deux surfaces libres détermineront chacune des éléments a et a' appartenant à la même horizontale.

31. Niveau de maçon. — Cet instrument n'étant qu'un cas particulier d'un clisimètre, trouvera sa description lorsque nous nous occuperons des instruments qui donnent les angles de pente. Il est fondé sur le second des principes que nous avons énoncés précédemment, la verticalité du fil à plomb.

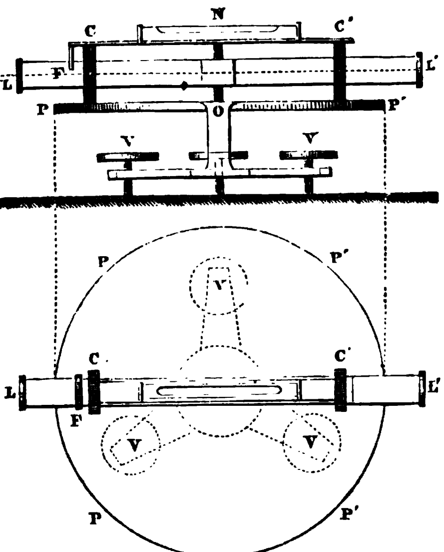
Les deux instruments qui nous restent à étudier, le niveau *à plateau* et celui de *Chézy* sont deux types différents, auxquels les

constructeurs peuvent apporter de légères modifications de détails qui n'en changent pas la nature. Nous adopterons pour chacun d'eux un mode de construction particulier, en prévenant le lecteur que de légères modifications devront être apportées par lui dans l'opération du règlement, s'il est appelé à se servir d'un de ces instruments modifié.

Ils sont fondés tous deux sur l'emploi du niveau à bulle d'air, qui est l'élément essentiel de leur construction, et ils sont les seuls qui puissent être employés dans l'exécution d'un nivellement très-exact; leur avantage tient surtout à l'emploi d'une lunette qui, par suite de différentes circonstances expliquées au chapitre 7 du Livre VII, permet un pointé beaucoup plus précis que celui qu'on obtient sans son secours.

32. **Niveau à plateau.** — Il se compose d'un plateau circulaire PP′ et d'une lunette qui, pivotant sur le centre du plateau, s'appuie constamment sur lui; si, par un procédé quelconque, on a rendu le limbe horizontal et si l'axe optique de la lunette lui est parallèle, celui-ci décrira un *plan horizontal*.

Pour arriver à ce résultat on construit l'instrument de la manière suivante : le plateau PP′ est supporté par une colonne terminée à sa partie inférieure par un pied à trois branches dans lesquelles se meuvent trois vis V destinées à faire varier la position du limbe, vis qui posent sur une planchette en bois épais montée sur un fort trépied. La lunette LL′ passe dans deux collets rectangulaires CC′, de mêmes dimensions, qui peuvent glisser sur le plateau, et elle porte à son milieu deux petits tourillons, dont l'un s'engage dans le centre évidé O du limbe, et dont l'autre, qui se trouve alors à la partie supérieure, pénètre,



sans toucher aux parois, dans une entaille faite à la base d'un niveau à bulle d'air N, base qui repose, par ses extrémités, sur les faces supérieures des deux collets de la lunette ; ces tourillons ont pour but d'empêcher les glissements longitudinaux de celle-ci. Enfin, une fourche F fixée au niveau et emboîtant l'enveloppe de la lunette, empêche les chutes accidentelles de ce niveau.

Supposons que le plateau soit parallèle au niveau, ce qui veut dire, une fois pour toutes, qu'il soit parallèle à la tangente menée par le milieu de la position adoptée pour la bulle quand elle est dite *dans ses repères*, laquelle tangente est forcément horizontale.

Si cette condition est remplie, il suffira que le niveau soit calé dans deux positions différentes, pour que le plateau renfermant deux horizontales soit lui-même horizontal.

Pour caler le niveau dans les deux positions nécessaires, on se sert des vis du pied qui, par une série de tâtonnements, permettent d'atteindre ce but.

Supposons encore que l'axe optique de la lunette ou ligne de visée soit parallèle au plateau, et par suite horizontale si la première condition est remplie.

Il suffira alors de faire glisser circulairement la lunette sur le plan du limbe, et tous les points de la nature dont les images seront à la croisée des fils, appartiendront au même plan horizontal.

Vérifications. — Les deux suppositions que nous avons faites ont besoin d'être vérifiées.

1° La tangente au niveau doit être parallèle au plateau, ou, ce qui revient au même, à sa projection sur celui-ci.

Les collets ont été supposés égaux, il suffira donc de mettre le plan de leurs faces supérieures parallèle au niveau ; pour cela, on calera celui-ci dans une position quelconque, au moyen des vis du pied, puis on l'enlèvera, et le retournant bout pour bout, on le remettra sur les collets ; il devra se retrouver calé, si la ligne des collets, qui est restée fixe dans cette opération, était parallèle au niveau dans la première position, autrement dit si cette ligne était horizontale.

Si le niveau s'est décalé, cette condition n'était pas remplie ; on y satisfait alors en réglant en même temps les deux bras du niveau, c'est-à-dire en les rendant égaux, par un nouveau calage

du niveau exécuté moitié au moyen des vis du pied, moitié au moyen d'un mouvement particulier du niveau que n'indique pas la figure, et qui change la position de l'enveloppe de verre, par rapport à son armature métallique. Cette opération exige plusieurs tâtonnements.

2° L'axe optique de la lunette doit également être parallèle au plan du limbe. On s'en assure en visant un point de la campagne, le plan du limbe étant quelconque ; puis, retournant la lunette de 200ᵍ autour de son axe, on doit retrouver le même pointé par le seul mouvement de glissement sur le plan, si la ligne de visée est parallèle à l'axe de figure formé par les surfaces des collets ; s'il n'en est pas ainsi, on recherche ce pointé, moitié par les vis du pied, moitié par un mouvement particulier au réticule, mouvement qui change la position de celui-ci par rapport à l'enveloppe de la lunette. On n'arrive encore à établir cette correction que par des tâtonnements.

Quand on y a satisfait, l'axe optique parallèle à l'axe de figure se trouve parallèle aux plans formés par les faces de ceux-ci, si les collets sont rigoureusement égaux, et par suite il est parallèle au plan du limbe sur lequel ils posent pendant les opérations.

3° Le constructeur a dû faire les collets égaux ; mais les deux vérifications précédentes reposent sur cette hypothèse d'égalité ; il est bon de s'assurer de son existence. On arriverait de suite à ce résultat si, ayant fait la première vérification, on pouvait, laissant le limbe parfaitement fixe, alterner les deux collets et s'assurer que le niveau remis en place reste calé ; mais cette mobilité des collets pourrait nuire à la régularité de la construction.

Il est plus simple d'opérer de la manière suivante. La première opération a mis horizontal le plan des faces supérieures des collets, et la partie correspondante du plateau n'est elle-même horizontale qu'autant que la condition qui nous occupe est satisfaite. Après avoir fait l'opération de retournement du niveau bout pour bout sur les collets, on répète une opération analogue au moyen d'un retournement de 200ᵍ de l'ensemble de la lunette et du niveau, sur le plateau resté fixe, retournement qu'on reconnaîtra exactement effectué au moyen d'un trait au crayon marqué sur le limbe. Si le niveau se trouve décalé, cela voudra dire que sa projection sur le limbe n'est pas horizontale, et que les deux distances qui séparent cette projection de la tangente au milieu de

la bulle, quand celle-ci est dans ses repères, ne sont pas égales; mais ces distances totales se composant des distances du niveau aux faces supérieures des collets et des hauteurs de ceux-ci, et les deux premières ayant été reconnues égales par la première vérification, il faut que les deux secondes ne le soient pas.

Lorsque cette circonstance se présente, il faut faire retoucher aux collets par le constructeur ou essayer soi-même d'en rétablir l'égalité en usant légèrement l'un d'eux avec un papier de verre.

Observations doubles. — Dans les observations qui demandent une excessive rigueur, il est bon de se mettre à l'abri des erreurs qui peuvent provenir d'un défaut d'exactitude rigoureuse apportée dans l'exécution des vérifications.

On arrive à ce résultat en opérant comme il vient d'être dit, après les vérifications faites; puis on fait une seconde opération comme si on voulait simultanément exécuter celles-ci, c'est-à-dire qu'on revise, dans le même vertical, après avoir retourné la lunette sur elle-même autour de son axe optique, et le niveau bout pour bout. Si les erreurs que les vérifications ont eu pour but de faire disparaître, n'existent pas, les deux résultats sont identiques, c'est-à-dire qu'on retrouve le même pointé sur l'axe optique de la lunette; si au contraire elles existent, elles agissent en sens inverse du sens qu'elles affectaient en premier lieu, et la moyenne des deux visées obtenues, en recalant le niveau par les vis du pied, indique le point qui est sur l'horizontale qui passe par la position moyenne de celles qu'a occupée successivement l'axe optique de la lunette.

Modification. — On construit des niveaux dans lesquels le plateau est supprimé, et qui permettent de faire décrire un plan horizontal à l'axe optique de la lunette, qui pivote autour d'un axe vertical supporté par un pied à trois branches et à vis calantes. Un niveau à bulle, placé sur l'enveloppe de la lunette, sert à mettre la colonne verticale, au moyen des vis du pied et d'un léger mouvement propre de la lunette, destiné à faire varier l'angle qu'elle forme avec la colonne. La marche de l'opération sera indiquée Livre II, Chapitre III, qui décrit les instruments répétiteurs propres à la mesure des angles.

Pour que l'axe optique décrive un plan horizontal dans son mouvement autour de la colonne, il faut et il suffit qu'il ait été mis une fois horizontal; le niveau dont nous avons parlé, re-

tourné bout pour bout, sert à s'assurer du parallélisme de l'enveloppe de la lunette supposée cylindrique et de la tangente au niveau, parallélisme qu'on obtient par tâtonnements au moyen des vis du pied et d'un petit mouvement particulier du niveau.

On s'assure ensuite que l'axe optique est l'axe de la figure, par un retournement de la lunette exécuté autour de cet axe, en visant un point de la campagne que la croisée des fils doit toujours couvrir; s'il y a lieu de le faire, on corrige, par moitié, au moyen des vis du pied et au moyen du mouvement particulier du réticule.

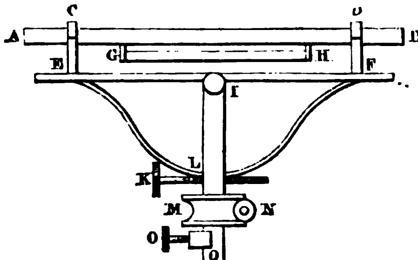
On s'assure ainsi que la ligne de visée est parallèle à la tangente au niveau, et lorsque, par le moyen qui a été indiqué sommairement en commençant, on aura mis la colonne verticale, et établi, en même temps, horizontale la tangente aux repères du niveau, on saura que l'axe optique de la lunette peut décrire un plan horizontal.

Cette verticalité de la colonne ne sera probablement pas rigoureuse, en sorte que le niveau ne restera pas exactement calé pendant la rotation; on obviera chaque fois à ce défaut, en recalant ce niveau au moyen des vis du pied.

Le premier des instruments que nous venons d'étudier nous semble plus simple de construction, et nous pensons qu'il doit donner de meilleurs résultats.

On augmente évidemment son exactitude en se servant d'un niveau à bulle très-sensible, c'est-à-dire ayant une section très-peu courbée, en augmentant ses dimensions, et surtout celui de la lunette; mais malheureusement on augmente aussi son poids et la difficulté de son transport.

33. **Niveau à bulle d'air de Chézy.** — Cet instrument, qui ne donne que la ligne horizontale, se compose d'une lunette AB, emboîtée dans deux collets C et D dont elle peut sortir, et qui sont supportés par deux montants égaux CE, DF; ceux-ci reposent sur une règle EF. Dessous la lunette est adapté un niveau à bulle d'air dont la position peut être modifiée au moyen



d'un mécanisme placé en H et d'une articulation G. Tout ce premier système pivote sur le point I appartenant à la tige IP. Cette tige est composée : 1° de la partie IL, formée de deux plaques parallèles qui laissent entre elles un passage à la courbe métallique ELF adhérente au premier système. Le mouvement prompt dans ce sens se fait avec la main, et le mouvement doux avec une vis de rappel K tangente à la courbe en L ; 2° du tambour cylindrique MN évidé en gorge, et dans lequel s'engrène une seconde vis tangente N; 3° de la partie conique PQ, qui s'enfonce dans le pied, et qui jouit de la faculté de tourner avec tout l'appareil. Pour se servir de cet instrument, on rend la surface supérieure du tambour MN horizontale à vue, le mieux possible. On assure les pieds, on fait tourner tout l'instrument autour de l'axe IP, jusqu'à ce que le fil vertical de la lunette couvre la mire. C'est la vis N qui, pour cette opération, produit les mouvements doux, lorsque l'on a serré la vis de pression QO, attachée au pied, qui presse une portion de surface annulaire contre le haut de la tige conique PQ. On donne ensuite au premier système un mouvement dans le plan vertical au moyen de la vis K, jusqu'à ce que le niveau GH soit parfaitement calé, et la ligne de visée doit être horizontale.

La *vérification* du niveau de Chézy consiste en deux choses :

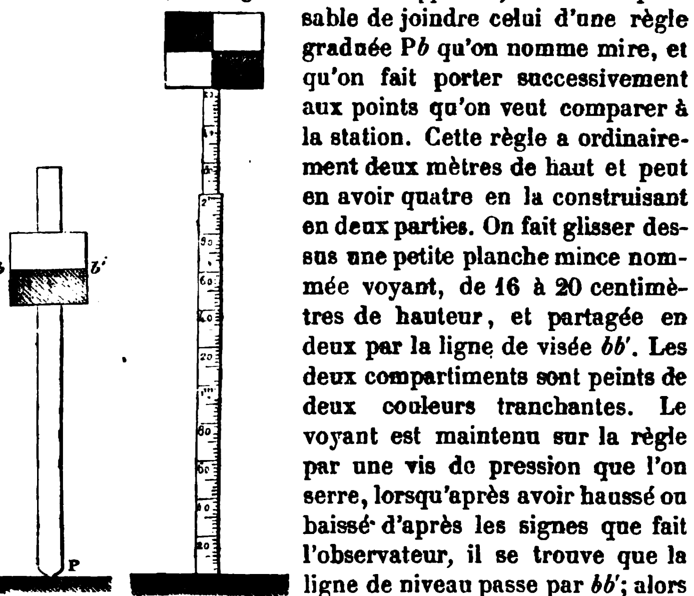
1° L'axe optique de la lunette doit être le même que l'axe de figure de l'enveloppe supposée cylindrique : car, s'il en était autrement, la lunette pouvant tourner dans ses collets, l'axe optique décrirait une surface conique dont toutes les génératrices ne feraient pas le même angle avec le niveau supposé fixe. Pour voir si cette condition est remplie, on vise un point, à une grande distance, en plaçant la tête de la vis du réticule dans la partie supérieure de la lunette; on la retourne dans ses collets, de manière que cette tête de vis soit dans une situation diamétralement opposée à la première, et l'on regarde de nouveau dans la lunette. Si le fil horizontal ne coïncide plus avec le point visé, on modifie la position de l'axe optique, en faisant parcourir la moitié de la différence par le fil horizontal, au moyen de la vis du réticule, et l'autre moitié par tout l'instrument, à l'aide de la vis tangente K. Pour s'assurer que la correction est bien faite, on recommence l'épreuve ;

2° L'axe optique de la lunette doit être horizontal lorsque le niveau est calé. Pour s'en assurer, on cale le niveau dans une position, puis on retourne la lunette bout pour bout, après avoir

ouvert les collets. Si l'instrument n'a pas bougé du reste, le niveau doit être encore calé après le retournement, car cette circonstance dit, en effet, que la ligne des collets restée fixe est parallèle à la tangente menée au milieu de la bulle, c'est-à-dire horizontale; comme l'enveloppe de la lunette repose sur cette ligne des collets, elle est elle-même horizontale, ce qui entraine également la même condition pour l'axe optique, par suite de la première vérification.

Si le niveau s'est décalé dans le retournement, on le recale par *moitié* au moyen des mouvements H et K. L'instrument, dans ce cas, ne sera réglé qu'après quelques tâtonnements.

34. Mire. — A l'emploi des instruments qui donnent l'horizontale d'un lieu, ou ligne du *niveau apparent*, il est indispensable de joindre celui d'une règle graduée P*b* qu'on nomme mire, et qu'on fait porter successivement aux points qu'on veut comparer à la station. Cette règle a ordinairement deux mètres de haut et peut en avoir quatre en la construisant en deux parties. On fait glisser dessus une petite planche mince nommée voyant, de 16 à 20 centimètres de hauteur, et partagée en deux par la ligne de visée *bb'*. Les deux compartiments sont peints de deux couleurs tranchantes. Le voyant est maintenu sur la règle par une vis de pression que l'on serre, lorsqu'après avoir haussé ou baissé d'après les signes que fait l'observateur, il se trouve que la ligne de niveau passe par *bb'*; alors on compte les divisions comprises entre P et *bb'*. Il existe plusieurs formes de mires dont le mécanisme est assez simple pour être compris à première vue.



Ces mires, surtout celle dite *à coulisse et à voyant*, sont difficiles à manœuvrer; on ne parvient à faire fixer le voyant au point convenable par le porteur qu'après bien des signaux; la lecture doit être faite par le porteur, ou si l'opérateur lui-même s'en

charge, il faut que le premier la lui apporte, et pendant le transport l'écrou peut glisser ; il y a donc chance d'erreur en même temps que perte de temps et de peine.

La mire *parlante* nous semble préférable aux précédentes, parce qu'elle fournit une lecture directement faite par l'observateur, avec le secours de la lunette qui lui sert à pointer.

Elle se compose simplement d'une règle de 4^m formée de deux parties, qu'une charnière permet de rabattre l'une sur l'autre, pour la facilité du transport ; peinte en blanc, elle porte des divisions égales dont l'origine est à l'extrémité qui doit poser sur le sol ; pour être bien visibles, ces divisions sont marquées par des surfaces blanches et noires, et non pas par des lignes qu'une faible épaisseur ne permettrait pas de distinguer ; on peut donner convenablement à chaque unité de division une longueur de $0^m,02$ qui, avec une lunette puissante, peut fournir des lectures à quelques millimètres près.

Pour faciliter la lecture, on dispose les petites divisions en les alternant régulièrement des deux côtés de la règle, on marque les chiffres en rouge en les renversant, par suite de l'emploi de la lunette qui, du genre dit *astronomique*, comme toutes celles qui sont utilisées pour obtenir des directions, fait voir les objets renversés. Enfin, quelquefois on emploie des signes conventionnels, comme des gros points, des cercles, pour distinguer les mètres.

La mire doit être mise verticale et il est bon, pour aider le porte-mire à remplir cette condition, de l'armer d'un fil à plomb ; c'est ce qui se fait dans les opérations d'une grande précision. Souvent on se contente de juger cette verticalité à l'œil ; les déplacements dans le sens perpendiculaire à la ligne qui joint les deux points qu'on compare se reconnaissent, si on a eu soin de mettre vertical un des fils du réticule, ce qui se fait facilement en essayant la lunette sur l'arête d'un monument ; des signaux à la main serviront d'indication au porte-mire. Le déplacement qui peut exister dans le sens du vertical des deux lieux ne peut pas être reconnu à la vue ; son effet étant d'augmenter toujours les lectures, on peut en atténuer en partie l'influence en pro-

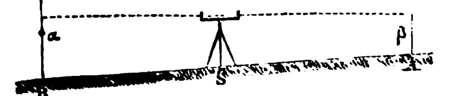
fitant des petites oscillations que le porteur peut imprimer à la main, en prenant, comme valeur finale, le minimum des lectures.

35. **Nivellement simple.** — L'objet du nivellement réduit à son terme le plus simple, comme nous l'avons dit, est de trouver la différence de niveau entre deux points. Lorsque l'on peut arriver à ce résultat au moyen d'une seule station, le nivellement est *simple*; il est dit *composé* dans le cas contraire.

Le meilleur moyen d'arriver à ce résultat repose sur l'emploi des instruments donnant la ligne du niveau apparent; parmi ceux-ci, il faut accorder la préférence à ceux qui sont munis d'un niveau à bulle d'air et d'une lunette, les autres étant d'un pointé très-défectueux.

Les clisimètres peuvent donner cette même ligne du niveau apparent, lorsqu'on leur fait marquer la lecture zéro, mais avec une moindre exactitude, par suite de la complication de leur construction, qui doit satisfaire à des conditions diverses.

Supposons qu'on veuille trouver la différence de niveau entre deux points A et B. On établit l'instrument en *s* dans une position intermédiaire, dans le plan vertical AB ou *en dehors*, peu importe; on fait porter la mire successivement en A et B; on lit les chiffres correspondants aux deux positions, et l'on a, en les désignant par α et β, $dN=\alpha-\beta$.



On aurait pu se placer au point le plus élevé A, et se contenter d'une seule lecture, mais alors il aurait fallu tenir compte de la hauteur de l'instrument, hauteur variable avec l'écartement donné aux pieds du support. Le premier mode d'opérer évite cet inconvénient.

Il y a encore un double avantage à stationner en un point intermédiaire :

1° En effet, la différence du niveau étant donnée par la formule $\alpha-\beta$, ne peut jamais dépasser le maximum d'une des deux lectures, c'est-à-dire la longueur totale de la mire, 4^{m}. Si, dans ce cas extrême, on plaçait la station au point le plus bas, l'horizontale du niveau qui n'est située au-dessus de ce point que de la hauteur de l'instrument, 1^{m},20 environ, irait couper le sol avant de rencontrer la position supérieure de la mire; si au contraire on se plaçait au point le plus élevé, la même horizontale

passerait à $1^m,20$ au-dessus de la mire. Le maximum de différence de niveau des deux points qu'on voudrait comparer, ne pourrait être que de $4^m - 1^m,20 = 2^m,80$, et il répondrait à la station faite forcément au point supérieur. Mais si on fait une station intermédiaire choisie convenablement, plus rapprochée du point supérieur que de l'autre, on peut avoir des différences maxima de $1^m,20$ d'un côté, et de $2^m,80$ de l'autre, dont le total 4^m permet d'éloigner davantage les points à niveler.

2° Les différences de niveau vraies doivent être rapportées à la surface horizontale qui, en chaque lieu, affecte la forme d'une sphère dont le rayon est quelque peu variable. Laissant de côté cette variation du rayon qui a fort peu d'influence, il n'en est pas moins inexact de se contenter de prendre la différence de niveau par rapport au plan tangent de la station, plan qui est le seul élément fourni par un quelconque des instruments de nivellement. Lorsque les distances employées seront très-considérables, il y aurait lieu de tenir compte de l'erreur qui résulte de cette substitution d'une surface à l'autre; cela se ferait au moyen de la différence *du niveau vrai au niveau apparent* qui sera étudiée au chapitre traitant du nivellement topographique.

Mais les distances séparant deux positions de la mire sont généralement très-petites pour peu que le terrain ne soit pas horizontal, car il faut que la ligne de visée ne passe pas au-dessus d'une des mires, ni au-dessous de l'autre. S'il y avait même possibilité de prendre ces distances assez grandes, il vaudrait mieux les choisir petites afin de laisser peu d'influence aux erreurs inévitables. En subdivisant le travail, on aurait en effet des chances pour que les erreurs commises dans le pointé, dans la lecture, dans le calage du niveau à bulle, et enfin dans le règlement de l'instrument qu'il est bon de contrôler de temps en temps, fussent quelquefois de signes contraires, en sorte qu'il s'établirait des compensations n'existant pas lors d'une opération unique.

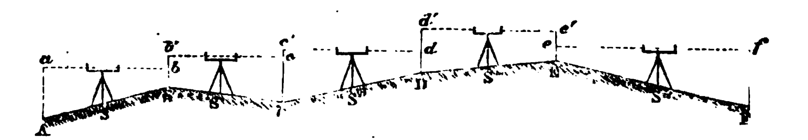
Les distances étant petites, l'influence de la différence du niveau vrai au niveau apparent qui croît rapidement avec la distance, sera petite.

Le choix d'une station intermédiaire entre les deux points nivelés pourra même annuler entièrement l'erreur provenant de cette cause, si on a soin d'établir le niveau à égale distance des deux points; les deux erreurs commises sur les lectures des deux mires seront alors égales, et comme elles n'apparaissent qu'à l'état de différence au résultat final, ce résultat sera exact.

On ne se placera probablement jamais dans une circonstance aussi favorable, mais il n'en est pas moins vrai que le choix d'une station intermédiaire agissant dans le sens que nous venons d'expliquer, sera avantageux sous ce troisième point de vue.

36. **Nivellement composé.** — Si l'opération n'a pu se faire d'une seule station et si on ne désire avoir que les cotes relatives des points extrêmes, on stationne en des positions intermédiaires quelconques permettant les lectures.

Soient A, B, C, D, etc., ces points, et S, S', S'', etc., les différentes stations: à chacune d'elles on donne un coup de niveau



d'arrière et un d'avant, de manière que, sur chacune des verticales de B, C, etc., il y aura deux coups de niveau qui lieront les opérations faites aux différentes stations. On fait séparément les deux sommes dont la différence est précisément celle du niveau des points extrêmes. En effet, considérant les quatre premiers points A, B, C, D, la différence entre B et A sera $\alpha - \beta$, entre C et B, elle sera $\alpha' - \beta'$, etc., en sorte qu'en désignant par a, b, c... les cotes de A, B, C, etc., on aura successivement

$$b - a = (\alpha - \beta), \quad c - a = (\alpha - \beta) + (\alpha' - \beta'), \quad d - a = (\alpha'' - \beta'')$$

et finalement

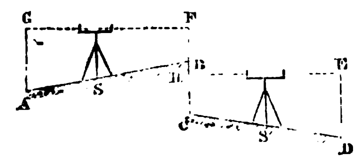
$$dN = (\alpha - \beta) + (\alpha'' - \beta'') - (\alpha' - \alpha') = (\alpha + \alpha' + \alpha'') - (\beta + \beta' + \beta'')$$

qui représente ce qu'il faut *ajouter* à la cote du point de départ pour avoir celle du point d'arrivée.

Si le nivellement est un peu long, on ne pourra bien compter sur son exactitude qu'après avoir répété l'opération, la première fois de A en E, la seconde de E en A.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que les points soumis au nivellement étaient situés au-dessous du plan horizontal fourni par l'instrument. Il peut arriver pour quelques-uns d'entre eux, dans des circonstances très-rares à la vérité, qu'il n'en soit

pas ainsi. Supposons que, dans le profil à suivre, on rencontre un mur de terrasse BC. La différence de niveau entre les points A et B sera, comme précédemment, la différence des deux coups de niveau donnés en S; mais, pour comparer B et D, on voit qu'il faudra renverser la mire en B, et que ce sera la somme des deux lectures qu'il faudra prendre. On peut déduire de là cette règle que, dans le cas général, α, α', etc., β, β', etc., qui servent à déterminer dN, doivent être regardés comme positifs dans la formule $dN = (\alpha + \alpha' \ldots) - (\beta + \beta' \ldots)$, et qu'il faudra leur prêter le signe contraire quand, par cas fortuit, on aura dû renverser la mire. Cela n'est du reste qu'un cas particulier du principe général qui dit que lorsqu'une chose quelconque vient à changer de *sens*, il suffit de changer le *signe* de cette chose dans la formule algébrique qui en contient l'expression.



Si, de même, la différence de niveau partielle relative à E et F change de sens, ce qui répond à une pente descendante, en devenant $\beta - \alpha$, il faudra changer son signe, et par suite le résultat énoncé plus haut sera général, c'est-à-dire que pour avoir la cote du point d'arrivée, il faudra ajouter *à la cote du point de départ la somme algébrique des coupes de niveau d'arrière et en retrancher la somme algébrique des coupes de niveau d'avant.*

37. Le nivellement composé, dont nous venons de nous occuper, se présente fort rarement; il a, en effet, fait abstraction des points intermédiaires pour ne s'occuper que de la cote finale.

Dans la plupart des cas, on désire connaître les cotes de points intercalés entre les deux extrémités. On exécute alors un profil.

Nivellement continu. — *Lever le profil d'un terrain*, c'est chercher les différences de niveau des divers points de l'intersection de ce terrain par une surface cylindrique verticale, à base quelconque.

Lorsqu'on a trouvé les cotes relatives de ces divers points et qu'elles diffèrent trop peu les unes des autres, on emploie souvent, en les rapportant sur le papier quand il y a lieu de représenter graphiquement ce profil, une échelle double, triple, quelquefois décuple de celle adoptée pour les distances horizontales; cette méthode

nous semble mauvaise ; elle donne la charge ou la caricature du profil, au lieu d'en donner la figure vraie. Aussi conseillons-nous de l'abandonner, sauf dans quelques cas particuliers, où l'attention a besoin d'être vivement éveillée par l'existence des changements de pente.

Dans les circonstances ordinaires, on désire connaître les cotes des principaux points du profil pour les inscrire à côté de leurs projections horizontales. Pour les obtenir, on opère comme dans l'exécution du nivellement composé, en ayant soin de faire placer la mire aux points qu'il est important de connaître, et de déterminer, si cela n'est déjà fait, les positions de ces points sur la planimétrie. Le calcul est le même que celui du nivellement composé, seulement on doit s'y arrêter aux différents résultats partiels avant de passer au résultat final.

Registre de nivellement. — Pour éviter la confusion, on devra consigner les observations et le calcul qui en résulte, dans un tableau dont la forme peut varier, mais qui nous semble convenablement établi de la manière suivante :

STATIONS.	POINTS soumis au nivellement.	COTES des points nivelés par rapport aux plans particuliers.	COTES des plans particuliers rapportées à la surface générale.	COTES des points nivelés rapportées à la surface horizontale.	OBSERVATIONS.
S	A	$\alpha = 3^m$		$a = 100$	
	B	$\beta = 1$	$a + \alpha = 103$	$a + \alpha - \beta = 102$	
	C	1,253		101,747	
S′	C	2,251	103,998	101,747	
	D	1,111		102,887	
	E	2,173		101,825	
	F	3,241		100,750	

On appelle habituellement et d'une manière impropre, *plan général*, la *surface horizontale* à laquelle sont rapportées toutes les cotes, mais on ne commet ainsi qu'une erreur de désignation,

car l'opération elle-même fait prendre les différences de niveau successives par rapport à une série de plans particuliers qui sont les plans tangents aux différentes stations, et dont l'ensemble constitue bien la surface horizontale vraie. Ces plans particuliers sont ceux qui passent par l'horizontale de l'instrument en chaque station.

Pour expliquer l'usage du tableau appelé *registre de nivellement*, nous ne pouvons mieux faire que de suivre les opérations pour un cas particulier.

On part d'un point A dont la cote, par rapport au plan général, est donnée, a. Stationnant en S, point quelconque intermédiaire dont on n'a pas besoin de connaître la projection, on vise la mire placée successivement au point de départ A, et à un second point B, et on obtient des lectures α et β, qu'on inscrit dans la troisième colonne. Le plan particulier employé à la station S sera évidemment plus élevé que A, de la lecture α; sa cote sera donc $\alpha + a$, qu'on inscrit dans la quatrième colonne, vis-à-vis de S. Enfin le point B du sol est au-dessous du même plan particulier, de β, sa cote est donc $a + \alpha - \beta$, qu'on place dans la cinquième colonne, à la hauteur de la désignation B. Et ainsi de suite, pour les autres points à niveler.

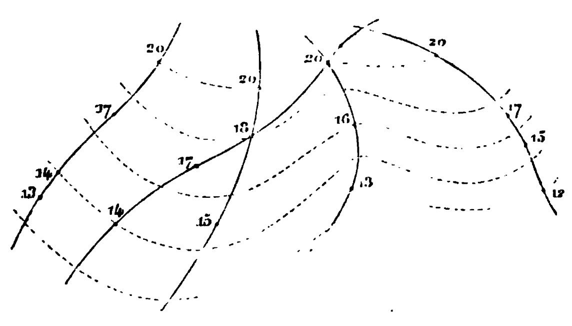
On conçoit aisément que le tableau que nous venons d'indiquer n'a pas une forme absolue ; nous plaçons ci-dessous deux autres formes qu'on pourrait encore varier de bien des manières.

Cote du point 1.		200^m,000
Coup d'arrière.	+	0 ,655
Cote du plan de nivellement de l'instrument.		200 ,655
Coup d'avant..	—	2 ,115
Cote du point 2		198 ,540
Coup d'arrière..	+	0 ,524
Cote du deuxième plan de niveau.		199 ,064
Coup d'avant..	—	2 ,087
Cote du point 3.		196 ,977



NUMÉROS des stations.	HAUTEURS du voyant.	Différence de niveau en +	Différence de niveau en —	COTES de niveau.	OBSERVATIONS.
1	0m,655	»	1m,460	200m,000	
2	2 ,145			198 ,540	
2	0 ,524	»	1 ,563		
3	2 ,087			196 ,977	
3	0 ,772	»	0 ,957		
4	1 ,729			196 ,920	
4	2 ,342	1m,675	»		
5	0 ,667			198 ,595	

38. **Tracé des courbes horizontales.** — En faisant ainsi un grand nombre de profils, on peut tracer les courbes horizontales avec assez d'exactitude; il suffira de joindre par des courbes continues celles des cotes qui, égales entre elles, sont des multiples de l'équidistance choisie. Quant à celles qui ne sont pas dans ce cas, on leur en substituera d'autres, intermédiaires, multiples de cette équidistance, et obtenues en raison des premières par cette considération que la pente peut être regardée comme uniforme entre deux cotes calculées, et en s'inspirant aussi toutefois du rapprochement des courbes inférieures et supérieures. On joindra également ces cotes conclues par des courbes continues.

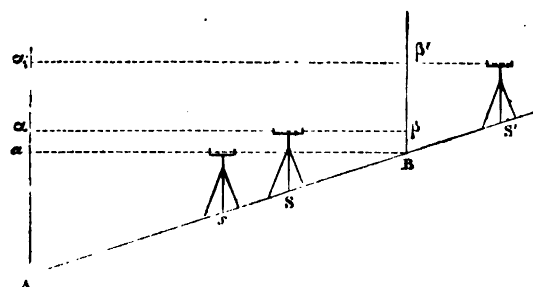


Quel que soit le rapprochement des profils exécutés, ils laisseront entre eux des inflexions qu'ils n'auront pas pu préciser;

il faudra compléter le tracé des inflexions correspondantes des courbes en consultant des *croquis ou figurés à vue* qu'on aura dû exécuter sur le terrain. Ceux-ci, utiles dans l'exécution du nivellement continu, sont beaucoup plus importants et tout à fait indispensables dans celle du nivellement topographique.

Le tracé des courbes, tel que nous venons de l'expliquer, ne peut s'exécuter que sur le dessin. Une seconde méthode permet de faire cette opération sur le terrain même.

Supposons que A soit un point appartenant à une courbe déjà déterminée; sur le profil de la figure, B sera un point cherché de la courbe supérieure. Si A*a* est égale à l'équidistance adoptée et si *a*B est une horizontale, il suffirait de placer en S un niveau tel que sa ligne de visée fût à la hauteur de *a*; cette ligne de visée retournée irait couper le sol en B et elle déterminerait celui-ci.



Il ne serait pas facile de trouver par tâtonnements la position que nous avons admise pour le niveau, mais on arrivera au même résultat si, stationnant en S ou S', on a deux coups de niveau obtenus sur des mires placées successivement en A et B, dont la différence $\alpha - \beta$ ou $\alpha' - \beta'$ soit égale à l'équidistance. Il suffira donc, pour trouver un point appartenant à la courbe supérieure à celle qui passe par le point donné, de choisir, ce qui se fera facilement, une station plus élevée que ce point d'une quantité plus petite que la hauteur de la mire diminuée de la hauteur de l'instrument, et plus grande que l'équidistance diminuée de la même quantité; on fera ensuite transporter la mire en un point pour lequel le coup de niveau donne une lecture égale à celle qui se rapporte au point donné augmentée de l'équidistance.

Ce que nous venons de dire s'applique également au cas où les rôles de A et de B viendraient à alterner, c'est-à-dire à celui où l'on chercherait une courbe inférieure.

On aura ainsi des points appartenant aux courbes successives, et pour tracer celles-ci sur le terrain, il suffira de faire trans-

porter la mire en des points tels que le coup de niveau conserve la même valeur β ou β'.

Il va sans dire que les points ainsi obtenus ne pourront l'être que par des tâtonnements qui seront aidés par des indications émanées de l'observateur et adressées au porte-mire. Ces points devront être déterminés, sur la planimétrie, par intersections, et pour avoir les courbes du dessin, il suffira de joindre leurs projections horizontales par des lignes continues dont le tracé sera aidé par des figurés à vue exécutés sur le terrain.

Observations relatives au nivellement continu. — En suivant la marche indiquée dans les paragraphes précédents, et en employant soit le niveau de Chézy, soit de préférence le niveau à plateau, on peut arriver à exécuter un nivellement continu très-précis, si surtout on opère par des observations doubles. Nous croyons pourtant qu'on a quelque peu exagéré la précision des résultats ainsi obtenus ; certains opérateurs prétendent ne pas commettre des erreurs plus fortes que quelques millimètres sur plusieurs lieues de parcours ; il y a lieu de s'étonner de ces résultats quand on se reporte à ceux qui sont obtenus par la géodésie, qui se sert pourtant d'instruments d'une grande précision, et qui, dans les opérations relatives au canevas horizontal, n'invoque que très-subsidiairement l'existence du niveau à bulle, élément essentiel de tout nivellement, et dont l'emploi délicat peut engendrer des erreurs.

Pour se rendre compte de l'exactitude d'un nivellement, il est nécessaire de le recommencer en sens inverse, et la vérification fournie par cette double opération n'est pas encore concluante, car ici comme dans beaucoup d'autres opérations, les erreurs ne pouvant être qu'opposées de signes, il doit toujours s'établir des compensations qui peuvent, tout en produisant la concordance des résultats extrêmes, laisser subsister des erreurs importantes dans les résultats partiels. Pour que la vérification fût plus concluante, il faudrait la faire porter également sur plusieurs points intermédiaires du profil.

Quand même ces points intermédiaires ne devraient pas être déterminés pour eux-mêmes, il sera toujours bon de les prendre nombreux, autrement dit il vaudra mieux exécuter un nivellement en employant des stations rapprochées ; cela provient de la raison que nous avons donnée plus haut ; une seule opération laisse subsister intégralement l'erreur commise, erreur qui est

proportionnelle à la longueur du côté employé, tandis que les opérations multiples produisent des erreurs également proportionnelles aux petits côtés, mais qui, pouvant être de signes contraires, tendent à se détruire au résultat. (Voir le nivellement géodésique.)

L'exactitude outrée, à notre sens, que quelques observateurs prétendent atteindre, est-elle aussi indispensable, aussi utile même qu'on le croit? Nous ne le pensons pas ; les nivellements sont faits en vue d'un travail qui devra toujours se résoudre manuellement, et pourra-t-on espérer que les quelques millimètres d'erreur relatifs à un long travail ne seront pas dépassés outre mesure par les ouvriers qui seront appelés à construire? Serait-il sage de tenter l'exécution d'une œuvre matérielle longue et compliquée quand sa réussite dépendrait de la non-existence d'une erreur d'observation aussi faible ?

Nous sommes loin de prétendre conclure de ce qui précède qu'il faut se contenter d'observer approximativement, car alors les erreurs pourraient devenir considérables. Il faut au contraire opérer aussi consciencieusement que possible, en s'entourant de toutes les précautions qui ont chance d'assurer l'exactitude des résultats; mais il faut être persuadé que ceux-ci, malgré tous les soins qu'on aura mis dans leur recherche, seront, comme toutes les œuvres humaines, entachés d'erreurs assez sensibles.

CHAPITRE IX

NIVELLEMENT TOPOGRAPHIQUE

39. Les surfaces à lever pour l'exécution de cartes topographiques ont généralement une étendue trop grande pour qu'il soit possible d'y exécuter des nivellements continus.

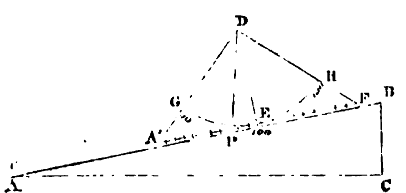
On a alors recours au *nivellement topographique*, qui est beaucoup plus rapide. Pour l'exécuter, on doit recueillir sur le terrain l'*angle de pente* ou *angle à l'horizon* de la ligne qui joint les deux points à comparer, et sur le dessin la longueur de la base résultant des opérations de la planimétrie. On résout ensuite un

triangle qu'on assimile à un triangle rectangle, en apportant au résultat les corrections rendues nécessaires par la longueur de la base, lorsque celle-ci a une certaine étendue.

Avant d'expliquer la marche du calcul à effectuer ainsi, nous décrirons les instruments dits *clisimètres*, qui permettent de trouver cet angle de pente, ou quelquefois sa tangente, seul élément qui soit inconnu, puisque la planimétrie est déjà exécutée.

40. Niveau de maçon. — Le plus simple de tous est vulgairement connu sous le nom de niveau de maçon. Dans la description que nous allons en faire, on verra qu'il peut être également classé parmi ceux qui donnent seulement une ligne de niveau.

Il consiste en un triangle isocèle rectangle A'DE, au sommet duquel est fixé un fil à plomb. Un arc gradué dont le centre est en D, s'appuie sur la base AE et vient se fixer aux deux côtés de l'angle droit. Cet arc serait inutile s'il ne s'agissait que de s'assurer de l'horizontalité de la droite ou du plan qui supporte l'instrument. Dans ce cas, le fil à plomb devra aboutir sur le milieu de la base A'E, si le niveau est exact. Pour trouver le point de la base auquel correspond le fil quand elle est horizontale, il suffit de poser l'instrument sur une règle arbitrairement inclinée, de marquer la trace du fil sur la base, de retourner bout pour bout, de marquer encore la position du fil à plomb et de tracer le milieu entre les deux. S'il était bien construit, il suffirait de diviser la base en deux parties égales. Quand le niveau est muni de l'arc dont nous avons parlé, l'opération est la même; puis prenant le point de rencontre du fil et de la base A'E horizontale pour origine des graduations, on marque les grades ou degrés à droite ou à gauche de ce point. Pour trouver l'inclinaison d'une droite AB, il suffit d'appliquer le niveau dessus et de lire quel chiffre correspond au fil, car l'angle PDE mesuré par la graduation est en effet égal à l'angle à l'horizon BAC, par suite de la perpendicularité de leurs côtés respectifs.



Quelquefois cet instrument est dépourvu de l'arc gradué : les divisions sont tracées sur la base et sont les prolongements des rayons passant par toutes les divisions du limbe ; elles sont alors d'inégales dimensions, car elles croissent comme les tangentes

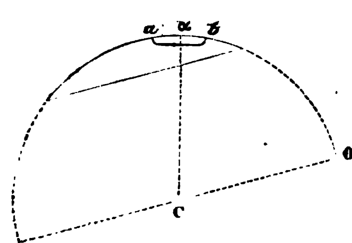
des angles de 0^g à 50^g, ou plutot elles sont les tangentes mêmes des arcs qui mesurent ces angles dans un cercle de rayon égal à DE.

On peut encore modifier cet instrument de manière qu'au lieu de donner l'angle de pente, il fournisse immédiatement la tangente de celui-ci. On divise pour cela la base en parties égales; soit $2m$ leur nombre. Le triangle étant isocèle rectangle, la hauteur en contiendra m, et si dans une circonstance quelconque le fil à plomb bat la $n^{ème}$ division, on aura, par suite de l'égalité des angles EDP, BAC, tang. BAC $= \frac{n}{m}$: si on veut en conclure la différence de niveau répondant à une base b, on l'aura immédiatement par $dN = b\frac{n}{m}$.

Par suite de l'existence du plomb, la base du triangle ne peut pas être posée directement sur la ligne matérielle dont on veut connaître la pente; on prolonge alors les deux côtés du triangle de longueurs égales.

Le niveau de maçon n'ayant pas de ligne de visée, n'est pas employé dans les opérations ordinaires de la topographie.

41. Niveau à bulle d'air gradué. — Comme le précédent, cet instrument ne sert qu'à trouver l'inclinaison d'une ligne matérielle sur laquelle on pose la base plane du niveau; la bulle prend la position ab telle que son milieu α répond à la tangente horizontale, si la section de l'enveloppe de verre est un arc de cercle. Alors la direction Cα est verticale, et la distance zénithale est $O\alpha = \frac{Oa + Ob}{2}$. Si donc on a gradué l'arc du niveau de telle sorte que le zéro des graduations réponde au point O du diamètre fictif parallèle à la base réelle du niveau, la demi-somme des lectures faite aux deux extrémités de la bulle, donne la distance zénithale.



Les variations de position de la bulle sont d'autant plus sensibles que le rayon du cercle est grand, et les lectures sont indépendantes des effets de la dilatation.

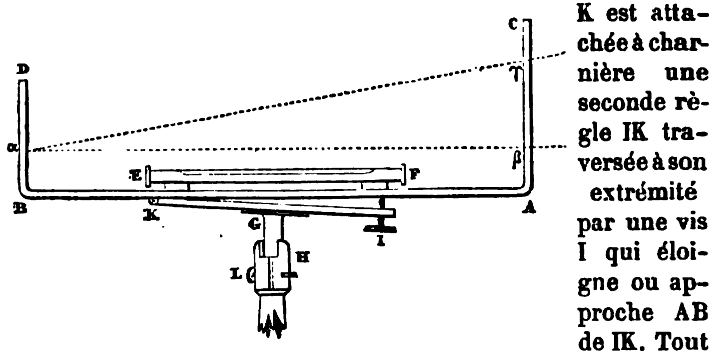
La vérification du point de départ fictif des graduations se fait

par un retournement exécuté sur la même ligne, comme pour le niveau de maçon; les deux positions de la bulle doivent être symétriques par rapport à la graduation 100^g, c'est-à-dire que les lectures doivent être supplémentaires.

Plus généralement employé à reconnaître l'horizontalité d'une ligne, cet instrument l'indique lorsque la lecture est de 100^g.

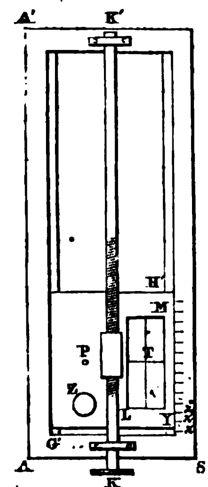
Il résulte de ce qui précède que, pour des mêmes variations d'inclinaison, la bulle d'air parcourt des espaces qui sont proportionnels aux rayons du tube de verre, et que sa marche est par suite d'autant plus grande que ce rayon est grand. Les niveaux les plus sensibles sont donc ceux qui ont des courbures petites ou des rayons de courbure grands. L'avantage qu'il y a à employer de tels niveaux est compensé d'autre part par la difficulté qu'on éprouve à les caler.

42. Clisimètre ou niveau de pente de Chézy. — Cet instrument donne immédiatement, comme nous allons le voir, la pente par mètre d'une ligne inclinée à l'horizon. Il se compose d'une règle AB, d'un niveau EF invariablement fixé à la règle, et de deux pinnules AC, BD, élevées à angle droit sur AB, pinnules dont les rabattements indiqués sur la figure ont reçu des dimensions exagérées propres à en faciliter l'aspect. Au point K est attachée à charnière une seconde règle IK traversée à son extrémité par une vis I qui éloigne ou approche AB de IK. Tout



l'appareil est supporté par une colonne, un genou et un trépied. Une vis L arrête le mouvement du genou. Les pinnules sont deux parallélogrammes renfermant deux châssis GH,G'H, et qui, maintenus à coulisse, peuvent se mouvoir dans le sens vertical. Le premier reçoit le mouvement directement de la main à l'aide du bouton Z ou, pour les petites variations, au moyen de la vis sans fin KK'. Cette vis, prise à ses extrémités dans deux collets,

tourne sur son axe sans avancer; c'est le châssis, auquel est adapté l'écrou qui en reçoit le mouvement de bas en haut. Le deuxième châssis ne jouit que d'un mouvement très-restreint, imprimé par la vis V : celle-ci ne servant que très-rarement, lorsqu'il s'agit de régler l'instrument, porte un carré au lieu d'une large tête plate, et on la fait tourner au moyen d'une clef mobile. On conçoit que cette précaution soit nécessaire pour éviter les dérangements involontaires de l'instrument.



L'un et l'autre portent des fils croisés LM, NO qui se coupent en T et U, et des visières P et Q situées sur le prolongement des fils horizontaux. Les largeurs des pinnules sont les mêmes, et les points T et Q d'une part, P et U de l'autre, sont situés dans des plans verticaux parallèles. Enfin, le grande pinnule porte des divisions que parcourt un index qui fait corps avec son châssis intérieur.

L'instrument est mis, à la main, dans la direction voulue, et on cale le niveau par le moyen de la vis I; on fait ensuite monter ou descendre le châssis intérieur de la grande pinnule, par le secours de la vis K, jusqu'à ce que l'œil placé immédiatement derrière la visière Q aperçoive l'objet à la croisée des fils T.

Supposons que, la bulle étant dans ses repères, et la ligne de visée QT étant horizontale, l'index fixé au châssis qui porte T marque le zéro des graduations. Dans une circonstance quelconque, on aura, en désignant AB par b, et par d la valeur linéaire d'une des petites divisions marquées sur la grande pinnule, *tangente de l'inclinaison* $= \frac{n.d}{b}$, si n est le nombre des divisions parcourues par l'index depuis le zéro.

Si l'on veut avoir immédiatement la différence de niveau, il suffit de concevoir les deux triangles rectangles semblables dont les bases sont b de l'instrument, et B de la nature, et cette différence de niveau dN sera donnée par $dN = B\frac{n\,d}{b}$. Il suffira donc, pour pouvoir la calculer, de connaître une fois pour

toutes le rapport constant $\frac{d}{b}$, et on y arrivera par une expérience directe faite dans un cas connu de B et dN obtenus par le secours d'un autre instrument.

Le constructeur se charge habituellement de ce soin, et il fait en sorte que le rapport constant $\frac{d}{b}$ ait une expression simple, comme $\frac{1}{100}$ par exemple, rapport qu'il inscrit sur l'instrument; il sera bon pourtant que l'opérateur recherche lui-même si cette inscription est exacte.

Le clisimètre de Chézy, dont la ligne de visée est déterminée d'une manière assez imparfaite, ne peut pas être employé lorsque les bases sont considérables; on l'utilise habituellement pour trouver l'inclinaison d'une ligne de terrain, ou pour lui en assigner une, comme cela peut se présenter dans le tracé d'une route nouvelle.

La vérification de l'instrument consiste à voir si la ligne de visée TQ est bien horizontale lorsque l'index correspond au zéro. Pour cela, on cale le niveau et, après avoir établi la lecture zéro, on vise un point éloigné déterminé par le voyant d'une mire ; ce point devra se trouver, si l'instrument est réglé, sur l'horizontale de la station. On retourne l'instrument bout pour bout et après avoir calé le niveau on vise suivant la ligne PU qui est parallèle à QT; cette nouvelle ligne de visée, qui est restée placée de la même manière par rapport à l'index et au niveau qui ont fait corps ensemble puisqu'on n'a employé qu'un mouvement général, doit encore être horizontale et par suite elle doit aller passer par le point visé. Si on trouve une différence on rétablit le pointé moitié au moyen du bouton Z qui agit sur tout l'instrument, et moitié avec la vis V qui, faisant mouvoir le châssis de la petite pinnule, incline la ligne de visée par rapport au niveau. On recommence l'opération jusqu'à ce qu'il y ait coïncidence parfaite dans les deux positions de l'instrument.

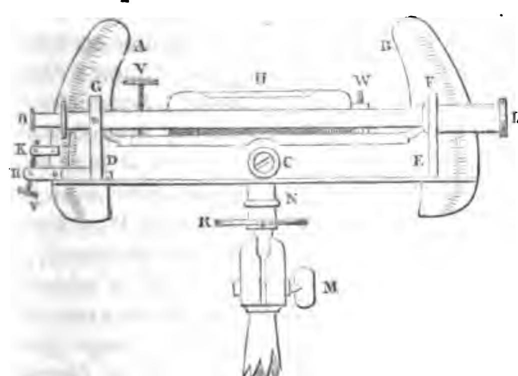
On peut abréger les tâtonnements, en faisant mouvoir, dans la seconde opération, le voyant de la mire, jusqu'à ce qu'il soit à la hauteur de la ligne de visée de l'instrument; la position moyenne de celles qu'il aura occupées dans les deux opérations correspondra à l'horizontalité et il suffira, après lui avoir fait marquer cette indication moyenne, d'amener, au moyen de la vis V, la ligne de visée au pointé ainsi précisé.

On évite l'emploi de la mire, dans l'opération du règlement,

en visant un point remarquable situé à une hauteur quelconque; la marche à suivre est la même que celle qui vient d'être indiquée en commençant; la seule différence vient de ce qu'en pointant successivement suivant QT et PU, on laisse marquer à l'index, au moyen de la vis K, des lectures quelconques, lectures qui devraient être identiques, quoique de signes contraires, si le zéro des graduations était convenablement placé. On prend la moyenne de ces lectures et en y plaçant l'index on vise de nouveau, le niveau étant toujours calé, mais en employant le seul mouvement particulier V du châssis de la petite pinnule.

43. **Éclimètre.** — Cet instrument est celui qu'on emploie généralement dans l'exécution du nivellement topographique; il s'adapte habituellement à la boussole; on peut aussi l'adjoindre à l'alidade, qui prend alors le nom d'*alidade nivelatrice*, mais il existe par lui-même, indépendamment de son adjonction à tout autre instrument.

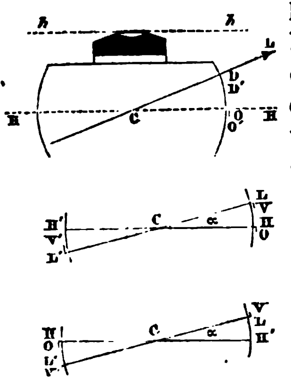
Il se compose de deux arcs A et B divisés en grades et demi-grades. Ils sont liés entre eux par une règle qui s'appuie contre l'une des faces latérales de la boîte de la boussole, et qui a la faculté de pivoter autour d'une vis située à son centre C et engagée dans l'épaisseur de cette boîte. Sur la face divisée du limbe se meut une lunette OL maintenue par deux collets EF, DG que porte l'alidade DE. La tige N supporte la boussole et l'éclimètre; c'est autour d'elle que s'effectue le mouvement horizontal qu'imprime la main de l'observateur au moyen du large disque R.



La vis M arrête le mouvement du genou. Sur les faces opposées aux graduations est appliqué un niveau à bulle d'air H. L'éclimètre porte ordinairement trois vis de rappel; la première sert à amener exactement la croisée des fils de la lunette sur l'objet visé, sans déranger le limbe; elle tourne dans deux pinces

K et H; celle-ci est maintenue invariablement au plan de l'alidade qui porte les verniers; l'autre est fixée au plan du limbe ou le laisse glisser entre ses deux joues, suivant qu'une vis v est serrée ou libre. Dans ce dernier cas, on fait tourner autant qu'on le veut la lunette autour de C pour approcher l'axe optique de la direction du point de mire; quand il en est ainsi et que l'on veut pointer avec précision, on serre la pince et l'on tourne la vis v qui passe en H et K à travers les deux pinces. Dans la cavité pratiquée en K est placé un écrou que traverse la vis. Dans la cavité H roule son renflement sphérique. La seconde vis de rappel V sert à faire mouvoir tout l'instrument dans le plan vertical, et, par conséquent, à caler le niveau. La troisième, W, placée à l'une des extrémités du niveau, est employée dans la rectification de l'instrument.

Supposons que, le niveau étant calé, le diamètre *o* du limbe soit horizontal; on amènera le plan du limbe dans le plan vertical qui contient l'objet à viser, on le mettra lui-même vertical à l'œil, et on calera le niveau par le moyen de la seconde vis qui entraîne tout l'éclimètre. Par suite de notre hypothèse, le diamètre *o* sera horizontal, et si l'on pointe l'axe optique sur l'objet par le moyen de la pince et de la vis de rappel, l'angle à l'horizon sera celui marqué par la graduation placée à l'extrémité du diamètre parallèle à l'axe optique. Mais comment saura-t-on que le *o* du vernier qui sert à faire cette lecture est sur ce diamètre? si au lieu d'être placé en D il est en D′, il faudra que le *o* du limbe passe de O en O′, de telle sorte que OO′ = DD′, c'est-à-dire que l'hypothèse que nous avons faite deviendra la suivante: *l'angle formé par le diamètre o du limbe et l'horizontale*, lorsque le niveau est calé, *doit être de même sens et égal à celui que le diamètre o du vernier forme avec l'axe optique de la lunette.* Si cette condition n'est pas satisfaite, il existera dans les observations une erreur constante dite de *collimation* qui sera égale à la différence de ces deux angles.



Vérification. — La rotation de la lunette, qui entraîne le vernier, doit se faire autour du centre du limbe gradué, pour que les angles lus soient bien les angles décrits. Il faut, pour s'assu-

rer que cette condition est remplie, suivre la marche des deux zéros des verniers, et voir s'ils parcourent des angles égaux ; le règlement de l'éclimètre exige même que les lectures faites soient identiques pour toute inclinaison, ce qui indique que les zéros du limbe et des verniers forment deux diamètres.

Règlement de l'éclimètre. — Il faut que l'angle des *o* du limbe et de l'horizontale soit égal à celui des *o* des verniers et de la ligne de visée, lorsque le niveau est calé. Pour s'en assurer, on retourne l'instrument de 200^g dans le sens horizontal, après avoir obtenu un premier angle à l'horizon; on ramène vers soi l'oculaire par un mouvement de la lunette autour du centre du limbe, et on vise de nouveau après avoir calé le niveau. En suivant la marche des opérations que nous venons de décrire, on voit que, pour l'égalité des deux angles α (qui sont, en effet, les mêmes dans la nature, puisqu'on a visé deux fois le même point), il faut que l'arc HL' = l'arc HL, ou que les deux lectures OV, OV' soient les mêmes, puisque les arcs HO, LV, L'V', sont égaux par hypothèse.

On voit sur la figure que nous avons alterné les deux verniers sans nous préoccuper du second zéro du limbe, ce qui a exigé seulement que les *o* des verniers soient sur le même diamètre ; il pourrait donc suffire que cette condition fût remplie pour les verniers; mais si les quatre zéros ne forment pas deux diamètres, la première vérification n'a pas pu faire connaître celui qui existe réellement. Il est donc indispensable, comme nous l'avons annoncé, que les lectures faites avec les deux verniers soient toujours identiques.

Si la vérification que nous avons indiquée plus haut ne conduit pas à un résultat favorable, il faut, pour établir l'égalité des angles que nous avons déjà mentionnés plusieurs fois, mettre le *o* du vernier sur la moyenne des deux lectures qui représente l'angle vrai parce que l'erreur de collimation a agi en sens inverse sur ces deux lectures, viser le point par le mouvement général, et caler le niveau par son mouvement particulier. Cette opération exige plusieurs tâtonnements. On se contente quelquefois de la connaissance de l'erreur de collimation, qui est égale à la demi-différence des deux lectures, et on l'ajoute à toutes les lectures des observations ultérieures.

Modifications. — On a fait subir à l'éclimètre deux modifications.

La première consiste à inscrire 100^g au lieu de *o*, et à supposer le *o* des graduations sur la perpendiculaire à l'ancien diamètre à partir duquel on comptait les angles.

La lecture donne ainsi immédiatement les distances zénithales, ce qui est avantageux pour éviter la confusion résultant d'angles d'ascension et d'angles de dépression.

Éclimètre à un seul limbe. — La seconde modification est moins avantageuse. Pour avoir de plus grandes divisions sur le limbe, et, par suite, une plus grande approximation dans la lecture, on a imaginé de mettre le centre des graduations à une des extrémités de l'instrument. C'est là son seul avantage, car la lunette ayant même longueur, donne le même pointé. En opposition à cet avantage obtenu sur la lecture, on a donné naissance à deux inconvénients graves. Le premier provient de la difficulté de vérifier si l'axe de rotation se trouve exactement au centre du limbe ; on peut tenter cette vérification en suivant la marche du vernier unique, qui doit conserver la même position longitudinale par rapport aux divisions du limbe ; on ne peut reconnaître ainsi que des imperfections graves ; cette vérification peut ressortir encore indirectement du règlement de l'éclimètre qui, réglé pour une certaine distance zénithale, ne le sera pour une seconde, différente de la première, qu'autant que la condition relative à la rotation sera satisfaite.

Le second défaut de cet instrument ainsi modifié provient du procédé employé pour le régler. Ce procédé, que nous allons exposer un peu plus loin, exige un déplacement et l'observation aux deux extrémités de la ligne parcourue, des distances zénithales de celle-ci. Le plus souvent cette ligne sera courte, et un léger déplacement dans le sens vertical, presque inévitable, dans la position des deux points qui servent alternativement de station et de mire, produira plus tard une erreur beaucoup plus considérable, lorsqu'on opérera sur une base toujours beaucoup plus grande que celle employée pour la vérification.

La manière d'opérer le règlement de cet *éclimètre sans retournement* est la suivante.

Soient Δ et Δ' les distances zénithales réciproques observées de deux points A et B ; soient δ et δ' les mêmes quantités corrigées de l'erreur de collimation que nous désignerons par e et de celle de réfraction qui, représentée par r, peut être prise égale à 0,08 de l'angle au centre C, ainsi qu'on le verra un peu plus loin.

Nous aurons

$$\Delta = \delta + e - r;\ \Delta' = \delta' + e - r; \quad \text{d'où} \quad \Delta + \Delta' = \delta + \delta' + 2e - 2r;$$

or $\delta + \delta' = 200 + C$ donc $\Delta + \Delta' = 200 + C + 2e - 2r;$

Tirons-en la valeur de e, elle sera

$$e = \frac{\Delta + \Delta'}{2} - 100^{G} - \frac{C}{2} + r = \frac{\Delta + \Delta'}{2} - 100^{G} - C\left(\tfrac{1}{2} - 0{,}08\right) =$$

$$= \frac{\Delta + \Delta'}{2} - 100^{G} - 0{,}42\,C.$$

Pour connaître la valeur de l'angle au centre C, il suffit de se rappeler qu'un grade sur la terre est égal à 100000^{m}, une minute à 1000^{m} et une seconde à 10^{m}; la base qui sépare les deux stations étant estimées et Δ et Δ' étant les lectures fournies par les deux observations réciproques, tout est connu dans la formule. Le signe qui affectera le résultat du calcul indiquera dans quel sens doit être faite la correction.

Dans la pratique, l'angle C formé par les deux verticales est excessivement petit, et on peut le supprimer dans la formule; quelques cas exceptionnels exigeraient seuls sa conservation.

Il est plus avantageux de régler simultanément deux éclimètres, par un procédé analogue : les deux instruments étant placés à une distance convenable, on dirige l'axe optique de la lunette de l'un d'eux sur l'objectif de celle de l'autre, et réciproquement, de manière que ce sont bien réellement deux distances zénithales réciproques que l'on observe.

Si e, e' représentent les erreurs de collimation des deux éclimètres, on a $\Delta = \delta + e - r, \quad \Delta' = \delta' + e' - r$

d'où $e + e' = \Delta + \Delta' + 2r - (\delta + \delta')$. $\quad e + e' = \Delta + \Delta' - C - 200 + 2r.$

Connaissant la somme des deux erreurs, on trouvera chacune d'elles, si l'on connaît aussi leur différence. Rien n'est plus facile que de la trouver, puisqu'il suffit de prendre la même distance zénithale avec les deux éclimètres. Soient d et d' les nombres qu'ils indiquent, il est évident que $e - e' = d - d'$,

et qu'ainsi $\quad e = \dfrac{\Delta + \Delta' - 200 - C + 2r}{2} + \dfrac{d - d'}{2}$

$$e' = \frac{\Delta + \Delta' - 200 - C + 2r}{2} - \frac{d - d'}{2}$$

Ce procédé d'opérations doubles et simultanées annule la cause d'erreur que nous avons mentionnée plus haut, mais il n'est pas applicable dans la généralité des cas où un opérateur isolé doit régler souvent l'éclimètre dont il dispose, par suite de différentes circonstances de choc, de variations de température, qui peuvent amener quelque modification dans l'instrument.

On peut encore régler un éclimètre à un seul limbe ou à deux limbes en contrôlant une indication donnée par lui avec la véritable indication qu'il devrait fournir ; l'erreur cherchée étant de collimation, c'est-à-dire constante, il suffit en effet de l'apprécier dans une circonstance particulière. Mais il faut connaître cette valeur exacte que devrait fournir la lecture, et on ne peut l'obtenir que par une expérimentation différente de celle qu'emploie habituellement l'éclimètre, puisque c'est celle-ci qu'il s'agit de contrôler. L'éclimètre, comme tout instrument ayant un limbe vertical, peut donner une distance zénithale sans le secours d'un niveau à bulle d'air ; il suffit pour cela de l'employer comme le sextant gradué, qui, au lieu de mesurer directement cette distance zénithale, mesure, comme angle compris entre deux objets, celui qui est formé par un point de la nature, et sa réflexion sur un horizon artificiel comme un bain d'encre, de goudron ou simplement d'eau. On peut encore, et toujours comme avec le même instrument, observer dans certains cas, l'angle formé par une direction quelconque avec l'horizon de la mer.

Le premier mode d'observation fournit le double de l'angle à l'horizon ; le second donne la valeur simple de ce même angle.

Inscription des renseignements. — Pour éviter toute confusion ultérieure, il est bon que l'observateur soit muni d'un registre sur lequel il transcrit, sur les lieux, les renseignements recueillis à mesure qu'ils se présentent.

Ce registre peut avoir la forme suivante, ou toute autre analogue.

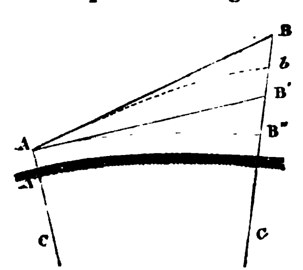
DÉSIGNATION des points nivelés.	ANGLES OBSERVÉS		DÉSIGNATION du pointé.	HAUTEUR de l'instrument.	COTES.	OBSERVATIONS.
	Ascension.	Dépression.				
Du point (1) sur 2.	2g 25	»	»	1 30		
De (2). . . . . (3).	»	1g 50	sol	1 20		
De (3). . . . . (4).	3 25	»	sol	1 20		
Etc.						

Ce tableau est dressé pour l'emploi des éclimètres qui donnent les angles avec l'horizon. Il ne faut qu'une colonne pour les angles observés, lorsque l'origine des graduations est supposée au zénith.

44. Formule du nivellement topographique. — Les clisimètres ont donné l'angle à l'horizon H, ou son complément la distance zénithale Δ, en sorte que si la terre était plane, la différence de niveau serait donnée par la formule

$$dN = K \text{ tang. } H = K \cot. \Delta$$

dans laquelle K désigne la base.



Mais la terre n'étant pas plane, les verticales convergent, de sorte que la différence de niveau entre deux points comparés A et B, est en réalité BB″, qui peut se décomposer en deux parties, BB′ et B′B″.

La première partie BB′ serait celle que donne la formule $dN = K \text{tang.} H$, si la terre était plane. En réalité, le triangle ABB′ n'est pas rectangle, mais il sera d'autant plus près de l'être que l'angle au centre C sera petit ; dans les observations topographiques, cet angle est réellement si petit (1′ pour 1 kilomètre environ), qu'on peut, sans erreur sensible, le regarder comme tel et prendre BB′ = K tang. H.

Différence du niveau vrai ou niveau apparent. — Cette différence représente la seconde partie B′B″ qui, en désignant par R le rayon

de la terre, est un des éléments de la formule

$$B'B'' \times (2R + B'B'') = K^2$$

qui ne fait qu'exprimer que la tangente à un cercle est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.

Par suite de la petitesse de B'B'' par rapport à 2R, cette formule peut, très-approximativement, être remplacée par la suivante, $B'B'' \times 2R = K^2$, qui donne $B'B'' = \frac{K^2}{2R}$, et par suite $B'B'' = K \text{ tang. } H + \frac{K^2}{2R}$.

Erreur de réfraction. — Mais la réfraction des rayons lumineux qui traversent, en s'approchant du sol, des couches d'air de densités généralement croissantes, a fait apercevoir, suivant AB, un point qui, en réalité, occupait la position *b*, et la différence de niveau prise égale à BB'' a été estimée trop forte de $Bb = Kr$ approximativement, en supposant que *r* représente l'angle très-petit BA*b*, et en confondant, comme cela a déjà été fait précédemment, les différentes longueurs AB, AB', A*b* avec l'arc de cercle AB'' et celui-ci avec sa projection K sur la planimétrie.

La géodésie, discutant plus sérieusement que nous ne pouvons le faire ici l'influence de la réfraction, fait savoir que dans les circonstances ordinaires, on peut se contenter de prendre $r = 0{,}08$ de l'angle au centre égal à $\frac{K}{R}$; le déplacement du point visé *b* estimé suivant la verticale sera donc $0{,}08 \frac{K^2}{2R}$, et la valeur de la différence du niveau deviendra

$$dN = bB'' = K \text{ tang. } H + \frac{K^2}{2R} - 0{,}08 \frac{K^2}{R} = K \text{ tang. } H + 0{,}42 \frac{K^2}{R}$$

Hauteur de l'instrument. — Il arrive rarement qu'on puisse placer le centre du limbe de l'éclimètre au point même qui est à niveler et, dans la plupart des circonstances, on doit l'établir en A, tandis que le point à comparer à B était A', situé au-dessous de l'instrument. En prêtant le signe + à ce genre de déplacement, c'est-à-dire à celui qui se présente quand on stationne *au-dessus du point nivelé*, on voit, à la seule inspection de la figure, que la différence de niveau doit être augmentée de la distance AA', habituellement désignée par *d*T, en sorte que son expres-

sion finale est

$$dN = K \text{ tang. } H + 0,42 \frac{K^2}{R} + dT$$

Cette formule sert au calcul d'une cote, quel que soit le point connu, station ou mire ; les deux cotes des deux points comparés sont en effet liées par la relation

$$\text{cote de la station} = \text{cote du point visé} - \left(K \text{ tang. } H + 0,42 \frac{K^2}{R} + dT\right)$$

dans laquelle une quelconque des deux cotes peut être l'inconnue.

On remarquera que, contrairement à l'assertion émise quelquefois, tous les termes ont le même signe algébrique dans la parenthèse qui peut, elle, varier de signe suivant qu'on stationne au point connu ou à celui qui ne l'est pas.

Dans le cas de la figure, on a prêté le signe + aux quantités employées H et dT, c'est-à-dire aux angles d'*ascension* et aux hauteurs de l'instrument *au-dessus* du point étudié.

Si les circonstances viennent à être différentes de celles qui ont été admises dans la recherche de la formule, si les quantités viennent à changer de *sens*, ce qui arrive dans le cas où l'angle observé est de *dépression* et dans celui où l'instrument se trouve placé *au-dessous* du point vrai, leurs expressions algébriques devront changer de *signe* et être affectées du signe —. Le terme $0,42 \frac{K^2}{R}$, qui n'a nécessité aucune hypothèse de signe, conserve toujours le signe + dans la parenthèse.

Les considérations qui précèdent et les conséquences qu'on en a déduites sont conformes à celles qui se présentent dans tous les cas analogues de toutes les branches des sciences mathématiques ; le changement de sens entraîne forcément le changement de signe, et réciproquement.

45. Calcul numérique des cotes. — Le terme $0,42 \frac{K^2}{R}$, relatif à la différence du niveau vrai et du niveau apparent, a souvent peu d'importance en topographie, par suite de la petitesse des bases K ; il n'est que d'environ 1^m pour un côté de 4000^m ; aussi le néglige-t-on quelquefois, mais à tort pensons-nous, à moins que le côté ne devienne d'une extrême petitesse ; il est bien vrai que le nivellement topographique ne donne pas les cotes avec une rigueur très-grande, mais est-ce une raison pour ajouter encore aux erreurs inévitables une autre erreur qu'on

peut facilement corriger au moyen d'une table à simple entrée, dont l'argument est K, et qui donne directement ce terme correctif?

Le terme le plus important K tang. H ou K cot. Δ, peut être calculé au moyen des tables de logarithmes, mais il est plus simple d'employer à cet usage des tables à double entrée dont les arguments sont K et Δ ou H.

Le croquis suivant peut donner l'idée d'une de ces tables qui, comme celle que nous avons précédement mentionnée, se trouve insérée dans l'*Agenda d'état-major*.

DISTANCES zénithales.	ANGLES avec l'horizon.	BASES HORIZONTALES 1	2	3	4	5	6	7	8	9
		VERTICALES OU DIFFÉRENCES DE HAUTEURS.								
91	9g	0,142	0,285	0,427	0,569	0,712	0,854	0,996	1,139	1,284
90.90	9 10	...	...	...	...	...	...	...	...	...
90.80	9 20	...	...	...	...	...	...	...	...	...
.....	.....	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Supposons, pour donner un type du calcul, que le terme à calculer soit

$$K \text{ tang. } H = 654^m \text{ tang. } 9^g$$

On cherche d'abord l'angle 9g dans la table, et décomposant la base 654 en ses différentes unités 600 + 50 + 4, on trouve sur la ligne qui contient l'indication de l'angle les nombres 0,854, 0,712, 0,569 qui représentent les différences de niveau pour un angle de 9g et pour des bases 6, 5, 4 : pour les éléments réels de la base, ils doivent être multipliés par 100, par 10 et par 1, et ils deviennent 85,4 — 7,12 — 5,69 dont la somme 98,21 représente la différence de niveau totale exprimée avec la même unité que celle employée dans l'expression de K.

Lorsque l'angle observé ne se trouve pas directement écrit dans la table, on lui substitue l'angle immédiatement inférieur ou supérieur, et on trouve la correction qu'il faut faire subir au résultat obtenu, par une interpolation ou proportion.

Pour éviter les erreurs qui se présentent si souvent dans les

calculs effectués sans ordre, on destine à ceux qui sont relatifs au nivellement topographique, un tableau du genre de celui qui suit.

Calcul des cotes du nivellement topographique.

Point visé connu . 1.	K = 1254	$dT = + \ 1^m,2$	$N = \ 600^m,0$	
		$2^e \ t = + \ 0,1$	$dN = - \ 103,9$	
Station inconnue. 2.	H = +5,15	$dn = + 104,6$	$N' = \ 497,1$	
Station connue. 3.	H = −5,15	$dT = - \ 5^m,4$	$N = \ 600^m,0$	
		$2^e \ t = - \ 0,1$	$dN = - \ 106,9$	
Point visé inconnu 4.	K = 1254	$dn = - 101,6$	$N' = \ 493,1$	
. . . .	. = . . .	$dT =$	$N =$	
		$2^e \ t =$	$dN =$	
. . . .	. = . . .	$dn =$	$N' =$	

Ce tableau se rapporte aux notations suivantes :

cote du point visé = cote de la station + dN

$$dN = (dT + 2^e \text{ terme} + dn)$$

dT hauteur de l'instrument

$$2^e \text{ terme} = 0,42 \frac{K^2}{R}$$

$$dn = K \text{ tang. } H = K \cot. \Delta$$

N cote du point connu — N′ cote du point inconnu

Les exemples numériques qui y sont inscrits se rapportent aux principaux cas qui peuvent se présenter; dans le premier, on a employé un angle d'ascension et on a supposé l'instrument placé *au-dessus* de la station vraie à niveler; dans le second, l'angle est de dépression, et l'instrument supposé placé *au-dessous* de la station, comme cela se présenterait, par exemple, dans un clocher dont la flèche serait le point coté.

Calcul approximatif. — On n'a quelquefois pas à sa disposition les tables dont nous avons donné la description, ou l'on désire

faire le calcul sur le terrain. On peut opérer assez exactement de la manière suivante :

1° Le 2e terme, $0,42\,\frac{K^2}{R}$ est égal à $1^m,055$ pour une base de 4000^m; si on le prend égal à 1^m, on commet au résultat une erreur de $\frac{55}{1000}$, un peu plus de $\frac{1}{18}$ de la valeur du terme qui, toujours très-petit, est suffisamment déterminé avec cette approximation. Si l'on observe ensuite que ce terme varie proportionnellement à K^2, on verra que dans une circonstance quelconque on le trouvera assez exactement par la formule 2e *terme* $= \frac{K^2}{4000}$, dans laquelle la puissantiation et la division pourront être faites d'une manière très-abrégée.

2° On pourra trouver $dn = K$ tang. H, si on a eu soin de se munir d'une petite table des tangentes qui peut être inscrite sur la simple feuille d'un carnet. Mieux encore, sans aucun renseignement écrit, il suffira de se rappeler que $\pi = 3,1415$ représentant le rapport de la $\frac{1}{2}$ circonférence au rayon, exprime l'angle de 200^g, et que par suite $1^g = 0,0157$, $1' = 0,000157$, ce qui permettra de trouver par une multiplication la valeur de K.H. La vraie valeur du terme est K tang. H, mais l'angle H est toujours petit, le terme lui-même l'est aussi, et le résultat de la multiplication indiquée ne donnera généralement qu'une erreur bien faible. Si par exemple on observe sous un angle de 5^g qui approche de la limite des angles réellement employés, et qui ne peut répondre qu'à une base petite, on trouve que la valeur exacte est tang. $5^g = 0,0787$; si on opère comme nous venons de l'indiquer, on a $5^g = 0,0785$, et l'erreur qui en résulte $\frac{2}{787} = \frac{1}{393}$ de la valeur vraie du terme cherché, est bien au-dessous de celles qui, indépendantes du calcul, proviennent de la nature même des renseignements observés.

46. **Tracé des courbes horizontales.** — Ce tracé doit se faire par la méthode qui a été indiquée au § 38 ; les profils donnés exactement par le nivellement continu qui a pu les choisir dans des directions convenables, se trouvent remplacés ici par des sections verticales, souvent mal placées par rapport aux formes du terrain, sections qui résultent de la jonction de deux points cotés, quelquefois très-éloignés l'un de l'autre. Les circonstances seront donc beaucoup plus défavorables que dans le cas précité, et le rôle des *figurés à vue* exécutés à l'œil, à l'aspect

des formes du terrain, jouera un très-grand rôle dans le résultat. Ce figuré s'appuiera, il est vrai, sur certains renseignements recueillis en planimétrie, renseignements dont on s'occupera au chapitre suivant, et qui permettront de préciser sur le dessin certaines des lignes importantes de celui-ci. Mais dans les intervalles de ces lignes, mais sur ces lignes mêmes, comment placera-t-on les inflexions, comment partagera-t-on la pente ? Le figuré à vue pourra seul servir de guide à ce sujet, aussi constitue-t-il la partie la plus importante du nivellement topographique, et ne peut-il être convenablement exécuté que par un œil très-exercé. Les cotes obtenues servent seulement à le contrôler dans certaines de ses parties, et à préciser les intensités des pentes dont il n'a pu donner qu'un aperçu relatif.

On doit conclure de ce qui précède qu'un tel travail, basé même sur des cotes exactes, n'a pas une précision mathématique ; il ne faut raisonnablement lui demander que des indications approximatives. Et encore, pour arriver à ce résultat, les cotes doivent avoir été calculées au moyen d'observations faites elles-mêmes très-exactement.

Quelque soin qu'on ait apporté dans les observations, elles seront toujours entachées de quelque erreur.

47. **Causes des erreurs commises sur les cotes.** — Pour un nivellement relatif à un levé régulier, l'instrument à employer est l'éclimètre. Théoriquement, il peut donner les angles avec une grande approximation ; dans la pratique, les résultats seront entachés d'erreurs provenant de plusieurs causes plus ou moins influentes. Ces causes sont les suivantes :

1° Rotation de la lunette autour d'un point différant quelque peu du centre du limbe ;

2° Non-verticalité du limbe ;

3° Non-parallélisme de l'axe optique et du plan du limbe ;

4° Correction incomplète de l'erreur de collimation ;

5° Imperfection de l'œil et jeu de la lunette (*Optique, — Applications*) ;

6° Lecture de l'angle.

Toutes ces causes combinées entachent les angles d'erreurs plus graves que celles qu'on se croirait, à première vue, en droit de ne pas tolérer.

D'un autre côté, les bases ne sont qu'imparfaitement fournies

par la planimétrie, en sorte que le calcul de la formule

$$dN = K\,\text{tang.}\,H + 0{,}42\,\frac{K^2}{R} + dT$$

se fera forcément avec des éléments erronés.

Influence d'une erreur angulaire. — Cette erreur n'a d'influence que sur le terme $K \cot. \delta = K\,\text{tang.}\,H$. Si, au lieu de mettre H dans le calcul de ce terme, on y introduit l'angle affecté d'une petite erreur h, il deviendra, approximativement,

$$K\,\text{tang.}H + Kh$$

et l'erreur sur la cote sera Kh.

Il sera donc avantageux de se servir de bases petites.

Influence d'une erreur de base. La planimétrie, quelque bien faite qu'elle soit, ne donnera le côté K exactement que par hasard; il sera presque toujours augmenté ou diminué d'une petite erreur k, qui influera sur les deux termes de la différence de niveau; voyons d'abord ce qui aura lieu pour le second. Au lieu de $0{,}42\frac{K^2}{R}$, on prendra involontairement

$$0{,}42\frac{(K+k)^2}{R} = 0{,}42\frac{K^2}{R} + 0{,}42\frac{2Kk}{R}$$

en négligeant k^2 excessivement petit. L'erreur sur la différence de niveau sera $0{,}42\frac{2Kk}{R}$, dont le rapport avec le terme lui-même sera $\frac{2k}{K}$.

k sera toujours assez petit par rapport à K, pour que l'erreur résultant du produit du terme $0{,}42\frac{K^2}{R}$ par le facteur $\frac{2k}{K}$ soit négligeable, puisque nous savons que ce terme est lui-même toujours très-petit.

Il reste à examiner l'influence de k sur le terme principal de la différence de niveau $K\,\text{tang.}H$.

L'erreur qui en résulte est évidemment $k\,\text{tang.}H$, qui sera d'autant plus petite qu'on observera de petits angles à l'horizon.

Influence des erreurs simultanées d'angle et de base. En négligeant la partie qui provient de l'effet des deux erreurs l'une sur l'autre, l'erreur totale sera

$$E = Kh + k\,\text{tang.}H.$$

Pour être petite, indépendamment des cas de compensation imprévue, cette erreur exige, outre l'exactitude des opérations, qu'on observe *proche de l'horizon et sur de petites bases.*

48. Vérification probable des cotes et de l'ensemble d'un nivellement. — On prend la cote d'un même point sur plusieurs bases, autant que possible, en ne l'admettant que lorsque ses différentes valeurs concordent avec une certaine approximation; mais, dans ce cas même, en doit-on conclure que la cote est bonne? Non, car il suffit que

$$Kh - K'h' + k \text{ tang. } H - k' \text{ tang. } H' < \alpha$$

α désignant la limite tolérée.

Si l'on regardait cette inégalité comme une équation, il y aurait une infinité de systèmes h, h', k, k', pouvant y satisfaire. Si de plus on suppose à α toutes les valeurs possibles $< \pm$ la différence tolérée, il y aura encore beaucoup plus de chances pour que le système des erreurs réellement commises soit compris dans ceux (en nombre infini) qui satisfont l'inégalité, et cela tout en laissant à h et k, par exemple, des valeurs notables qui donnent une certaine importance à $Kh + k$ tang. H, c'est-à-dire à l'erreur commise sur la cote.

Quand, au lieu de deux résultats concordants, on en obtient trois, les probabilités d'exactitude sont plus grandes, car il n'est pas à présumer que les compensations existent toujours; il peut aussi bien se présenter des aggravations. Remarquons pourtant que certaines causes d'erreur peuvent agir toujours dans le même sens; il en est ainsi de l'erreur de collimation, et en partie des erreurs personnelles de pointé et de lecture.

Pour faire disparaître autant que possible l'influence de cette constance qui, en laissant subsister des erreurs, ne permet pas d'en reconnaître l'existence, par suite de la forme $Kh - K'h'$ d'un des termes de la vérification, il est bon de remarquer que si $h = h'$, ce terme prenant la forme $(K - K')\,h$, sera d'autant plus sensible que *les deux bases seront différentes de longueur*. Comme c'est de la valeur de ce terme que dépend en partie la vérification, il est bon de choisir des bases très-dissemblables.

Quant à la seconde partie, k tang. H — k' tang. H', il est évident que, toutes circonstances égales d'ailleurs, elle sera d'autant plus mise en vue que les deux hauteurs H et H' seront plus différentes l'une de l'autre.

Cependant, en thèse générale, il y a lieu de conclure que plus les opérations concordantes seront multipliées pour un même point, plus il y aura probabilité que les erreurs font plus que se compenser et qu'elles sont nulles ou à peu près.

De même, la concordance acquiert une plus grande importance quand elle se rapporte à l'ensemble des opérations multiples d'un travail d'ensemble, car alors il n'est plus admissible que les compensations se soient toujours établies, dans des circonstances très-diverses, avec un instrument réglé plusieurs fois. L'expérience a prouvé qu'on ne pouvait pas demander une concordance moindre que 1 à 2ᵐ, pour les différentes cotes d'un même point, obtenues sur plusieurs bases.

Remarquons que cela ne dit pas que la cote est obtenue à 1 ou 2ᵐ près; mais cette approximation, sur la valeur absolue, est d'autant plus près d'être atteinte que l'ensemble du travail est lui-même concordant, dans celles des opérations multiples qu'il a effectuées.

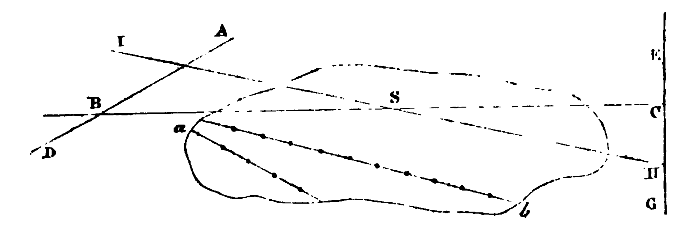
Le calcul des cotes sur plusieurs bases a encore l'avantage d'avertir des erreurs grossières qui auraient pu se produire par inadvertance.

49. **Des sondes.** — Un nivellement, pour être complet, doit embrasser aussi les cotes du terrain couvert par les eaux. C'est au moyen de sondes que l'on se procure ces cotes.

Si les eaux sont stagnantes, il suffit d'avoir les cotes relativement à leur niveau supposé connu. Si l'eau est guéable, un homme entre dedans et sonde avec une mire graduée; on détermine par recoupement les différentes positions qu'il occupe, de deux points connus du rivage. Si l'eau est trop profonde, on se sert d'une barque et d'une sonde, c'est-à-dire d'un cordeau à l'extrémité duquel est suspendu un poids. Les points de sonde sont, comme dans le cas précédent, déterminés par deux observations simultanées. Si les deux observateurs sont dépourvus d'instruments, ils emploient la méthode des alignements.

Supposons connus les points A, D, G. E, C, I. Le premier observateur pourra, partant de A, se diriger sur D et s'arrêter en B au moment où il sera sur l'alignement du canot en S et d'un point connu C : la distance AB étant mesurée, on pourra tracer la projection de BC sur le plan. Le second observateur marchant de G en E s'arrêtera de même quand il sera parvenu en H sur l'alignement SI qui, reporté sur le papier, donnera, par

son intersection avec BC, la position du canot, et par conséquent le point où la cote doit être inscrite.



Si la surface des eaux à sonder est peu spacieuse ou peu large, on tend, d'un bord à l'autre, une corde dans les directions connues. Cette corde peut être graduée, et, dans ce cas, on fait couler la sonde à chaque division. Par ce moyen, on peut obtenir une connaissance approximative des formes du terrain submergé.

C'est surtout aux approches des côtes qu'il est essentiel de connaître la profondeur de la mer et la nature du fond; c'est encore au moyen des sondes que l'on y parvient.

L'instrument employé à cet usage est composé du plomb et de la ligne. Le plomb de sonde est une pyramide tronquée, à la base de laquelle on pratique un creux de $0^m,03$ environ de profondeur pour y mettre du suif. A la base supérieure est fixé un crochet auquel on attache la ligne, qui a ordinairement 200^m de longueur. Le plomb de sonde pèse de 5 à 100 livres. Le suif est destiné à prendre l'empreinte des roches, à retenir du sable ou de la vase, et à faire ainsi connaître la nature du fond.

On obtient les positions du canot par les opérations simultanées faites par deux personnes placées à terre, et qui, à un signal donné par celui qui opère dans la barque, dirigent chacune un rayon visuel sur un point de mire tel qu'un drapeau placé dans le canot. Il est assez difficile de saisir l'instant précis du signal, et d'ailleurs, il faudrait trois observateurs pour qu'il y eût vérification.

Une autre méthode, préférable encore, consiste en ce qu'un observateur soit embarqué, muni de trois instruments à réflexion, trois sextants par exemple. A l'instant où le plomb de sonde prend terre, il observe, avec l'un des instruments, l'angle entre deux points connus de la côte sans s'occuper de le lire; il observe rapidement avec un autre sextant l'angle entre l'un de ces points et un troisième également connu; le dernier instrument est, de la même manière, employé par lui à mesurer le troisième angle

que fournissent les trois points visés combinés deux à deux. C'est alors seulement que l'observateur lit les angles et construit la position au moyen des segments capables. Si l'on n'a pas de goniomètre à sa disposition, on pourra encore déterminer d'une manière approchée les stations par alignement, connaissant d'avance la position de quelque point remarquable en mer, comme une pointe de roc, une balise, un fort, etc. On s'y transportera, puis on avancera vers un point déterminé de la côte, en comptant les distances entre les stations au moyen du loch.

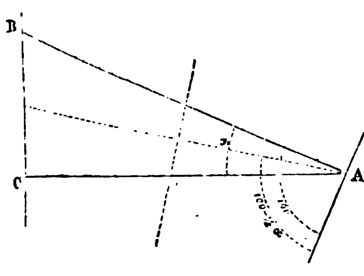
Les sondes ainsi obtenues ne sont pas celles que l'on inscrit sur les cartes hydrographiques, puisque la mer variant sans cesse de hauteur, il ne peut exister d'ensemble entre les opérations faites à des instants différents. On les ramène à la surface de basse mer aux équinoxes. Pour opérer cette réduction, il faut connaître de combien la mer était élevée au-dessus de ce niveau au jour et à l'heure auxquels on a sondé. On fait usage pour cela de l'échelle des marées; c'est un long madrier disposé verticalement à l'entrée des ports, sur lequel est tracé le niveau de la basse mer des équinoxes et son élévation successive de quart d'heure en quart d'heure, en sorte qu'en notant l'heure précise à laquelle on a mesuré chaque sonde, on aura de suite par l'échelle la plus voisine du lieu de l'opération la quantité qu'il faut ajouter. Quand on n'est pas à portée d'une telle échelle, on en fait élever une provisoire sur le rivage; on y trace les hauteurs de la mer de 15 en 15 minutes, on rapporte les sondes mesurées au point le plus bas de cette échelle, et plus tard, on tient compte de la différence de hauteur de ce terme de comparaison à l'échelle des marées la plus voisine.

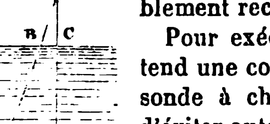
Si l'on voulait que les sondes du littoral de la France fussent d'accord avec celles inscrites sur la nouvelle carte, c'est-à-dire rapportées à la même surface générale de comparaison, le niveau moyen de la mer, il faudrait se rappeler que ce niveau, constant pour chaque jour de l'année, est précisément la moyenne entre la plus grande et la plus petite élévation quotidienne, quels que soient les heures de haute et basse mer, l'établissement du port qui varie d'un lieu à un autre en raison des circonstances locales, etc.

Les sondes, dans les cours d'eau, sont de la plus grande utilité, soit pour reconnaître les gués, soit pour calculer le volume d'eau, etc. Pour bien connaître le fond d'une rivière, on pratique un nivellement longitudinal et des nivellements transver-

saux. Le premier se fait suivant l'axe de la rivière, c'est-à-dire suivant la ligne qui est toujours à égale distance des deux rives : les distances se comptent et les profils transversaux se font sur les normales à la ligne milieu.

Si AB, AC sont respectivement perpendiculaires aux deux rives, l'angle de ces droites sera le même que celui des bords de la rivière. Soit α cet angle, la normale à l'axe fera avec chacune des lignes AB, AC, un angle $\frac{\alpha}{2}$. Faisant donc en A un angle égal à $100^g - \frac{\alpha}{2}$ avec le rivage, on aura la direction du profil transversal dont le point milieu appartiendra au profil longitudinal. Ce que nous disons pour deux rives en ligne droite s'applique également à celles qui sont curvilignes en les décomposant en petits côtés sensiblement rectilignes.





Pour exécuter le profil transversal, on tend une corde graduée de A en B et l'on sonde à chacune de ses divisions. Afin d'éviter autant que possible l'erreur due à la flexion de la corde, on suspend de forts poids à ses extrémités, ou l'on emploie un treuil si faire se peut. On abandonne ce moyen pour l'un de ceux indiqués précédemment, si le cours d'eau est trop large.

Comme la ligne peut être entraînée par le courant et éprouver une courbure qui donne une indication trop grande, il est bon de calculer la verticale au moyen de la proportion

$$AB : AC :: AD : AE \quad \text{d'où} \quad AE = \frac{AC.AD}{AB}$$

CHAPITRE X

ENSEMBLE DES OPÉRATIONS RELATIVES AU NIVELLEMENT TOPOGRAPHIQUE

Nous avons décrit, dans le chapitre précédent, la marche à suivre pour la détermination des cotes des points principaux et indiqué la manière approximative de tracer les courbes horizontales sur le dessin.

Nous allons préciser dans celui-ci les différentes opérations qui doivent être exécutées sur le terrain pour l'exécution du nivellement topographique.

Ces opérations sont de trois sortes : 1° détermination des cotes; 2° levé de quelques lignes et de quelques points remarquables quant aux formes du sol ; 3° exécution de figurés à vue.

50. Points cotés. — Si l'on connaît d'avance les cotes de certains points trigonométriques, on se transporte d'abord et successivement à chacun d'eux pour s'assurer qu'ils s'accordent ensemble, sinon on les rejette. Supposons qu'on n'en ait aucun, on se place à l'un des points de sa propre triangulation, auquel on attribue une cote arbitraire. On y observe les distances zénithales doubles de tous les autres points du canevas, de ceux du moins qui sont visibles. On emploie, pour cela, la méthode indiquée pour régler l'éclimètre : on lit les deux verniers, et l'on en déduit les distances zénithales aussi parfaites que le comporte l'instrument et, par suite, les cotes de tous les points visés. On opère de même, à chacun des points principaux, pour avoir des vérifications. Dans les observations ultérieures on se contentera d'observer les distances zénithales simples.

On détermine ensuite les cotes des points détail ; pour cela on les vise des stations trigonométriques, ou en s'y transportant on vise ceux-ci ; pour opérer de la première manière il est nécessaire que ces points, importants pour le nivellement, soient aussi remar-

quables en planimétrie, afin qu'on puisse reconnaître leurs positions sur le dessin du levé; cela arrive assez rarement, d'abord parce qu'ils peuvent n'être précisés par aucun détail, et en second lieu parce que les cotes doivent être celles du sol et non pas celles de points quelconques, comme sommets de cheminée, d'arbres, de moulins qui auront pu être visés, tandis que les points correspondants du sol auront pu être invisibles.

C'est donc en stationnant habituellement aux points mêmes à niveler qu'on déterminera les éléments nécessaires au calcul de leurs cotes.

Pour s'aider dans ce travail, il est bon de déterminer les cotes de quelques points secondaires bien visibles, tels que des pignons de ferme, sommets d'arbres isolés, et sans se préoccuper de celles de leurs projections sur le sol, car il arrive en effet souvent que, de points très-importants pour le relief, comme un fond de ravin, par exemple, on ne voit aucun point du canevas. On arrive à ce résultat en regardant une certaine station, alternativement comme connue et inconnue. On cherche à cet effet un point du terrain S, duquel on aperçoit un point connu A, en hauteur, et un second point X, qu'on présume ou qu'on sait devoir être utile dans l'exécution d'une partie du travail d'où les points cotés sont invisibles. La connaissance de la cote de A et de la base AS conduit à celle de la cote de S, puis celle-ci combinée avec la mesure de SX prise sur la planimétrie, engendre à son tour la cote de X.

Il va sans dire que si X n'est pas déjà connu en projection, il y a lieu de déterminer celle-ci.

Les résultats obtenus ainsi pour les points secondaires tels que X, qui ont pu ne pas être visibles des points trigonométriques (on appelle ainsi les points du canevas), seront d'autant meilleurs que la cote de S aura été obtenue sur un plus grand nombre de bases; ils offriront en outre une plus grande chance d'exactitude, si plusieurs stations S, S′, S″ ont été employées à leur détermination, et si les résultats fournis par les calculs divers ont fourni des résultats concordants.

Quelquefois, il n'est même pas possible d'employer ce procédé pour étudier des portions d'un terrain trop caché, comme cela arrive dans certains ravins ombragés, dans des bois, dans des villes au sol accidenté. Il faut faire alors une espèce de cheminement de nivellement, en partant d'un point connu situé aux abords de l'obstacle, mener des horizontales successives par

la lunette de l'éclimètre mis au zéro des graduations, et voir quels sont les points du terrain coupés par ces horizontales, s'y transporter, et allant ainsi de proche en proche, arriver à une cote finale égale à celle de départ augmentée d'autant de fois la hauteur de l'instrument qu'il y a eu de stations faites.

On peut également, pour arriver au même résultat, décomposer la base rectiligne ou brisée qui sépare le dernier point du nivellement et celui qui fait l'objet de la recherche, en éléments rectilignes, dont on détermine les pentes, avec l'éclimètre, en visant parallèlement au sol; puis, mesurant en longueur ces différents éléments, on n'aura plus qu'à résoudre une suite de petits triangles rectangles par la formule ordinaire du nivellement topographique.

Ces deux procédés ne doivent être utilisés qu'avec une extrême sobriété, et seulement quand il s'agit de comparer deux points très-rapprochés.

On adjoint quelquefois à l'emploi des cotes celui de quelques *lignes de pente continue*, quand on en rencontre sur le terrain, ce qui se présente rarement. Pour cela on vise parallèlement à celui-ci, dans la direction de cette pente continue, et on recueille l'angle obtenu, ainsi que la longueur de cette ligne. On utilise ces renseignements pour trouver l'écartement des courbes, écartement mesuré suivant une direction quelconque, non perpendiculaire à ces courbes, en se rappelant que

$$\text{tang. incl}^{\text{n}} = \frac{E}{H} = \frac{e}{h}$$

E désignant l'équidistance, H l'écartement sur le terrain et e, h les éléments analogues réduits à l'échelle.

Il suit de là que, pour une valeur admise de l'équidistance graphique e, la connaissance de l'inclinaison conduira à celle de l'écartement h. Une table insérée dans l'agenda d'état-major, fournit ces différentes valeurs de h, en décimillimètres, pour l'hypothèse $e = 0^{m},0005$. Il ne reste plus, après avoir consulté cette table, qu'à rapporter graphiquement sur la projection déterminée, en ayant soin de faire glisser sur celle-ci, tous les points de passage des courbes, également espacés, de manière que le point de départ étant coté, ces passages soient convenablement placés par rapport à lui.

Terminons ce qui se rapporte à la détermination des renseignements angulaires à recueillir sur le terrain, en disant qu'il

est non-seulement indispensable de marquer sur la planimétrie les projections des points nivelés, mais qu'il est encore convenable de recueillir et d'inscrire dans le carnet des renseignements, les azimuts que forment les directions visées, afin de pouvoir parer plus tard à quelque oubli ou à quelque erreur.

51. Détermination de quelques lignes et points remarquables.—Les points dont on cherche les cotes ne doivent pas être pris au hasard. Autant que possible il faut les choisir de telle façon qu'ils précisent assez bien les formes du terrain. Les points qui satisfont le mieux à ces conditions sont les sommets, ceux où le terrain change de pente, le fond des vallées, les cols. Les premiers se définissent eux-mêmes; *le col*, très-important en ce sens qu'il est en quelque sorte le nœud des mouvements du terrain, est un point où viennent aboutir deux pentes ascendantes et deux pentes descendantes au moins. Assez généralement vague dans la nature, il est plutôt une surface qu'un point. Par cela même qu'il est peu précis on se contente de le déterminer à vue par rapport aux détails de la planimétrie qui l'entourent; si ces détails manquent il faut y suppléer par une détermination directe.

Nous savons que les cotes sont loin de suffire pour le tracé des courbes destinées à la représentation du relief. Pour s'aider dans l'exécution de ce tracé, il faut connaître, outre les projections des points dont nous venons de parler, celles de quelques lignes remarquables quant aux formes du terrain. Ce sont les changements de pente que l'aspect seul de la nature peut préciser, les *lignes de faîte ou de partage* et *les thalwegs ou lignes de réunion des eaux.*

Ces deux sortes de lignes que nous allons définir sont, de toutes celles qui servent à figurer rapidement les formes du relief du terrain, les seules que l'on puisse lever géométriquement, en raison de leurs propriétés caractéristiques. Pour les premières, leur qualification indique assez que de toutes les directions partant d'un point, la ligne de partage est celle qui a le moins de pente, quand on envisage le terrain de haut en bas, de telle sorte que les eaux pluviales qui tombent sur la surface du terrain se séparent suivant cette ligne pour s'écouler à droite et à gauche. De là résulte encore qu'entre deux plans consécutifs elle est la plus longue de toutes les normales aux sections horizontales. De sa propriété caractéristique, on déduit la ma-

nière de trouver sa direction quand on en connaît un point. En effet, l'éclimètre étant placé en ce point, on mesure l'inclinaison suivant plusieurs directions, et la plus petite indique la ligne de faîte. Ce serait le contraire si l'on était au bas de la pente et que l'on dût la suivre en montant, car alors la ligne de pente serait la plus inclinée, toute autre direction ferait un plus petit angle avec l'horizon et serait comprise entre la courbe horizontale et la ligne de faîte. En marchant et en mesurant sur cette ligne, jusqu'au moment où elle change de direction, on peut faire une opération analogue pour en déterminer le prolongement et ainsi de suite. Puisqu'elle est la plus longue de toutes les lignes du terrain qui, partant d'un même point, vont aboutir à la section horizontale placée au-dessous, il s'ensuit que sur elle se trouveront les points saillants des courbes. Il en sera de même des *thalwegs;* il est seulement à remarquer qu'ils seront ordinairement beaucoup plus faciles à trouver, parce qu'ils sont indiqués souvent par des rivières, des ruisseaux ou des fossés dans lesquels se réunissent les eaux qui descendent des deux versants. Il faut observer encore ici que la définition d'un thalweg doit exprimer dans quel sens on le considère : si en effet on l'observe de haut en bas, il est la ligne de plus grande pente; car en visant à sa droite ou à sa gauche, la direction se rapproche de la courbe horizontale; quand, au contraire, c'est de bas en haut qu'on l'envisage, il est la ligne de plus petite pente.

On se contente très-souvent de reconnaître simplement à l'œil, ces lignes qui dans la nature n'ont pas une précision mathématique, puis on les détermine graphiquement par les procédés ordinaires.

52. **Figurés à vue.** — Les figurés à vue forment la partie la plus difficile du nivellement topographique, et d'autant plus difficile que n'étant soumis à aucune règle fixe d'exécution, ils doivent présenter une certaine exactitude, que l'habitude acquise et l'habileté de l'opérateur peuvent seules lui fournir.

Nous ne pouvons donner à ce sujet que quelques renseignements bien vagues.

La meilleure manière d'opérer est de faire des figurés partiels autour de chaque point de station, que cette station soit faite en vue de l'exécution de la planimétrie, ou qu'elle ait pour but la détermination d'une cote. Malheureusement dans le premier cas

il se présente une difficulté qui tient à ce que, dans cette partie du travail, il y a souvent à effacer, et qu'en enlevant la partie défectueuse, projection ou relief, on enlève en même temps la partie bonne, relief ou projection. Cette difficulté se trouve encore augmentée par la nécessité dans laquelle on se trouve de ne dessiner les figurés partiels que très-légèrement, d'abord pour ne pas charger la planimétrie qui a besoin de plus de précision, et ensuite parce que ces figurés devront être raccordés, c'est-à-dire souvent modifiés.

Quoi qu'il en soit, que les stations appartiennent ou non au travail de la planimétrie, on ne devra d'abord y dessiner que ce qu'on voit ou ce qu'on croit voir à une faible distance. On emploiera pour cela, soit des courbes, soit des hachures légères; les premières sont plus expéditives, mais elles rendent mal les terrains plats en confondant leurs lignes avec celles de la planimétrie; les secondes sont d'un tracé qui demande beaucoup plus de temps et elles chargent trop le dessin quand les pentes sont rapides, inconvénient qui perd un peu de son importance quand on observe que, sur ces pentes, les détails de la planimétrie sont rares. Il leur reste, il est vrai, le défaut qui provient du temps employé; mais sous un certain point de vue ce défaut devient un avantage; les courbes dessinées trop vivement ne laissent pas le temps de l'étude à l'opérateur toujours un peu pressé; la hachure au contraire, qui prolonge sa station, le force en quelque sorte malgré lui à étudier davantage le mouvement qu'il veut rendre.

Lorsque des *figurés partiels* auront été ainsi exécutés de manière à couvrir tout le terrain, on devra, en parcourant celui-ci de nouveau, les relier entre eux pour avoir le *figuré à vue*.

Il sera bon, pour mieux saisir cet ensemble du relief, de voir le terrain sous différents aspects, d'en haut, d'en bas, de face, de côté, éclairé par une lumière qui, tombant de face, amoindrit l'apparence des plis du sol, éclairé par une lumière venant de côté qui, faisant naître des ombres portées, accentue au contraire trop vigoureusement ces plis du sol.

Enfin il faudra avoir vu beaucoup de mouvements de terrain et les avoir dessinés, pour les comprendre et en quelque sorte les deviner. Cette habitude et un certain tact inné particulier à ce genre de travail, pourront seuls conduire à rendre assez fidèlement le relief de la nature.

CHAPITRE XI

LEVÉS EXPÉDIÉS ET RECONNAISSANCES MILITAIRES

53. Les levés militaires sont ceux que l'on est obligé d'exécuter avec rapidité et parfois en présence de l'ennemi, soit avec des instruments spécialement consacrés à cet usage, soit même le plus souvent sans leur secours. Il est inutile d'insister sur l'utilité de pareils levés : il suffit de rappeler qu'ils servent de guides pour les mouvements de troupes, de canevas pour les projets de campements, de fortifications de campagne, passages de rivières, positions de troupes ; en un mot, qu'ils forment la base de toute reconnaissance militaire.

Les reconnaissances, dans toute l'acception du mot, se composent de deux parties distinctes : un plan topographique, y compris les légendes destinées à donner des notions exactes sur des choses que le dessin de la carte ne peut indiquer qu'imparfaitement, et les mémoires statistiques et militaires.

Mémoires. — Ces mémoires font connaître, avec toute la précision possible, les ressources de toute espèce que peut fournir le pays, et les avantages ou les inconvénients qu'il présente sous le rapport d'une occupation actuelle ou présumée.

La première partie des reconnaissances est tout entière du ressort de la topographie ; la seconde se rattache plus particulièrement à l'art militaire : aussi, n'en dirons-nous que quelques mots.

Les mémoires ou rapports doivent donner la description physique et géologique du terrain. Ils contiennent l'indication statistique des ressources que peut offrir le pays, sous le triple rapport des moyens de transport et de la subsistance, ainsi que du logement des hommes et des chevaux.

On y mentionne la nature des routes et des chemins ; leur état d'entretien et le genre de leur construction ; s'ils sont praticables en toutes saisons ou en été seulement ; s'ils peuvent servir ou non aux trois armes, infanterie, cavalerie et artillerie.

On y décrit les positions offensives ou défensives qui s'y trouvent ; les obstacles naturels qui peuvent venir en aide ou qu'il s'agirait de surmonter ; les travaux qu'il faudrait effectuer dans un cas donné, soit pour l'établissement d'un camp, soit pour assurer le passage de l'armée ou arrêter la marche de l'ennemi.

On y indique encore, et toujours en raison d'événements probables, le nombre d'hommes et les armes qui seraient nécessaires pour défendre une position, une ville, une place, etc., ou pour s'en rendre maître, pour forcer ou défendre un passage de rivière. On a soin, enfin, de relater les voies de communication qui relient le terrain parcouru aux points principaux qui en sont plus ou moins éloignés.

Il faut autant que possible que le style en soit clair et succinct ; on doit éviter d'y donner des détails oiseux ou étrangers au but dans lequel il est fait, ainsi que ceux que la simple inspection de la carte peut faire connaître.

Enfin l'écriture doit en être facilement lisible.

PLANIMÉTRIE EXPÉDIÉE

54. Les levés militaires ou expédiés faits avec des instruments, ayant pour but de faire connaître le terrain avec toute l'exactitude que comporte le peu de temps dont on peut disposer, il est évident que leurs principes doivent être les mêmes que ceux des levés réguliers. Toute la différence consistera dans l'emploi d'instruments plus portatifs et surtout moins volumineux, dans la substitution du mesurage au pas, à celui fait à l'aide de la chaîne ; dans l'estimation même à vue de certaines distances, de divers détails, etc. L'habitude fait encore juger des choses sur lesquelles il faut plus particulièrement porter son attention, et de celles que l'on peut négliger sans aucun inconvénient. Il est donc absolument nécessaire d'avoir beaucoup levé régulièrement, pour connaître la marche la plus simple et la plus générale, et pouvoir apprécier les erreurs causées par les avaries que peuvent subir les instruments.

On commencera toujours par déterminer, au moyen d'une triangulation, les points principaux auxquels on devra rattacher ensuite les levés de détails. Tout se réduira donc encore ici à mesurer une base et des angles. Cette base pourra quelquefois être fournie par des cartes régulières appartenant au matériel

topographique de l'armée, sinon on la mesurera à la chaîne ou au pas.

Dans le cas où l'on doit la mesurer, la base sera prise sur un terrain uni, élevé s'il est possible, et tel que de ses deux extrémités on découvre une grande étendue du terrain à lever. De là, par le plus petit nombre de stations que l'on pourra, on passera à deux points occupant une position centrale dans le levé et susceptibles de servir de stations : de ces deux points, on rayonnera et l'on recoupera tous ceux qui peuvent être reconnus et servir de points de repère pour le détail. De cette manière on multipliera le nombre des triangles, tout en diminuant la longueur de leurs côtés. Ceux-ci serviront à trouver une foule d'autres points, de telle sorte que le détail intermédiaire se fera facilement au pas et sans erreurs notables.

Le levé de détail devra se faire presque entièrement par intersections d'abord parce que cette méthode est beaucoup plus expéditive que le cheminement, et puis parce que le chaînage régulier entraînant déjà dans des erreurs appréciables, on conçoit combien plus grandes encore seront celles causées par le mesurage opéré d'une manière approximative. Ainsi donc, on se rappellera les principaux moyens que nous avons indiqués pour déterminer un point sans mesurer de ligne : ce sont les méthodes d'intersection et de recoupement, celles des segments capables, des courbes de recherche et de l'emploi du papier à calquer.

On partira de chaque point de station ainsi déterminé, et l'on figurera à vue et au pas tous les détails qui se trouveront à droite et à gauche d'une direction qui sera celle d'un côté de triangle, ou qui fera avec l'un d'eux un angle que l'on observera et rapportera immédiatement. De cette manière, on remplira très-vite et assez exactement la surface de chaque triangle. Ceci devrait être appliqué à tous les terrains : si on lève en pays découvert, l'opération est facile ; mais si on se trouve engagé dans un pays couvert, la difficulté augmente tellement qu'on est très-souvent obligé de recourir à la méthode de cheminement.

Si le terrain est découvert et si l'on a quelques hommes et du temps à sa disposition, on fera signaler des arbres remarquables par leur position ou leur élévation ; puis alors, en s'élevant au-dessus du sol par tous les moyens qu'offriront les localités, on déterminera chacun des points qui doivent devenir stations et servir de centres aux petites opérations de détail qui, pour chacun d'eux, ne s'étendront qu'à demi-distance des stations envi-

ronnantes. Ceux qui ont déjà levé savent combien une faible élévation d'un mètre seulement peut souvent augmenter l'étendue de l'horizon. L'officier à cheval aura donc déjà un grand avantage; mais alors il faudra qu'il emploie un instrument qui n'ait pas besoin d'établissement fixe. Si l'opérateur n'a pu faire signaler les points qu'il a choisis, il devra s'efforcer de vaincre la grande difficulté qu'on éprouve à reconnaître le même objet vu sous des aspects différents ou diversement éclairés. Dès lors, tout le guidera : le sommet d'un arbre d'une forme ou d'une couleur particulières, une pointe de rocher, une cheminée, la fumée même qui s'en échappe, si la cheminée cesse d'être visible. Il ne devra pas regarder comme perdu le temps qu'il consacrera à déterminer une bonne station : il le regagnera par la rapidité avec laquelle il opérera dans l'intérieur des triangles, certain qu'il sera de ne commettre que des erreurs médiocres, qui seront promptement rectifiées par la rencontre fréquente de points connus. Il y aura encore économie de temps en ce sens que, sur son croquis, l'officier dessinera avec la certitude de ne pas revenir sur ce qu'il aurait fait précédemment, tandis que, par la méthode du cheminement, il ne tracera une ligne qu'avec la crainte de l'effacer l'instant suivant pour la rectifier; ainsi, non-seulement il dessinera plus vite, mais encore sa minute sera plus nette.

Mais enfin, le pays pourra être tellement boisé qu'il soit impossible d'opérer autrement que par cheminement, et en ne se rattachant que de loin en loin à des repères connus. C'est alors que le travail devient très-pénible. Il faut déterminer, avec tout le soin possible, les directions principales que l'on suit et les points où elles se coupent : il faut faire, à chaque instant, des excursions à droite et à gauche pour trouver des issues et marcher en quelque sorte par une suite de petites reconnaissances partielles, avant de tracer une seule ligne sur le papier.

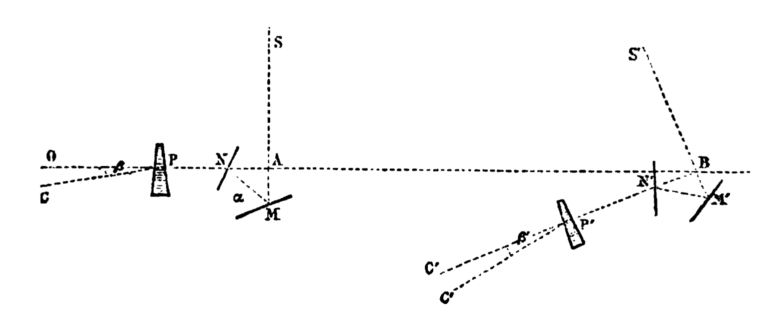
55. Mesure des distances. — *Étalonnage du pas.* — Cet étalonnage se fera par la comparaison de deux mesures, l'une exacte et provenant d'un renseignement quelconque, comme on en trouve par exemple sur les routes kilométrées, l'autre provenant du pas. Leur quotient indiquera par quel nombre il faudra diviser ensuite toute mesure obtenue au pas pour avoir la mesure vraie exprimée en mètres. Cette opération devra être répétée plusieurs fois.

Les résultats obtenus par l'emploi du pas laissent beaucoup à désirer ; pour le même individu le pas varie avec la pente du terrain, avec l'état des chemins, avec la chaleur, avec la fatigue.

On trace souvent une échelle graphique des pas, qui donne immédiatement par leur nombre, la longueur de la ligne correspondante à employer à l'échelle du levé.

Nous avons donné à la page 27 du chapitre II la description du *télomètre* du commandant Goulier, qui permet de mesurer les distances, sans les parcourir, au moyen de base de 20^m. Un second instrument de même nature et dont nous n'avons pas pu donner la description, au moment où nous avons expliqué le premier, parce qu'il nous était inconnu à l'époque convenable, peut conduire au même résultat que celui-ci.

Télémètre du capitaine Gautier. — Supposons que AS soit la distance à mesurer, et AB une petite base de 20^m perpendiculaire à AS ; le problème de la résolution du triangle ABS revient à la recherche de l'angle S ou de son complément B. Nous avons





dit comment M. Goulier traçait l'angle droit OAS au moyen d'un prisme à quatre faces et comment un second angle droit SBO' tracé de la même manière par un second observateur placé en B donnait une direction B'O' faisant avec AB un angle ABO'=ASB, et comment la mesure en était effectuée au moyen de deux lentilles, l'une fixe et l'autre mobile longitudinalement. Dans le télémètre de M. Gautier, la rectitude de l'angle A est obtenue, à la première station A, au moyen de deux miroirs plans formant entre eux un angle de 50^g, et à la seconde station l'angle ABO' est ramené à être nul au moyen d'une déviation apparente de la direction primitive AB, déviation obtenue au moyen d'un

prisme tournant dont la rotation nécessaire sert de mesure à cet angle.

Soient A la station, S le point de distance inconnu, M et N deux miroirs plans formant un angle α ; les rayons incident et réfléchi SM et NA feront entre eux un angle 2α ; supposons, en C, un point de la nature ou un jalon situé à une assez grande distance et envoyant des rayons lumineux sur un prisme P de petite ouverture angulaire ; ce point sera remplacé, par suite de la réfraction, par une image située dans le plan qui partant de C est perpendiculaire à l'arête du prisme ; si cette arête est verticale, le point C pourra être placé convenablement, dans le sens horizontal, pour que les rayons réfractés, tous parallèles entre eux, aient la direction NA, c'est-à-dire, pour que son image se confonde avec l'image doublement réfléchie du point S, ce qu'on pourra constater, comme dans les instruments ordinaires à réflexion, les deux miroirs n'occupant pas la totalité de l'espace rempli par les rayons réfractés; pour un tel point C, les plans verticaux SA et CP formeront entre eux un angle égal à 2α augmenté de l'angle de déviation β dû à la réfraction.

Transportons l'instrument en B à l'extrémité d'une petite base mesurée AB située dans le vertical PNA, ce dont on s'assurera approximativement en laissant un jalon en A et en alignant, à simple vue, la seconde station B sur C et sur la première A, ce qui fait abstraction de l'angle de déviation β très-petit. On ne verra plus l'image du point C dans la direction BN′ du rayon réfléchi venu du point S, si on place l'instrument comme à la première station, c'est-à-dire ayant l'arête du prisme verticale, et les miroirs tournés vers le point S; mais on apercevrait dans cette direction l'image d'un point C′ situé sur la ligne droite N′C′ formant, avec BN′, le même angle $2\alpha+\beta$ que précédemment, c'est-à-dire, que le point réel C et le point fictif C′ feraient au sommet B un angle égal à celui dont le sommet situé en S est nécessaire pour la résolution du triangle SAB destiné à faire connaître AS au moyen de la ligne mesurée AB.

Si on imprime actuellement au prisme P un mouvement de rotation dans la portion particulière de l'enveloppe cylindrique qui le porte, portion qui peut tourner dans celle qui soutient les deux miroirs et qui n'a qu'une petite ouverture latérale placée en regard de ceux-ci, son arête prendra des directions diverses tout en restant dans le plan perpendiculaire aux génératrices du tube, si on a

eu soin d'établir une première fois cette perpendicularité, dans la construction de l'instrument. Les rayons émis par un point éloigné quelconque, réfractés parallèlement entre eux et toujours avec la même déviation quelle que soit la direction de l'arête du prisme, seront toujours perpendiculaires à celle-ci, pourvu que l'incidence ait lieu perpendiculairement à cette arête ; en effet, situés dans les plans normaux aux deux faces, ils ne devront pas sortir de ces plans. Il suit de là que les inclinaisons des rayons réfractés seront toujours les mêmes par rapport aux rayons incidents, mais que se mouvant en même temps que l'arête du prisme ils devront décrire autour de la ligne C'N'B une surface conique dont l'angle du prisme et le pouvoir réfringent de la matière qui le compose détermineront l'ouverture angulaire, ouverture qui devra être petite, dans le cas qui nous occupe, par suite de la petitesse des angles à mesurer. Ce que nous venons de dire des rayons perpendiculaires à l'arête s'applique également à ceux qui seraient inclinés sur celle-ci, par suite de la similitude des images et des objets placés devant un prisme, pourvu toutefois que les rayons n'y tombent pas trop obliquement.

Si donc on imprime ce mouvement de rotation au prisme placé en P', l'image du point fictif C' quittera la direction BC' qui renferme l'image réfléchie du point S, et celle du point primitif réel C se mouvant également, il arrivera un moment où elle se trouvera confondue avec cette direction BN' ; en sorte que la rotation qu'on aura imprimée au prisme, rotation qui aura détruit l'influence de l'angle ABN', pourra servir à mesurer celui-ci. En se rappelant que la position primitive de l'arête du prisme a été choisie verticale, à peu près du moins, on reconnaîtra que pour les angles petits qu'il y a en réalité lieu de faire décrire, les images sembleront se mouvoir à peu près sur une horizontale représentant la tangente au cercle que parcourent réellement ces images, de sorte que les déplacements en seront plus sensibles.

Il est presque inutile de dire que pour reconnaître ainsi la superposition des images réfléchie de S et réfractée de C, il faut que les deux miroirs ne cachent le prisme qu'en partie ; cette superposition devant être reconnue avec une grande rigueur, est estimée avec une petite lunette placée postérieurement et à demeure dans le tube qui porte les deux miroirs, de telle façon que son objectif reçoive simultanément des rayons réfléchis et des rayons réfractés.

Des graduations marquées sur la portion mobile du tube qui

porte le prisme, décrites par un index posé sur la partie fixe qui porte les miroirs, et ayant leur origine en contact avec cet index lorsque l'arête du prisme est verticale, pourraient donner les valeurs des angles de rotation et par suite celles des angles déviés ABN' = ASB ; on a préféré, avec raison, remplacer ces graduations angulaires par des indications donnant, expérimentalement, les tangentes des angles S, ou plutôt les rapports inverses de ces tangentes, en sorte que pour avoir la distance cherchée, il suffit de multiplier la base choisie AB, par l'indication répondant à la superposition des images.

On peut éviter la mesure, mais non le parcours de la base AB, en disposant le jalon qui doit être placé au lieu A de la première station, sous la forme de mire de stadia, en le composant d'un pied en fer, à trois branches qui peuvent se replier, pour le transport, de manière à entrer dans une grosse canne creuse que, pour opérer, l'on visse sur le pied. Cette canne porte des graduations linéaires appropriées à la déviation produite par le prisme sur un rayon lumineux arrivant perpendiculairement à son arête, et elle porte également deux voyants, l'un fixe et l'autre mobile.

Après avoir opéré comme il a été dit précédemment, on procède, au moyen du prisme sans le secours des miroirs, à la mesure de la petite base AB, en fixant le mouvement de rotation à l'arrêt qui précise la position dans laquelle l'arête du prisme est verticale lors de l'opération nécessaire pour la mesure de l'angle horizontal B, c'est-à-dire, lorsque la fenêtre du tube des miroirs est placée à droite ou à gauche de celui-ci. En tournant tout l'instrument de 100^g autour de son axe, l'arête du prisme devient horizontale et l'image de la mire a tous ses points déviés dans un même vertical d'un angle constant embrassant sur la mire même un nombre de divisions variable avec la distance de celle-ci au sommet de l'angle de déviation ou à l'instrument. Ce déplacement linéaire est mesuré en regardant simultanément, à travers la petite lunette, l'image réfractée et l'image directe vue à travers l'espace libre laissé par une section faite dans le prisme perpendiculairement à son arête ; on regarde les deux voyants, l'un directement, l'autre par réfraction, et on lit le nombre de graduations qui répondent à leur superposition obtenue au moyen de la mobilité de l'un d'eux, nombre qui représente la tangente de l'angle de déviation dans un cercle dont le rayon est égal à la base cherchée AB.

Nous avons supposé qu'en C se trouvait placé un point naturel remarquable tel que CAS était égal au double de l'angle des deux miroirs augmenté de l'angle de déviation β ; en réalité il n'en sera presque jamais ainsi, et c'est afin d'obvier, en partie, à cet inconvénient que nous avons désigné l'angle des deux miroirs par $2\ \alpha$. Pour la résolution exacte du triangle SAB il faudrait qu'on eût $2\alpha + \beta = 100^g$; mais si cette égalité est seulement approximativement satisfaite, il n'y aura qu'une petite erreur produite, car par suite de la très-petite ouverture angulaire S, on peut sans erreur sensible confondre l'angle avec sa tangente et prendre $SA = S \times AB$. Cette légère variation permise de α est utilisée pour la recherche du point naturel nécessaire ; un léger mouvement imprimé au moyen d'une vis permet en effet de changer quelque peu l'inclinaison du miroir N et par suite de faire varier l'angle des deux miroirs.

Nonobstant ce procédé correctif, nous croyons que dans l'application topographique faite en terrain quelconque, on trouvera très-rarement ce point de comparaison convenablement placé et bien visible ; les cheminements dans les bois, dans les villages seront de prime abord rendus impossibles, puisqu'il faut, latéralement à la ligne à mesurer, trouver un espace libre d'une assez grande étendue ; dans les circonstances où cet espace libre se rencontrera, il restera encore la difficulté de trouver, dans le petit champ angulaire permis par suite de la légère variation possible pour α, un objet d'un pointé précis qui puisse être facilement reconnu des deux stations successives. Aussi pensons-nous que pour utiliser cet instrument, autrement que dans des expériences choisies, il faudrait presque toujours faire signaler ce point de repère, c'est-à-dire, y envoyer placer un jalon ; mais alors ne vaudrait-il pas autant envoyer une mire de stadia au point à déterminer, si les distances à mesurer sont petites, c'est-à-dire, si on veut employer l'instrument au levé de détail topographique ?

Si on joint à l'inconvénient d'un parcours rendu presque toujours obligatoire par l'absence de point de repère convenablement placé, celui qui résulte de ce que l'instrument ne mesurant pas les angles naturels, il y aura nécessité d'être toujours muni d'un goniomètre ou d'un goniographe, et si on remarque qu'il faut une mire pour préciser la première station, un jalon pour préciser le repère et la présence de deux personnes pour

opérer et transporter, on reconnaîtra que l'emploi du *télémètre* ne serait pas avantageux pour l'exécution d'un levé expédié.

Le *télomètre* du commandant Goulier atteint le même but que le *télémètre* du capitaine Gautier; il n'exige pas l'emploi du jalon accessoire presque toujours nécessaire, emploi qui nécessite autant de distances parcourues que de distances à mesurer; il n'exige pas non plus le transport continuel de ce jalon et de la mire, mais il nécessite le concours de deux observateurs. On pourrait supprimer la mire du *télémètre* et se contenter d'une mesure directe de la petite base, en précisant la première station par un objet quelconque tel qu'une pierre, une branche cassée, car l'alignement des deux stations et du repère n'a pas besoin d'être rigoureux. Ainsi simplifié et employé seulement dans les cas où la nature offrirait un repère suffisamment précis, l'usage du *télémètre* serait préférable à celui du *télomètre*.

La grande délicatesse et la complication de ces deux instruments, jointes aux inconvénients que nous avons signalés, ne semblent pas les rendre propres à l'exécution de levés expédiés, surtout pour la mesure des distances petites; mais ils peuvent être utilisés pour le tir des bouches à feu et pour la détermination de quelques grandes distances isolées qui ne pourraient être ni parcourues ni trouvées par la résolution d'un triangle topographique ordinaire, comme cela peut se présenter quand le temps vient à manquer ou quand les abords sont difficiles et même impossibles. Ils pourraient encore être utilisés pour aider l'exécution d'un canevas topographique expédié, avec moins de désavantage que dans leur emploi relatif au levé de détail; mais ils exigeront toujours deux personnes, l'adjonction d'un goniomètre, et ils manquent de cette extrême simplicité de construction qui est nécessaire aux instruments qui, devant sortir des cabinets d'expérimentation, sont d'un emploi continuel et sujets aux inconvénients d'un transport à travers champs, aux chocs, aux chutes, à la pluie, etc. Les simples goniomètres, d'une construction si élémentaire et qui suffisent à l'exécution d'un canevas expédié, peuvent être employés par une personne isolée, et les réparations qu'ils peuvent avoir à subir, réparations qui se présentent si rarement par suite de la simplicité même de leur construction, sont souvent du ressort de l'opérateur lui-même; au contraire, la moindre avarie subie par les télémètres, avarie pouvant facilement résulter de la délicatesse de leur construction et de la précision à laquelle ils doivent satisfaire, les mettrait

hors de service, on demanderait l'aide du mécanicien même qui les aurait construits.

56. Goniographes portatifs. — Il ne nous reste plus qu'à décrire les instruments peu volumineux et n'exigeant pas de support fixe qui peuvent être employés à la mesure des angles de la planimétrie.

Sextant graphique. — Sa description et son usage ont été expliqués au § 22.

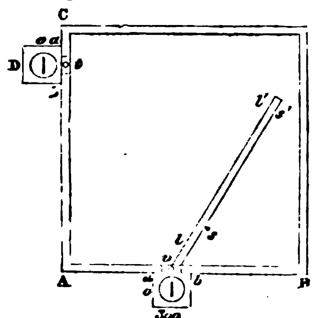
Planchette et déclinatoire. — Le meilleur des instruments destinés à l'exécution de la planimétrie expédiée est peut-être composé du déclinatoire adapté à une planchette en bois léger ou en carton, ou mieux encore à une planchette modifiée en raison des circonstances dans lesquelles on se trouve. Cet instrument de petite dimension se compose de plusieurs règles égales entre elles en longueur et en largeur, réunies par une feuille de peau ou de forte toile sur laquelle elles sont collées. On les maintient, quand on veut faire usage de la planchette, dans un même plan, au moyen de deux autres règles qui prennent une position rectangulaire sur les premières, en pivotant sur l'une de leurs extrémités ; après quoi elles sont fixées par un petit crochet placé à l'autre extrémité. Quand on a terminé son travail ou qu'on le suspend, on rend libres ces deux règles, qui alors se superposent sur la première et la dernière de celles qui sont réunies : on roule alors le tout, qui est assez peu volumineux pour pouvoir tenir dans une fonte de pistolet. Cette planchette peut s'adapter sur un bâton armé d'un dard en fer que l'on plante en terre. On peut avoir une très-petite alidade que l'on construit soi-même avec une règle ou un double décimètre triangulaire sur lequel on fixe deux clous ou deux aiguilles.

Cet instrument peut être employé avec ou sans un pied, qui peut être un simple bâton ou le pommeau d'un sabre. Dans le cas où l'on opère en posant simplement la planchette sur la main, la haussant et la baissant alternativement pour s'assurer du pointé et de la lecture du déclinatoire, il ne présente plus la même exactitude que les goniomètres que nous mentionnerons plus loin, surtout quand la ligne à viser se trouve dirigée de telle sorte que le déclinatoire est du côté opposé à celui qu'occupe l'observateur.

On peut remédier à cet inconvénient en armant le déclinatoire, nécessairement circulaire dans ce cas, d'un couvercle portant un miroir à sa face intérieure. Ce miroir mobile autour de sa charnière pourra être amené dans une direction et avec une inclinaison convenable pour que l'œil situé, pour la visée, très-peu au-dessus de la planchette, puisse apercevoir par réflexion la lecture à faire sur le limbe, si la charnière peut elle-même décrire une révolution autour de la boîte du déclinatoire.

Planchette Fèvre. — M. le lieutenant-colonel Fèvre a apporté à l'instrument qui nous occupe une modification qui obvie à l'inconvénient que nous venons de signaler et qui, en même temps, assure mieux la précision de la lecture et celle de l'alidade.

La planchette employée ne peut pas se replier sur elle-même, et ses angles doivent être exactement droits. Ses quatre côtés sont armés de lames de cuivre qui forment des rainures dans lesquelles s'engage un tourillon *t* qui fait corps avec le déclinatoire placé latéralement.



Celui-ci étant en D doit marquer une certaine lecture pour que la planchette soit déclinée comme elle l'était lors du règlement de l'instrument. Supposons que son indication soit alors *o* placé sur le diamètre à peu près parallèle au côté AC (auquel cas ce côté représentera à peu près le méridien magnétique). Si au moyen du tourillon *t* on fait glisser le déclinatoire le long de l'arête AC, la lecture restera constamment *o* tant que la planchette restera déclinée. Arrivé au point A, le mouvement ne pourra plus se continuer dans la même direction, mais on pourra faire pivoter, autour de ce point, le déclinatoire dont le contact avec l'arête AB, s'établira suivant le même côté *ab*, qui précédemment se confondait avec AC. Toutes les parties du déclinatoire (à l'exception de l'aiguille qui conserve sa direction primitive) auront tourné d'un angle égal à A, qui est droit, par construction, et l'indication 100^g sera venue se placer en face de la pointe nord de l'aiguille aimantée.

Un observateur placé du côté AB de la planchette aura donc le déclinatoire près de lui, et la moindre élévation de son œil

lui permettra de s'assurer que la lecture étant 100^g l'orientation est bonne.

Le déclinatoire peut également parcourir les deux autres côtés BD, CD, le long desquels il devra marquer des lectures 200^g, 300^g.

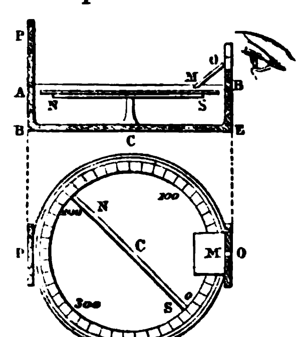
Remarquons que la position du déclinatoire sur un des côtés, AB par exemple, n'est pas absolue ; cela permet de choisir dans chaque cas dépendant de la direction à viser, une position plus favorable que les autres. M. Fèvre a fixé l'alidade *ll'* au déclinatoire, en lui permettant toutefois un mouvement de rotation autour d'un petit axe qui peut être placé au-dessus du tourillon. Pour une visée particulière, la ligne de foi de cette alidade formée de deux petites pinnules qui peuvent se rabattre, ou de toute autre manière, devra être placée sur la ligne *ss'* du dessin passant par une projection *s* ou *s'* connue : il n'y aura pour obtenir ce résultat qu'à faire glisser le déclinatoire le long de AB jusqu'à ce que, par le secours de son mouvement de rotation, l'alidade étant pointée, la ligne de foi passe par la projection du point connu ; la lecture faite à l'extrémité de l'aiguille sera alors d'autant plus facile que le limbe se trouvera, à peu près, dans la direction de la visée. Une vis de pression *v* permettra de détruire l'action du mouvement de rotation et fixera par conséquent l'alidade au déclinatoire, ce qui enlèvera toute chance d'un dérangement pouvant se produire entre l'observation et le tracé de la ligne au crayon sur le papier.

On ne peut reprocher à cet instrument que l'existence d'un mécanisme qui, quoique fort simple, peut facilement subir des avaries par suite même du genre d'emploi auquel il est destiné. Une chute par exemple peut fausser les rainures et empêcher par suite le mouvement rectiligne du déclinatoire. Mais remarquons qu'au pis aller, si cet accident arrivait pendant le cours des opérations, l'observateur ne serait pas dépourvu du moyen de continuer son travail, car l'instrument pourrait servir de déclinatoire ordinaire.

57. **Goniomètres portatifs.** — Les goniomètres, exigeant l'emploi du rapporteur, ont un désavantage sur les goniographes ; mais, d'autre part, ils permettent l'exécution de croquis souvent utiles et quelquefois indispensables, surtout dans l'exécution de levés expédiés.

Sextant gradué et *sextant à un seul miroir*. — Les § 23 et 24 donnent la description de ces instruments qui, en outre de la difficulté de leur emploi, par suite de l'existence de réflexions peu visibles, ont encore l'inconvénient de ne donner que les angles compris entre deux lignes réelles du terrain, tandis que l'emploi des suivants supprime l'observation d'une de ces lignes qu'il remplace par une directrice fictive.

Boussole à réflexion. — Cet instrument se compose d'une boîte cylindrique ABDE, au centre de laquelle est élevé un pivot C. Sur ce pivot se meut librement une aiguille aimantée portant un limbe très-léger, concentrique à la boîte et gradué. En P et O sont élevées deux pinnules : la première est percée d'une fente verticale traversée dans sa longueur par un fil; l'autre d'un très-petit trou faisant fonction d'oculaire. Par ce trou, l'œil peut apercevoir directement, à travers la pinnule P, l'objet dont on cherche la direction, et en même temps, la division du limbe qui se trouve en cet instant directement et verticalement placée sous un miroir M. Celui-ci, incliné à 50^g, aboutit à l'oculaire O et renvoie ainsi horizontalement l'image de la division. Les chiffres sont renversés pour être vus droits dans le miroir. Le zéro se trouvant à l'extrémité sud de l'aiguille, on comprend que le chiffre que l'on aperçoit en M est bien effectivement l'expression de l'angle SCO ou PCN que forment la direction dans laquelle on a visé et le méridien magnétique.



On a substitué depuis quelques années un prisme lenticulaire au miroir. Ce prisme est composé d'une face plane inclinée à 50^g qui réfléchit les divisions, et de deux segments sphériques qui les grossissent en faisant fonction de loupe, comme on le verra au livre V.

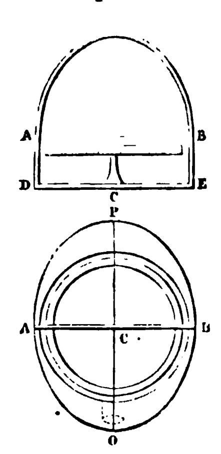
L'emploi de la boussole ordinaire dite à *limbe mobile*, parce qu'en effet ce limbe se meut avec la ligne de visée, exige que le rapport des angles soit fait, sur le papier, en sens inverse de celui des graduations.

Les boussoles dites à *limbe fixe*, parce qu'en effet la ligne de

visée est seule mobile, fournissent au contraire les angles à rapporter dans le sens même des graduations. Pour conserver l'usage habituel du rapport des angles, du nord vers l'ouest, ces boussoles doivent être divisées en sens inverse de celui en usage dans la boussole à limbe mobile, et le zéro des graduations doit être placé à l'extrémité sud de l'aiguille.

La boussole à réflexion est dans ce cas, ainsi que l'instrument suivant, qui du reste n'en est qu'une légère modification.

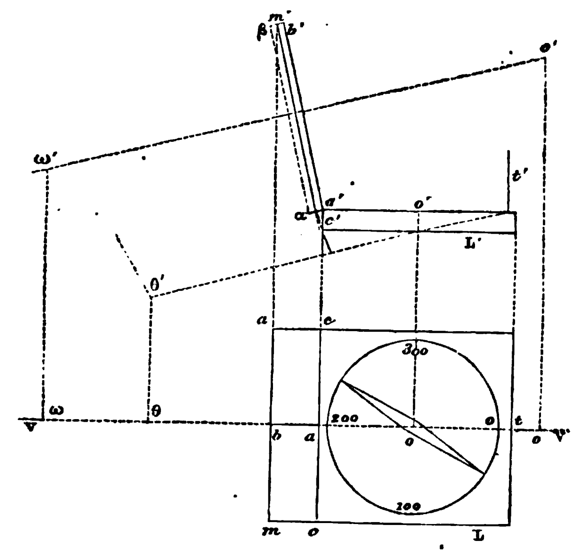
Boussole Burnier. M. le lieutenant-colonel d'artillerie Burnier a modifié avantageusement cet instrument en supprimant le miroir qui atténue toujours un peu la lumière.



Dans une boîte ABDE, cylindrique intérieurement et elliptique au dehors, il a placé le pivot et l'aiguille. Celle-ci, au lieu d'un limbe, supporte un cylindre creux extrêmement mince et d'une hauteur suffisante seulement à l'inscription des divisions et des chiffres. Dans l'épaisseur de la boîte et suivant le grand axe de l'ellipse, est pratiquée une petite ouverture cylindrique garnie d'une loupe O dont le but est de rendre plus visible la division qui se trouve vis-à-vis. Un arc elliptique AMB, qui jouit de la faculté de pivoter autour de A et B, afin de pouvoir se confondre avec le plan de la boîte ou lui être perpendiculaire, sert dans cette dernière position à tendre un crin fixé en O et en P. Quand le crin est ainsi tendu, il sert d'alidade. On tourne tout l'instrument jusqu'à ce que l'œil aperçoive, dans la direction OP, l'objet dont on cherche l'angle avec le méridien magnétique; puis, après quelques oscillations, l'aiguille s'arrête, et le chiffre qui se trouve dans le plan du crin, mesure l'angle cherché. On conçoit qu'ici les chiffres sont gravés tels qu'on doit les voir, parce que l'image virtuelle produite par une loupe n'est pas renversée.

Boussole Hossard. — Cette nouvelle boussole, due à l'initiative de M. le lieutenant-colonel d'état-major Hossard, est d'un emploi très-commode. La figure en représente la projection horizontale et une coupe faite suivant le verticale V*v*.

L,L' est une boîte quadrangulaire renfermant un limbe fixe gradué comme ceux des boussoles ordinaires et d'un diamètre d'environ $0^m,05$. Au centre de ce limbe se meut une aiguille aimantée.



Le couvercle de cette boîte *mcm'c'* se meut autour d'une charnière *cc* perpendiculaire au diamètre 0^g—200^g à l'extrémité duquel on a placé une tige *tt'* perpendiculaire au plan du limbe. Cette tige peut se rabattre horizontalement pour la facilité du transport.

Le couvercle porte intérieurement un miroir *mcm'c'* sur la face antérieure duquel on a tracé une ligne *ab*, *a'b'*, qui donnera une image *ab* αβ symétrique à la ligne elle-même, par rapport au plan du miroir. Supposons qu'on place l'œil en *o,o'*, son image sera elle-même en ω,ω' dans le plan vertical du diamètre 0,200; les deux lignes *ab*, *a'b* et *ab*, αβ, l'une réelle, l'autre virtuelle, déjà contenues dans ce même plan vertical, seront vues superposées. Le peu d'écartement de ces lignes, égal seulement au double de l'épaisseur de la glace, rendrait un peu indécise la position de l'œil répondant au plan vertical *vv* ou 0^g—200^g; mais la tige *t* placée de même dans ce plan donnera une image θ,θ' plus écartée qui devra, pour l'œil convenablement placé, se superposer à *ab*, *a'b'* et *ab*, αβ.

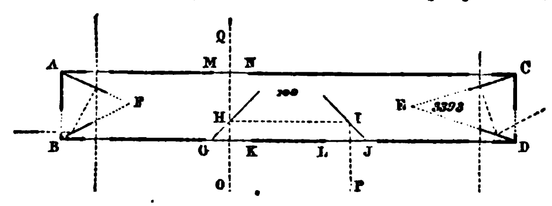
Ce plan vertical 0,200 perpendiculaire au miroir remplace ici celui que décrit l'axe optique de la lunette dans les boussoles à limbe mobile; il sera incliné à l'ouest du méridien magnétique de l'angle marqué par l'aiguille de la boussole.

Pour amener ce plan à se confondre avec celui de la nature

qui contient le point à viser, on place la boussole à peu près horizontalement dans le creux de la main en appuyant celle-ci contre l'estomac et en se tournant de manière à laisser à sa droite ou à sa gauche le point dont on s'occupe ; on cherche pour l'œil la position répondant au vertical 0,200, comme nous l'avons indiqué plus haut, en ouvrant le couvercle convenablement pour apercevoir l'image de la tige. On tourne ensuite lentement tout le corps jusqu'à ce qu'on ait transporté le vertical 0,200 sur le vertical qui va passer par le point visé ; cela a lieu lorsqu'on aperçoit simultanément et se confondant, la raie tracée sur le miroir, son image, ainsi que celles de la tige et du point visé. On lit alors le chiffre marqué par l'aiguille aimantée.

Cet instrument, comme les deux précédents, a besoin d'être réglé ainsi qu'il a été indiqué au § 18, avec cette modification que l'essai qu'il est prescrit de faire sur une ligne connue, donnera, par la différence des lectures du limbe et du dessin, une erreur de collimation qu'il faudra constamment retrancher ou ajouter aux lectures suivantes.

Équerre à miroir. — Elle se compose d'un parallélipipède creux en cuivre, dont ABCD est la projection ; elle a environ $0^m,1$ de longueur, et les faces extrêmes sont des carrés de $0^m,015$ ou $0^m,02$. Elle renferme trois couples de miroirs et, dans chaque couple, l'un des miroirs est étamé dans la moitié de sa hauteur seulement. Les deux premiers, dont GH, IJ sont les traces, font entre eux un angle droit : la face antérieure BD est évidée de G en K et de L en J. Si c'est le miroir GH qui est en partie transparent, dans la face postérieure AC est aussi pratiquée une ouverture MN. Par suite de cette construction, et en vertu du théorème démontré, que l'angle des deux miroirs est la moitié de celui des directions de deux points, lorsque l'image réfléchie de l'un se superpose sur l'image directe de l'autre, il résulte que si l'œil placé en O apercevait à la fois le point Q et l'image de P, l'observateur serait sur l'alignement de P et Q à HI près,



et cette quantité est négligeable par rapport à PQ. Les couples des extrémités forment d'un côté un angle de 50^g, de l'autre un angle de 25^g, quelquefois de $33^g,33$ ou le tiers d'un angle droit. Ils donnent donc des angles de 100^g, 50^g ou $66^g,66$. Le raisonnement étant le même que pour le premier cas, nous terminerons ici ce qui regarde l'équerre à miroir, en faisant remarquer le double avantage qu'elle a sur l'équerre d'arpenteur d'être d'un très-petit volume et de ne pas déterminer seulement les directions rectangulaires. Il n'y a pas d'autre vérification à faire que de mesurer les mêmes angles avec cet instrument et avec quelque autre de la précision duquel on soit assuré.

58. **Reconnaissances militaires.** — Les reconnaissances militaires exigent une rapidité encore plus grande que les levés expédiés. Elles se font comme ceux-ci, mais en attribuant aux résultats obtenus à l'œil une importance d'autant plus grande, qu'on est plus pressé par le temps. Souvent, et surtout quand, prenant le nom d'*itinéraires*, elles doivent s'étendre sur une zone de peu de largeur, on n'emploie dans leur exécution que la méthode du cheminement, sans canevas préalable.

Lorsque l'on n'a pas à sa disposition quelqu'un des instruments destinés à l'exécution des levés expédiés, on peut s'en construire soi-même de très-grossiers qui, malgré leur imperfection, pourront être encore utilement consultés pour la mesure des angles. Tels sont un rapporteur, une fausse équerre, les deux branches d'un compas, une longueur variable mise à une distance constante de l'œil, au moyen d'une ficelle ou du bras tendu, longueur qui mesure la tangente de l'angle, enfin un triangle variable de forme, dont la base serait formée par une petite règle et dont les autres côtés seraient les deux parties d'une ficelle ayant ses extrémités fixées à la base, ficelle qui, pincée en différents points de sa longueur, donnerait des angles variables de grandeur, compris entre les deux parties qui la composeraient.

Nous avons dit que les levés expédiés et les reconnaissances militaires ne permettant plus l'emploi lent et embarrassant de la chaîne ou de la stadia, on évite autant que possible les mesures de distance en se servant du pas étalonné, pour connaître celles qui sont absolument indispensables.

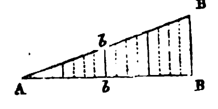
Pour mesurer des distances sans les parcourir, on construit de petites lunettes à stadia qui, en raison même du but qu'on

se propose d'atteindre, ne peuvent pas être accompagnées de mires graduées.

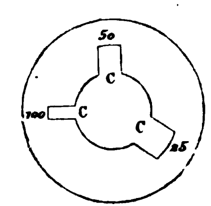
La mire est remplacée par un objet se rencontrant souvent dans la nature, comme un arbre d'une essence spécifiée, une fenêtre, une cabane de paysan, un homme, un objet auquel on suppose une dimension constante, souvent inexacte, mais toujours approchée. D'autres fois, imitant alors la stadia à mire variable, on estime à l'œil, la portion de la mire supposée constante, embrassée entre les deux fils d'un réticule invariable.

Le premier procédé, analogue à la stadia à micromètre, exige le remplacement, par un système plus simple, de celui que nous avons exposé au § 7.

On emploie pour cela différentes dispositions dont les principales, sont : 1° une série de fils parallèles équidistants ; 2° un verre plan mis au lieu du réticule. Sur ce verre sont tracées deux obliques AB,AB′, coupées par une suite de parallèles équidistantes. La plus grande des parallèles BB′ correspond à la grandeur de l'image de l'objet servant de mire, placé à la plus petite distance à mesurer. On amène l'image entière, dans un cas quelconque, de manière à occuper toute la longueur d'une des parallèles, bb' par exemple. Si δ est la distance répondant à BB′, on aura évidemment, pour la distance correspondante à bb' :



$$x = \frac{\delta . BB'}{bb'} = \delta \frac{AB}{Ab}$$



Si Ab est la moitié de AB, la distance sera double ; les divisions sont tracées de manière à amener une lecture facile, et δ est choisi de sorte que la multiplication soit simple.

3° Au point où se forme l'image dans la lunette, on place quelquefois un diaphragme ou cercle plein, évidé intérieurement d'un autre cercle portant différents crans c, c', c'', vides également ; les dimensions de ces ouvertures, mesurées perpendiculairement aux rayons, sont dans des rapports simples. Par exemple

$$c : c' : c'' :: 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4}$$

Si, après avoir reconnu que l'objet placé à 50m embrassait

tout le cran c, on le trouve, dans une nouvelle circonstance, occupant le cran c', la distance sera de 100^m, etc. Les distances intermédiaires seront estimées approximativement par l'étendue des images interceptées dans l'un des trois cas principaux.

Lorsqu'on n'a pas à sa disposition une quelconque de ces petites lunettes à stadia, on peut, comme nous l'avons déjà dit pour la mesure des angles, se construire soi-même un instrument en tenant lieu.

Un double décimètre AB, est placé à une distance constante de l'œil, soit en tendant le bras, soit par le moyen d'un double fil de longueur constante. On mesure ainsi le nombre des millimètres n interceptés par l'objet; les distances seront inversement proportionnelles aux lectures ainsi faites

$$s : s' :: n' : n. \quad s = \frac{s'n'}{n}$$

s' et n' étant déterminés par une expérience préalable qui fournit leur produit, il n'y a plus, dans chaque cas, qu'à diviser par la lecture n.

Cet instrument permet également, ainsi que nous l'avons déjà dit, de mesurer l'angle par sa corde.

Tous les procédés précédemment décrits exigent l'observation d'un même objet ayant servi à l'opération préalable de graduation de l'instrument. On a proposé le moyen suivant, permettant d'opérer sur un objet inconnu.

Après avoir observé cet objet d'un point situé à une distance s, on exécute la même opération d'un second point situé à la distance s'. Si n et n' sont les deux lectures, on aura toujours, quelle que soit la grandeur de l'objet visé

$$\frac{s}{s'} = \frac{n'}{n}$$

Mais si, marchant de la première station à la seconde, on s'est dirigé directement sur l'objet, la distance parcourue $a = s - s'$, aura pu être mesurée.

Cette équation, jointe à la première, fait connaître

$$s = \frac{an'}{n' - n}.$$

Il nous semble qu'il y a peu à compter sur l'exactitude, même relative, de ce procédé, et qu'il vaut mieux avoir recours au moyen habituellement employé. Il suffit, en effet, de mesurer

la même distance *a*, en ne prenant pas les stations dans l'alignement de l'objet visé, et de mesurer aussi les deux angles à la base ; l'opération ne sera pas plus longue que pour la double observation de la stadia, et elle aura l'avantage de conduire à la résolution d'un triangle, beaucoup mieux conformé que celui que résout indirectement le premier procédé.

On comprend cependant qu'il y ait des circonstances dans lesquelles on devra avoir recours à ce mode d'opérer, lorsque, par exemple, les obstacles situés à droite et à gauche ne permettront pas le déplacement latéral.

Nous terminerons les renseignements relatifs à la mesure approximative des distances par quelques indications conduisant au même résultat, d'une manière encore plus grossière, mais néanmoins de sorte à pouvoir être consultées quelquefois avec fruit.

Le pas de l'homme pourra être remplacé par celui du cheval expérimenté préalablement.

Pour les longues distances, l'obligation de compter un très-grand nombre de pas devient fastidieuse et sujette à erreur. On pourra, dans ce cas, combiner le temps employé à la marche avec les renseignements suivants : un fantassin parcourt 50^m, 60^m et 70^m à la minute, suivant que le pas est ordinaire, de route ou accéléré ; un cheval parcourt 100^m, 200^m, 300^m au pas, au trot ou au galop modéré pendant le même laps de temps. Ces indications ne sont évidemment qu'approximatives.

Enfin on pourra, dans quelques circonstances, se servir de la vitesse du son, qui est de 337^m par seconde de temps, lorsqu'une indication quelconque aura fait connaître le moment précis de la production de ce son : un coup de fusil aperçu et entendu, par exemple. Le vent serait une cause d'erreur qui devrait faire augmenter un peu la valeur estimée de la distance, lorsqu'il sera dans la direction suivie par le son et qui devrait la faire diminuer dans le cas contraire ; mais dans les circonstances dont nous nous occupons, il n'y aura pas lieu d'en tenir compte.

NIVELLEMENT EXPÉDIÉ

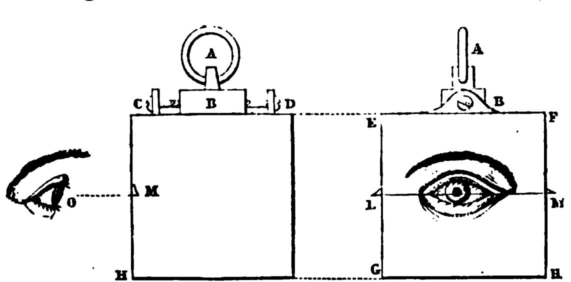
59. Dans un levé militaire, le figuré du terrain est aussi essentiel que le plan. La marche à suivre pour effectuer le

nivellement est encore la même que pour les levés réguliers : c'est toujours par des cotes calculées au moyen de la base et de l'angle de pente que l'on rectifiera ce que peut avoir d'inexact le figuré à vue. Après avoir mesuré une inclinaison α, on pourra calculer la différence de niveau au moyen de la formule K. tang. α, qui, simplifiée et mise sous la forme K.α, n'exigera l'emploi d'aucune table. On pourra encore arriver à un résultat suffisamment exact, pour les circonstances, par le secours d'une construction graphique préparée d'avance, tellement simple qu'elle n'a pas besoin d'être expliquée.

On peut, pour déterminer les cotes d'un nivellement expédié, employer différents instruments que nous allons successivement passer en revue.

60. Niveaux et Clisimètres portatifs. — Ces instruments donnent l'horizontale ou les angles de pente.

Niveau réflecteur de Burel. — Cet instrument est formé par un cube de cuivre dont les arêtes ont $0^m,02$. A l'une des faces est adapté un anneau A, destiné à soutenir, en y passant le doigt, le niveau à la hauteur de l'œil. Le point de suspension de l'anneau peut varier au moyen d'un chariot B, qu'en tournant, fait mouvoir la vis CD qui le traverse. Sur la face EFGH est appliqué un miroir sur lequel est tracée une droite parallèle à la base et aboutissant à deux pointes L et M en saillie sur les flancs du cube. Pour opérer, la ligne LM doit être horizontale et le plan du miroir vertical. Supposons qu'il en soit ainsi, et indiquons l'usage de l'instrument ; puis ensuite, nous verrons comment on s'assure que ces conditions sont remplies. On élève le niveau jusqu'à ce que LM partage en deux exactement l'image de la pupille de l'œil, et, dans ce cas, la ligne LM et son image se superposent ; il en résulte que le plan passant par l'œil et par LM est normal au miroir, et par conséquent horizontal si celui-ci est bien vertical.



Dans cet état de choses, l'observateur, au moyen des pointes L et M, peut reconnaître quels sont les différents points de la nature qui sont à la hauteur de l'œil, ce qui lui permettra de coter ces points, et de déterminer quelques courbes horizontales destinées à contrôler celles qui seront fournies par le figuré à vue.

Il a été supposé que le plan du miroir était vertical et la ligne des index horizontale. Pour s'en assurer on invoque précisément la propriété que ces conditions sont destinées à produire, l'horizontalité du plan qui passe par l'œil et par les index, c'est-à-dire sa constance indépendante de la direction visée. On regarde alors la même ligne produite par l'intersection de ce plan, sur un mur par exemple, puis se retournant de manière à voir encore ce mur par réflexion, on obtient une nouvelle trace qui doit se confondre avec la première. Si cette circonstance ne se présente pas, on cherche quelle est celle des deux conditions qui n'est pas satisfaite. Pour cela on remarque que la verticalité du miroir doit donner, directement et par réflexion, les deux images d'un *même* index à la même hauteur et même superposées si on tourne convenablement l'instrument. Si cette condition est satisfaite sans la superposition complète des lignes du mur, la ligne des index n'est pas horizontale; mais on peut encore dans ce cas se servir de l'instrument en se servant successivement des deux index, mais en ayant soin de préciser la position de l'œil par l'observation de l'image de sa pupille vue très-près de l'index employé.

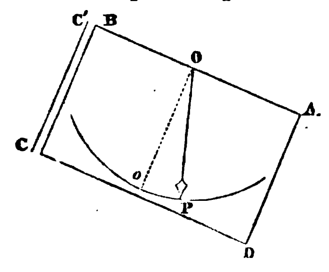
On obvie à la première cause d'erreur, très-grave, au moyen du chariot mobile.

Un aide est nécessaire pour tracer, sur le mur, les traces des plans de visée.

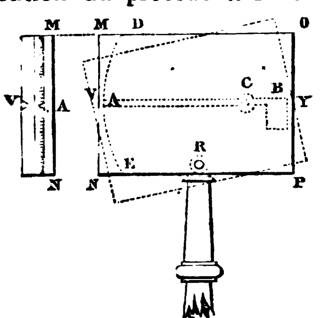
Niveau à bulle d'air gradué. — La description de cet instrument a été donnée au § 41. Nous ajouterons seulement ici, que si on vise suivant la base du niveau, soit pour avoir l'horizontale, soit pour avoir l'angle de pente, il faut que la partie supérieure du niveau soit munie d'un miroir qui permette d'apercevoir la position de la bulle que l'œil, placé dans le plan de la base, ne pourrait pas voir sans un déplacement préjudiciable.

Alidade nivelatrice. — Cet instrument n'est autre que le clisimètre de Chezy grossièrement construit. Il exige du reste un support fixe, une planchette qui sert, par le mouvement de ses pieds, à caler difficilement le niveau à bulle.

Niveau à perpendicule. — Cet instrument n'est qu'une modification du niveau de maçon gradué. Une boîte rectangulaire ABCD, de peu d'épaisseur, contient un arc de cercle gradué au centre duquel est suspendue une aiguille terminée à sa partie inférieure par un poids P se terminant par un index qui parcourt les graduations. Le couvercle CC′ porte, à sa partie intérieure, un miroir destiné à faire apercevoir les divisions du limbe, lorsque l'œil, placé dans le plan du limbe, vise suivant un des côtés AB de la boîte. L'angle lu en P est bien l'angle à l'horizon, si le zéro des graduations a été placé sur le rayon perpendiculaire à la ligne de visée ; la vérification de cette condition se fait par un retournement, comme pour le niveau de maçon.



Clisimètre de Burnier. — Cet instrument n'est qu'une modification du précédent. Il se compose d'une boîte rectangulaire creuse MNOP dans laquelle est adapté un arc de cylindre gradué DE. Son centre C sert de point de suspension à une aiguille AB dont les deux parties AC,CB inégales en longueur ont même poids. Cette aiguille, dont la pointe A est recourbée de manière à venir, en avant de l'arc gradué, marquer le chiffre auquel elle correspond, a la propriété de rester horizontale parce qu'elle est suspendue par un point appartenant à la perpendiculaire élevée par le centre de gravité sur la direction de l'aiguille, et abstraction faite des oscillations que cause le mouvement de la main. A la hauteur du centre C, et sur une des faces de la boîte, sont pratiquées deux échancrures VY qui servent de visières et donnent une horizontale quand l'aiguille marque zéro. Cela posé, on conçoit aisément que, pour avoir l'inclinaison à l'horizon d'une ligne donnée, il suffit d'incliner la boîte de manière que la ligne VY soit dans cette direction, et de lire la graduation que marque l'aiguille.



L'exactitude de la position du zéro est vérifiée par un retournement connu pour l'instrument précédent, et comme il a été dit § 40 pour le niveau de maçon.

Observations. — Les instruments employés au nivellement expédié ne sont pas plus exacts que ceux destinés à la planimétrie expédiée. Dans l'exécution du nivellement régulier, l'emploi de l'éclimètre, beaucoup plus exact que l'instrument correspondant de la planimétrie, ne conduit à la connaissance des cotes qu'à 1 ou 2^{m} près, lorsque les opérations sont très-exactes. Les mêmes causes d'erreur qui influent sur les résultats auront une bien plus grande influence lorsqu'on se servira, pour le nivellement, d'instruments ne présentant pas plus d'exactitude que ceux d'une planimétrie expédiée.

Il est utile d'avoir une projection, même approximative ; mais en est-il de même des cotes d'un nivellement, cotes dont la variation est toujours petite dans la nature ? Une erreur qui serait légère en position horizontale, pourra changer considérablement les hauteurs relatives des mouvements de terrain.

Aussi pensons-nous qu'il ne faudrait accorder qu'une très-médiocre confiance aux résultats obtenus par le moyen des clisimètres, et n'en pas accorder du tout à ceux qui proviennent de petits procédés indiqués quelquefois, comme l'emploi de jalons, d'un rapporteur portant un fil à plomb à son centre, d'une règle soi-disant horizontale quand elle est suspendue à un fil, une équerre avec un fil à plomb, etc.

Faut-il donc pourtant renoncer complétement à spécifier les hauteurs relatives des mouvements de terrain ? Non, car on peut éviter l'influence de l'erreur de base souvent considérable dans l'exécution d'une planimétrie expédiée et en partie celle de l'angle. Il faut pour cela se borner à l'emploi d'un instrument, ne donnant que la ligne du niveau apparent, mais la donnant plus exactement, par suite de la simplicité de sa construction, que l'inclinaison fournie par un clisimètre. Le niveau réflecteur de Burel est dans ce cas ; son emploi ne résoudra pas le cas général qui se présente dans la recherche d'une différence de niveau, mais si son usage est plus restreint, il sera du moins plus sûr que celui des clisimètres.

61. **Levés à vue.** — Les besoins de l'armée exigent très-souvent que l'on ait de suite des renseignements sur un terrain,

en présence de l'ennemi. Alors tout doit être sacrifié à la promptitude de l'exécution, l'exécution elle-même. L'officier est livré à ses propres ressources et n'a plus même à sa disposition les instruments les plus simples. C'est donc de la rapidité et de la justesse du coup d'œil que dépend le succès de sa mission, et c'est en cette occasion surtout qu'il sentira la nécessité de l'avoir exercé. Moins il pourra compter sur l'exactitude de ses opérations de détail, plus il devra mettre d'attention à suivre la marche que nous avons indiquée.

Pour le nivellement, on se borne à figurer les mouvements à vue, et l'on ne détermine que le commandement des hauteurs.

Levés de mémoire. — L'officier chargé d'une reconnaissance n'a quelquefois pas le temps de s'arrêter : il doit voir et plus tard transmettre sur le papier, une image aussi fidèle que possible de ce qu'il a vu. Il n'y a aucun précepte à donner sur ce genre de travail. Il faut que l'officier soit familiarisé avec les formes qu'affecte toute espèce de terrain, avec les lois de la nature qui procède presque toujours par analogie dans les mêmes localités. Il faut qu'il sache conclure, jusqu'à un certain point, ses parties masquées, à l'aide de celles qui sont visibles.

Reconnaissances par renseignements. — Il peut arriver enfin que l'officier isolé sur un point, et dans l'impossibilité de tenir la campagne, soit obligé de rapporter des notions du pays où il se trouve. Les renseignements recueillis auprès des habitants seront alors sa seule ressource : toute l'habileté consistera à les avoir exacts et à discerner avec tact le degré de confiance qu'il devra leur accorder. Du reste, il construira encore des triangles par les trois côtés au moyen des distances itinéraires qu'on lui indiquera, et il achèvera le détail par tâtonnement en rapportant chaque point par l'intersection de deux ou trois arcs de cercle dont les rayons seront les distances à des points déjà placés. C'est ainsi qu'il établira les fermes, les maisons isolées, les cours d'eau, puits, fontaines, etc.

Les mêmes renseignements, épurés par une critique judicieuse, lui fourniront les moyens d'exprimer les mouvements du terrain. Il sera indispensable, pour tout cela, qu'il ait une table de réduction des mesures du pays en mètres. Il sera même plus sûr de faire estimer les distances en heures de marche. Les mouvements

seront le plus ordinairement représentés par les hachures privées du secours des tranches préalables, mais toujours d'autant plus serrées et plus courtes qu'elles exprimeront une pente plus rapide.

Telles sont les réflexions générales que l'on peut faire sur les reconnaissances.

L'esprit de méthode, qui devra servir de guide, sera le même, quel que soit le genre de reconnaissance qu'il faudra exécuter; ainsi peu importe que l'on ait à reconnaître une route, une rivière, une position : seulement, dans le cas où l'on devra opérer à vue et avec rapidité, il faudra sacrifier quelques détails pour s'occuper plus particulièrement de ceux d'une utilité spéciale. Les instructions du général et la connaissance de l'art militaire devront en diriger le choix.

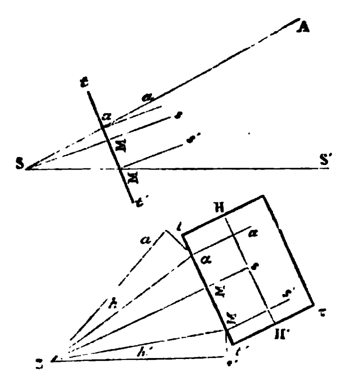
CHAPITRE XI

CANEVAS PERSPECTIFS

EMPLOI DE LA PHOTOGRAPHIE

62. Canevas par perspectives. — Un levé régulier, avec des cotes et des courbes horizontales, permet l'exécution de dessins perspectifs. Réciproquement, il est possible de tirer de ceux-ci, convenablement exécutés, la projection et les cotes relatives des points principaux d'un terrain.

Soient ASS′ un angle formé par les plans verticaux contenant deux rayons visuels qui, partant de l'œil situé en S, vont passer par A et S′. Soit également *tt′* le tableau vertical situé à une distance SΣ de l'œil. Si l'on rabat ce tableau autour de *tt′* comme



charnière, les perspectives de A et S′ viendront en a et s' sur les perpendiculaires $a\alpha$, $s'\Sigma'$ à tt', et le point principal sera en s sur la perpendiculaire $s\Sigma$.

Réciproquement, si par un procédé quelconque on a obtenu une perspective $t\tau$, indiquant la direction HH′ de la ligne d'horizon, la position s du point principal, et si l'on connaît la distance de l'œil au tableau, on pourra refaire en sens inverse la construction précédemment indiquée. Il suffira pour cela de mener tt, parallèle à la ligne d'horizon, de prendre S sur la perpendiculaire $s\Sigma$, à une distance de tt' égale à celle de l'œil au tableau, et de joindre le point S avec les pieds des perpendiculaires abaissées sur tt', des points de la perspective; l'angle qui en résultera sera celui formé par les plans verticaux.

Si de plus on veut avoir les angles à l'horizon formés par les lignes SA, SS′, il suffira de construire les triangles $S\alpha a$, $S\Sigma s'$ rectangles en α et Σ, dont les bases seront $S\alpha$, $S\Sigma$, et les hauteurs celles des perspectives a, s', au-dessus de la ligne d'horizon.

La même opération effectuée en un second point S′ dont la perspective aura figuré sur le premier tableau, permettra de construire le triangle de la nature SAS′, si SS′ est connu en longueur.

Ce que nous avons dit du sommet inconnu A se rapportera à tout autre; en sorte que par le moyen de deux perspectives seulement on aura à la rigueur la possibilité de construire un canevas renfermant les projections de tous les points visibles également des deux stations.

En augmentant le nombre de ces stations, on déterminera de nouveaux points, on vérifiera les premiers, et on pourra choisir les recoupements convenables.

Les avantages que présente ce mode d'opérer sont les suivants : 1° dans certaines circonstances, il n'est pas permis de faire ouvertement un levé. Les dessins perspectifs pourront en tenir lieu jusqu'à un certain point, pour la confection du canevas;

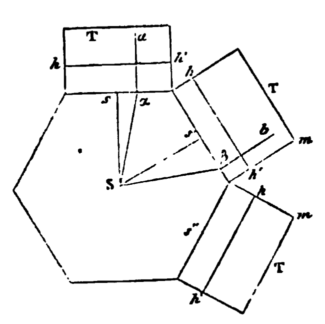
2° Les stations habituelles de la planchette ou de la boussole

ne permettent pas la détermination d'un grand nombre de points, par suite de la difficulté que présente, à une seconde station, la reconnaissance de points visés d'une première, à moins qu'ils ne soient très-remarquables, et par suite fort rares. Cette difficulté se trouve levée en partie par l'existence simultanée des deux dessins.

L'usage de dessins perspectifs peut donc être avantageux dans certains cas, mais il exige de grands soins pour la détermination de la ligne d'horizon, de la projection du point de vue et de sa distance au tableau. Il est bien vrai qu'en réalité, ces trois quantités ne seraient pas déterminées dans chaque circonstance, mais leur constance admise nécessiterait l'emploi de précautions propres à l'assurer.

Il est évident que les perspectives dont nous parlons ici ne sont pas des dessins exécutés simplement à vue, mais bien avec le secours de certains instruments, comme le diagraphe Gavard, la chambre claire modifiée de manière à donner une échelle constante (comme il sera dit au livre traitant de l'optique), ou mieux encore, le daguerréotype. Ce dernier instrument serait bien préférable, en ce sens qu'il exige beaucoup moins de temps pour l'exécution d'un dessin, sur lequel il donne tous les détails prévus ou non prévus plus exactement que les autres; il aurait de plus le mérite de fournir des dessins entièrement achevés, au lieu d'esquisses moins faciles à reconnaître.

Quel que soit le procédé employé, chaque perspective ne pourra jamais embrasser qu'un angle assez petit, souvent insuffisant pour renfermer toutes les directions qui seront à relever. Il faudra alors multiplier les positions du tableau à chaque station, et on pourra opérer comme il suit: soient T, T′, T″ une suite de positions du tableau rabattues autour de charnières parallèles à la ligne d'horizon et situées à égales distances de cette dernière. Si les tableaux n'ont aucune partie commune, et s'ils comprennent tout le paysage, deux arêtes consécutives *om*, *om′* de deux rabattements voisins, représenteront la même ligne ou plutôt le même vertical de la nature. Le point de vue sera projeté en S, centre d'un polygone régulier, si tous les tableaux



ont même largeur, condition à laquelle il sera bon de s'astreindre pour la simplification des opérations. Cette projection S sera, dans ce cas, commune à tous les tableaux.

Les choses ainsi disposées, rien ne sera plus simple que d'avoir l'angle formé par les plans verticaux qui, partant de S, vont passer par deux points A et B. Soient a et b les perspectives de ces points. On les projetera en α et β, et l'angle cherché sera mesuré par $\alpha S \beta$.

Quant aux angles à l'horizon, comme ils ne se rapportent qu'à un seul point à la fois, il n'y a pas lieu de modifier le procédé indiqué premièrement.

63. **Avantages et inconvénients.** — Il est évident que l'emploi des perspectives tel qu'il vient d'être décrit sommairement peut rendre quelques services ; mais comme cela arrive pour toute chose bonne en elle-même, son importance nous semble avoir été exagérée dans ces derniers temps. Quelques personnes ont même proposé de l'employer pour les opérations géodésiques, d'autres pensent qu'il permet d'exécuter un levé topographique presque complet. Nous ne partageons pas cet avis et nous croyons même que dans l'immense majorité des cas, il est inférieur aux procédés topographiques ordinaires et toujours insuffisant.

Le procédé le plus convenable pour l'utiliser est dû à l'emploi de vues photographiques qui fournissent tous les détails *visibles des stations*, et avec des teintes ayant quelque analogie avec celles de la nature, ce qui permet de reconnaître ces détails, sur deux vues différentes, plus facilement que par l'inspection de dessins formés par la pointe d'un crayon dirigé plus ou moins exactement. Mais nous verrons, dans un prochain paragraphe, que tous les résultats obtenus proviennent d'opérations graphiques et reposent sur des données reconnues expérimentalement. C'est assez dire que ces résultats seront loin d'atteindre l'exactitude des observations géodésiques où la seule opération graphique (mesure de la longueur d'un arc de cercle) est obtenue par une lecture directe complétée par l'emploi d'un vernier qui estime avec une grande approximation la partie qui n'a pas pu être lue.

D'un autre côté, il suffit d'avoir parcouru un terrain quelconque, pour être convaincu, qu'à moins que ce terrain soit une espèce de champ de manœuvre choisi en vue du but à atteindre,

les stations, quelque multipliées qu'elles soient, ne permettront jamais de dessiner tous les détails. A quoi serviraient des perspectives photographiques ou autres, pour le levé d'un intérieur de forêt ou de ville, de vallées plantées de peupliers, de coteaux couverts de pommiers ou de noyers toujours semblables, de simples chemins sinueux tracés en plein champ, sans points remarquables qui les précisent, comme cela arrive continuellement. On obviera, il est vrai, dans certains cas à cet inconvénient en multipliant les stations photographiques, pour rapprocher de plus en plus les points du canevas ; mais en agissant ainsi on tend à substituer ces stations à celles du cheminement ordinaire. Outre la perte de temps provenant de l'exécution des clichés, ne perd-t-on pas alors les avantages des perspectives ; en effet, les stations rapprochées, faites en vue d'obtenir les détails, ne pourront fournir que très-peu de ces détails, par suite du rapprochement de ceux-ci ; il faudra souvent, pour obtenir un seul point, deux stations (ayant nécessité une mesure de longueur, comme dans le cheminement ordinaire) ; en ces deux stations, il faudra faire deux vues photographiques demandant un long temps de pose, tandis que deux simples coups de boussole seraient arrivés au même résultat. De plus encore, la facilité de reconnaissance des points visés de loin, dans l'exécution d'un canevas à grands côtés, devient inutile quand on diminue trop les longueurs de ces côtés.

Il peut donc y avoir quelque avantage à employer les vues photographiques pour l'exécution d'un canevas, mais il ne nous semble pas que cet avantage existe lorsqu'on s'occupe du détail, à moins de circonstances exceptionnelles.

Cet avantage, rappelons-le, ne consiste qu'en ce qu'on évite la perte d'un grand nombre de points visés, qui souvent ne sont plus reconnus d'une seconde station, quand la mémoire seule peut les faire reconnaître. De là découle la nécessité d'un plus grand nombre de stations topographiques ordinaires que de stations photographiques. Mais par combien d'inconvénients ne paye-t-on pas cet avantage. La topographie ordinaire ne demande qu'une planchette et une alidade dont le poids est minime, la photographie exige un instrument qui, muni de tous les moyens qui peuvent assurer l'exactitude, forme la charge d'un homme vigoureux. L'observation à l'alidade, très-exacte par suite de la simplicité de l'instrument, donne des résultats immédiats n'exigeant qu'une feuille de papier et un crayon.

L'observation photographique a nécessité une opération antérieure qui, oubliée ou insuffisante, ou annulée par suite d'un accident, laisse le photographe complétement désarmé. Cette opération est la préparation préalable des plaques (car il n'y a pas lieu de songer à employer un procédé autre que celui au collodion sec). Elle a exigé un laboratoire plus ou moins bien installé, et cela encore dans les circonstances ordinaires d'un levé topographique, dans des gîtes quelconques; ce laboratoire a dû être muni de toutes les cuvettes, glaces, fioles, boîtes, etc., que nécessitent les procédés photographiques; tout cet attirail devant suivre l'opérateur quand il change de gîte, sous peine de le forcer, chaque jour, à faire de longues courses inutiles, si le levé à exécuter n'a pas une très-petite surface. Ce laboratoire installé, il faut préparer une douzaine de glaces pour un seul tour d'horizon, pour une seule station; toutes ces opérations nécessaires, ennuyeuses, méticuleuses, exigeant environ une heure pour cinq ou six glaces, il y a au moins deux heures préalablement ainsi employées pour chaque station de tour d'horizon. Le grand nombre de glaces ainsi préparées laborieusement doit être emporté et voyager avec l'opérateur, dont elles chargent beaucoup le bagage pendant toute une journée de travail. Avec un nombre restreint de châssis, il faut trouver des endroits convenables pour changer les glaces et remettre dans des boîtes, sans confusion, celles qui ont servi; il faut poser fort longtemps pour chaque vue, de 4 à 30 minutes, ce qui fait 48 minutes à 6 heures par tour d'horizon; il faut qu'il fasse un temps convenable, ni trop matin, ni trop tard, etc., etc.

Rentré au gîte le soir, il faut développer, laver, fixer, sécher, vernir, ce qui demande 10 minutes à 30 minutes par glace, c'est-à-dire encore de 2 heures à 6 heures par station de tour d'horizon; il faut qu'aucune glace n'ait été manquée complétement, par un oubli quelconque, par la faute d'une mauvaise préparation, d'aucun accident pouvant faire briser un verre fragile, etc.

Enfin, il faut préparer du papier, le sécher, l'impressionner avec le négatif, le fixer, le virer, le laver pendant 12 à 15 heures, et enfin l'utiliser, pour arriver à obtenir, par des constructions graphiques, ce que l'alidade et la planchette avaient fourni, sans soin, presque sans travail, presque instantanément.

L'avantage unique que nous avons déjà mentionné plusieurs fois, c'est-à-dire multiplicité des visées du canevas obtenue à

chaque station, nous semble payé plus qu'au centuple, par tous les inconvénients que le procédé entraîne avec lui. Que sera-ce donc si on observe que tous les temps ne sont pas convenables, que souvent pendant que le topographe travaillera, le photographe sera obligé d'attendre qu'une clarté suffisante se répande sur la nature.

Les vues photographiques ainsi employées peuvent, il est vrai, être aussi utilisées comme dessins pittoresque; mais, au point de vue qui nous occupe, elles ne doivent être considérées que comme donnant des indications propres à faire connaître le terrain, comme complément du dessin topographique, et un petit nombre d'entre elles seulement pourraient être employées à cet usage. Les indications *topographiques* ainsi obtenues seraient-elles bien utiles; elles feraient certes savoir si le pays est couvert ou découvert, pittoresque ou non, mais ne tromperaient-elles pas l'œil qui s'en rapporterait à un aspect plutôt qu'à l'étude du dessin géométrique qui donne la vérité et non son apparence. Eclairé de face, un mouvement de terrain apparaîtra plat sur l'épreuve photographique, éclairé de côté il paraîtra trop ondulé ; deux aspects différents seront donc fournis par le même objet, tandis que le levé topographique, sans se préoccuper de l'heure du jour, de l'état du ciel, aura dit ce qui est.

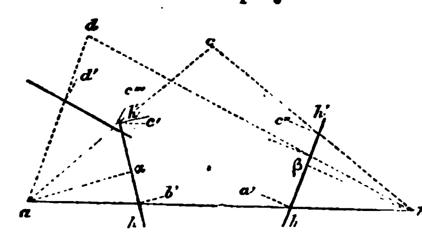
En résumé, l'emploi des vues photographiques ne nous semble pas très-utile en topographie; il peut rendre quelques services pour l'exécution d'un canevas à grands côtés; utile encore peut-être, quand les points de la triangulation se rapprochent, il ne nous paraît pas destiné à remplacer le levé de détail et le cheminement. S'il réussit quelquefois à se suffire seul ou à peu près, c'est qu'on se met dans des circonstances exceptionnelles, et même alors il est plutôt un tour de force qu'un procédé pratique.

Quelle que soit notre opinion personnelle, et nous ne nions pas, du reste, l'utilité accidentelle des procédés photographiques, nous devons donner la description des différents systèmes qui peuvent être employés.

64. Appareil photographique ordinaire. — Opérations par secteurs. — M. Laussedat a exposé en détail, dans le *Mémorial du génie*, les procédés à employer pour l'utilisation de vues successives prises avec une chambre noire ordinaire. Nous résumons à peu près ce qu'il propose à ce sujet.

Nous avons supposé en commençant, qu'en deux stations on faisait des perspectives renfermant chacune l'indication de la station opposée et qu'on rapportait toutes les directions obtenues, par rapport à celle de la base mesurée ou conclue d'opérations antérieures.

Soient a et b les projections des extrémités AB de la base connue, b' et a' les deux perspectives réciproques sur les tableaux h, h' supposés rabattus autour des lignes d'horizon, α et β les points principaux ou projections orthogonales des points de vue.



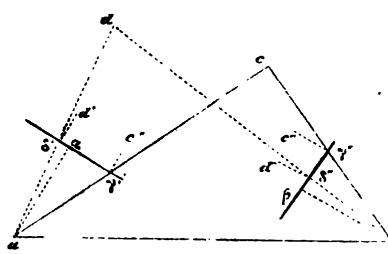
On place les lignes d'horizon à des distances $a\alpha = b\beta$ égales à celle du point de vue au tableau, distance qui doit être connue, puis supposant que ces lignes pivotent autour de a et b, on arrête les mouvements lorsque ab passe par les pieds des perpendiculaires abaissées de b' et a' sur les lignes d'horizon, et les tableaux se trouvent orientés sur le dessin par rapport à ab comme ils l'étaient dans sa nature par rapport à AB.

Pour déterminer la projection c d'un point C dont les perspectives sont c', c'' il suffit évidemment de prolonger les lignes qui partant des points de vue rabattus, vont passer par les pieds des perpendiculaires abaissées de c' et c'' sur les deux lignes d'horizon.

Mais les deux perspectives employées ci-dessus ne seront généralement pas les seules prises en A et B, ou bien l'une d'elles ne contiendra pas tous les points donnés par l'autre. Un point D par exemple ne figurera pas sur la première perspective prise de A, mais il paraîtra sur une seconde en d' ; cette seconde perspective ne pourra pas être orientée par rapport à ab, si l'image de B n'y figure pas. On fera alors cette opération par rapport à la ligne ac déjà déterminée.

Lorsque les points B et A n'apparaîtront pas sur les perspectives prises en A et B, on se servira d'un point commun C déterminé déjà, soit par l'emploi antérieur d'autres vues photographiques, soit par la mesure des angles CAB, CBA faite par les procédés topographiques ordinaires; la mise en place

des rabattements se fera, comme précédemment, par la superposition des lignes $a\gamma'$, $b\gamma''$ et des projections connues ac, bc; le reste comme ci-dessus.

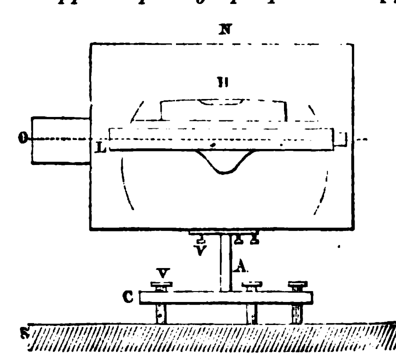


Au lieu de faire ces opérations graphiques, on peut observer que pour rapporter, sur le dessin, la projection ad, par rapport à ac, il suffit de connaître l'angle $\gamma' a \delta' = \gamma' a \alpha + \alpha a \delta'$, angles dont les tangentes sont $\alpha\gamma'$ et $\alpha\delta'$ dans un cercle dont le rayon, constant, est la distance d, de l'œil au tableau; il suffira donc de mesurer graphiquement ces longueurs, pour en conclure les angles, par un calcul très-simple, angles qui seront ensuite rapportés à partir de $a\alpha$ et $b\beta$.

Quant aux différences de niveau, elles sont évidemment fournies par l'équation $dN = \frac{\gamma' c' . AC}{a\gamma'}$ dans laquelle AC, côté du terrain, sera fourni par ac mesuré sur la planimétrie, $\gamma' c'$ pris sur la perspective, ainsi que $a\gamma'$, qu'on pourrait du reste avoir par la formule $a\gamma' = \alpha\gamma' .$ cosec. $\alpha a \gamma'$ dont les éléments sont déjà connus.

Les vérifications de la plaminétrie se feront comme d'habitude. en recoupant le point inconnu d'une troisième station : celles du nivellement n'exigent à la rigueur que les deux stations indispensables pour la détermination de la projection.

Appareil photographique. — L'appareil se compose d'une chambre noire ordinaire N, donnant une épreuve répondant à un angle de 32^g environ; elle se place sur une colonne verticale A au moyen de trois vis v et de trois branches b qui font corps avec la colonne. Celle-ci, mobile sur elle-même, est supportée par un limbe divisé, C, que parcourt un index i qui fait corps avec elle. Trois vis calantes V posent enfin sur une planchette épaisse S portée par un fort pied à trois branches.



Un éclimètre est placé le long d'un des côtés de la chambre noire, de telle manière que le centre optique de l'objectif de celle-ci soit à la hauteur de l'axe optique de la lunette, lorsque celui-ci est horizontal.

Cet éclimètre est réglé, à la manière ordinaire, par un retournement, en sorte que son axe optique sera horizontal quand le vernier marquera le *o* des graduations.

On commence par mettre la colonne verticale, par le secours du niveau H de l'éclimètre, comme on le fait pour les instruments de géodésie, en se servant à cet effet des vis du pied et du mouvement général de l'éclimètre, en sorte qu'en imprimant ensuite un mouvement de rotation à l'appareil, autour de cette colonne, toutes les parties de l'instrument conserveront les mêmes positions par rapport à la verticale et on pourra admettre que dans ces circonstances la glace est verticale, ce qui résultera des soins du constructeur. Du reste, une petite inclinaison de celle-ci serait sans influence sensible.

On vise ensuite, avec la lunette rendue mobile, le point qui, devant figurer sur les deux perspectives, servira à orienter celle-ci, et on mesure l'angle qu'il forme avec la ligne qui va à la seconde station. Cet angle est lu sur les graduations du limbe C qui est à peu près horizontal, et sa valeur est inscrite dans un carnet.

On prend ensuite la vue par les procédés photographiques ordinaires.

Pour pouvoir utiliser cette vue, ainsi que toutes les autres, nous savons qu'il faut connaître trois choses : 1° la ligne d'horizon ; 2° la distance du point de vue au tableau ; 3° la projection de ce point, sur ce tableau, quantités qui, constantes pour un même appareil, doivent être déterminées une fois pour toute.

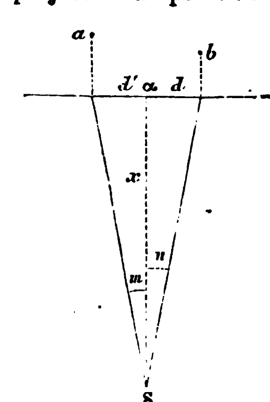
On arrive à ces résultats des manières suivantes :

La ligne d'horizon est la trace, sur la glace sensibilisée, du plan horizontal qui passe par le centre optique de l'objectif ; pour l'obtenir dans une circonstance donnée, on commence par mettre le vernier de l'éclimètre au zéro des graduations, et par suite du règlement, l'axe optique de la lunette décrira un plan horizontal pendant tout mouvement de l'appareil autour de la colonne rendue verticale. Si on imagine la ligne horizontale qui, passant par le centre optique de l'objectif, est perpendiculaire à la glace, cette ligne restera de même horizontale pendant le mouvement et elle décrira un plan horizontal dont la trace sur

la plaque sera la ligne d'horizon. On cherche alors à connaître cette ligne par deux de ces points, au moins ; pour cela on observe dans la campagne un point éloigné qui soit à la hauteur de l'axe optique de la lunette ; on emploie pour le trouver, le mouvement autour de la colonne. Ce point sera également à la hauteur du centre optique de l'objectif de la chambre, et quand même il n'en serait pas ainsi, l'erreur qui en résulterait serait insignifiante ; pendant le mouvement de rotation, l'image du point choisi, située toujours sur la ligne droite qui partant de ce point va passer par le céntre optique de l'objectif, occupera sur le verre dépoli mis à la place du châssis, différents points de la ligne d'horizon.

On tracera alors sur ce verre une ligne au crayon qui servira à placer très-près du châssis à épreuves, à l'intérieur de la chambre et fixés à demeure, deux index très-déliés qui arrêteront ensuite les rayons lumineux destinés à frapper deux points de la ligne d'horizon, sur une glace collodionnée substituée au verre dépoli.

La distance du point de vue au tableau, qui est ici la distance focale principale de l'objectif, pourrait se déterminer facilement si on connaissait d'abord la position *du point principal* ; celui-ci correspondra au milieu de la partie impressionnée d'une épreuve, si la chambre est bien régulièrement construite ; deux index également très-fins placés comme les précédents, à l'intérieur de la chambre et au lieu qui correspond à la perpendiculaire moyenne de la ligne d'horizon, serviront à déterminer, sur les épreuves suivantes, le point de cette ligne d'horizon, qui est la projection du point de vue.



Cette détermination ainsi faite permettrait de connaître la distance focale de l'objectif, en mesurant, avec le limbe de l'instrument, la valeur d'un angle petit et en prenant ensuite les images des deux points qui le déterminent, au moyen de la chambre noire, de telle sorte qu'elles soient placées à peu près symétriquement sur l'épreuve.

En mesurant sur celle-ci les distances d et d' des projections des points visés, sur la ligne d'horizon qui est connue, au point principal α, également con-

nu, on aurait, en désignant par x la distance du point de vue au tableau.

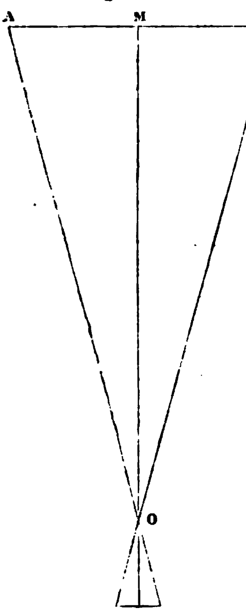
$$\text{tang. } m = \frac{d'}{x} \qquad \text{tang. } n = \frac{d}{x}$$

$$\text{tang.}(m+n) = \text{tang. S} = \frac{(d+d')\,x}{x^2 - dd'}$$

équation dans laquelle tout serait connu, à l'exception de x.

Une petite erreur commise dans la détermination du point principal α, possible puisqu'on est obligé, en opérant ainsi, d'invoquer une régularité de construction qui n'existe peut-être pas, n'aurait pas une grande influence, mais on peut l'éviter facilement, ainsi que celle qui en résulte dans la recherche de la distance de l'œil au tableau, en faisant simultanément la détermination de ces deux éléments.

Pour cela on mesurera sur le terrain une distance AM, on la doublera pour avoir un troisième point B, dans l'alignement des deux premiers, point auquel on fera placer un jalon, ainsi qu'en A et M, et on élèvera en M une perpendiculaire à AB, d'une longueur M assez grande pour que la distance focale qui lui correspondra puisse être confondue avec la distance focale principale de l'objectif. On prendra ensuite une vue photographique de A.M.B, en plaçant le milieu de la glace au point m, et en la dirigeant parallèlement à AB ou perpendiculairement à Mm, et enfin, on mesurera ab distance des deux images.



Le point milieu de ab sera le point principal, et comme vérification il devra correspondre à l'image du jalon placé en M.

La seconde chose à déterminer F $= m$O s'obtiendra ensuite facilement par le calcul très-simple qui suit :

$$\frac{\text{AB}}{ab} = \frac{\text{MO}}{m\text{O}}, \quad \frac{\text{AB}+ab}{ab} = \frac{\text{MO}+\text{F}}{\text{F}} = \frac{\text{M}m}{\text{F}}$$

d'où $\text{F} = \frac{\text{M}m \,.\, ab}{\text{AB} + ab}$ sera connu, puis-

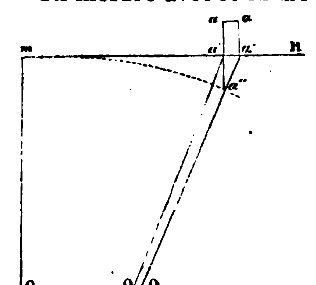
que tous les éléments du second nombre auront été mesurés.

Les erreurs qui proviendraient d'une fausse position du point de la glace choisi pour être placé en *m* seraient insignifiantes, par suite de l'éloignement de M, et l'image de celui-ci se formerait toujours sensiblement au même endroit.

Il faut, comme dans le cas précédent, n'employer qu'un angle AOB dont l'ouverture soit petite.

Correction des angles. — Les angles tels que AOB, *aOb* ne sont en effet égaux entre eux qu'autant que les lignes visées AO, BO ne s'écartent pas beaucoup de l'axe de la lentille, c'est-à-dire de la ligne qui passe par les centres des calottes sphériques. La condition de netteté des images exige qu'on ne prenne pas un champ plus grand que 30^g à 32^g, et déjà pour un écartement angulaire de 15^g à 16^g à droite et à gauche de l'axe, la déformation des angles existe, ceux de l'image étant plus petits que ceux de la nature quand on se sert, comme il convient de le faire pour la netteté de l'image, d'un diaphragme antérieur. Dans l'hypothèse que nous avons admise d'opérations par secteurs restreints, nous ne pensons pas que les erreurs commises dépassent et atteignent même celles qui résultent des procédés graphiques employés, mais néanmoins nous devons donner un moyen de parer à cette cause d'erreur qui, contrairement aux autres causes, agirait toujours dans le même sens.

On mesure avec le limbe de l'appareil un angle compris entre deux objets M et A, et on prend une épreuve renfermant les deux mêmes points, de telle sorte que l'image de l'un d'eux, *m* soit au point principal. On obtient ainsi, par les procédés indiqués précédemment, un angle *moa'* dont le sommet serait au point de vue rabattu.



L'angle lu sur le limbe a été d'un autre côté trouvé égal à *moa''* > *moa'*, et on le porte sur la figure. On remarque alors que pour avoir l'angle véritable *moa''* il suffirait de modifier un peu le moyen qui a fourni *moa'*; il n'y a pour cela qu'à limiter la perpendiculaire à la ligne d'horizon menée par la perspective de A, au point *a''* au lieu de l'arrêter au point *a'*, et à joindre *o* à *a''* au lieu de le joindre à *a'*.



En opérant de même sur d'autres angles mesurés des deux mêmes manières, on obtient une série de points a'', b''... qui peuvent fournir une courbe continue que l'on trace. Cette courbe servira ensuite à faire l'opération inverse de celles qui l'ont déterminée.

La correction des hauteurs se ferait aussi facilement. Il suffit de remarquer que le point A représenté en a, aurait dû avoir son image en α, s'il n'y avait pas eu de déformation, et qu'alors la différence de niveau aurait été fournie par

$$dN = \frac{\alpha\alpha' \times OA}{o\alpha'} = \frac{aa' \times OA}{o\alpha'}$$

$o\alpha'$ et aa' étant mesurés sur l'épreuve photographique, et OA' étant le côté de la nature obtenu par une mesure linéaire faite sur le dessin topographique et amplifiée en raison de l'échelle.

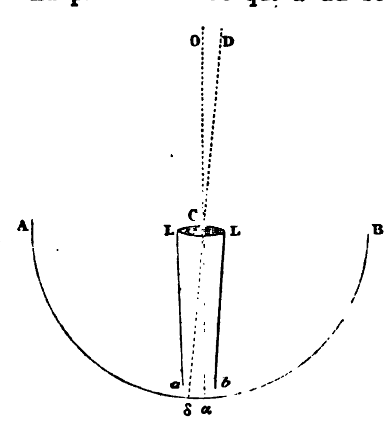
Nous n'avons pas tenu compte, dans ce qui précède, des déformations qui existent dans le sens vertical, parce que les angles à l'horizon sont toujours très-petits, et que les erreurs qui résultent de ces déformations sont beaucoup plus faibles que celles qui entachent les angles horizontaux.

Il ne nous reste que deux observations à faire ; les résultats seront d'autânt plus exacts qu'on opérera sur de grandes lignes de l'instrument, c'est-à-dire, qu'on se servira d'un objectif à plus long foyer, conséquence qui se présente dans l'usage de tous les instruments : en second lieu, les positifs employés ne devront pas être collés, mais seulement posés sur carton, retenus par leurs quatre coins, pour éviter les retraits et dilatations dus à l'emploi de la colle. Quant aux effets analogues provenant des virage, fixage et lavage du papier, il n'y a aucun moyen de les éviter, si ce n'est en employant le négatif lui-même, qui, fragile et posé sur verre, ne conduirait jamais à un résultat final, avant d'avoir été mis hors de service.

65. Appareil panoramique à mouvement simple. — La chambre noire ordinaire ne donne des images nettes que dans un champ restreint. En substituant aux objectifs simples qui ne permettent qu'une ouverture angulaire de 30 à 35 grades, des objectifs composés suivant différents systèmes, on peut augmenter ce champ jusqu'à 40 à 50 et, disent quelques constructeurs, même jusqu'à 60 grades et plus, en conservant la netteté sur les bords extrêmes de l'image. Il n'est pas bien sûr que

toutes ces promesses soient réalisées, en conservant, outre la netteté, l'égalité des angles de la nature pour que les objets ne paraissent pas déformés. On a eu l'idée, pour augmenter encore le champ et pour conserver une similitude exacte, dans les différentes parties de l'image, de construire des appareils panoramiques permettant, à la rigueur, de représenter un tour d'horizon.

La première idée qui a dû se présenter a été la suivante : soit AB un demi-cylindre à génératrices verticales et à base circulaire, C une lentille d'une distance focale égale au rayon du cylindre, et cette lentille mobile autour de son centre optique placé sur l'axe de ce cylindre.



Le cylindre restant fixe et un mouvement régulier de rotation étant imprimé à la lentille, son axe se dirigera successivement, d'un côté suivant les différents plans verticaux de la nature, de l'autre suivant les traces de ces plans sur les génératrices du cylindre, en sorte qu'en marquant sur ces génératrices les points correspondants de la nature, on aura la représentation de ceux-ci. Si on a tendu sur AαB un papier sensibilisé, l'impression aura lieu d'elle-même et sera ensuite rendue visible par l'emploi des réactifs convenables.

Ce que nous venons de dire s'applique seulement au cas où la lumière n'arriverait au papier que sur la génératrice située dans le plan vertical contenant l'axe de la lentille, et dans ce cas il suffirait que, ce plan passant toujours par l'axe du cylindre, celle-ci pivotât autour de cet axe, la position de son centre optique devenant indifférente ainsi que sa distance focale.

Mais il n'en peut pas être ainsi, en réalité, car chaque lieu de l'image ne serait frappé par la lumière que dans un temps infiniment petit, et même nul dans le cas hypothétique que nous avons admis. Il faut, pour que l'impression puisse se produire, que chaque point soit soumis à l'action de la lumière pendant

un certain temps, c'est-à-dire pendant une certaine partie de la révolution effectuée par la lentille.

On arriverait à ce résultat en armant la monture du verre d'un diaphragme L*ab*L formé de deux plans verticaux L*a*, L*b*, qui laisseraient entre eux, en *ab* un parallélogramme ouvert. En effet un point D donnerait à un premier instant, sur le cylindre, une image δ située sur l'axe secondaire DCδ; la lentille continuant son mouvement de rotation, le point D donnerait toujours lieu à une image située sur DC et par suite au même point δ, si DCδ est restée une ligne droite, c'est-à-dire si le centre optique n'a pas bougé par rapport à δ, c'est-à-dire enfin si *ce centre optique a été exactement placé sur l'axe de rotation.* Le même point δ sera donc impressionné par l'image de D, jusqu'à ce que, par suite du mouvement, le second plan vertical L*b* vienne intercepter les rayons lumineux.

Pour une même vitesse de rotation, le temps d'action de la lumière serait donc d'autant plus grand que le diaphragme *ab* serait plus ouvert. Cette ouverture serait limitée par la condition de netteté directe de l'image formée dans le cas de fixité sur un cylindre, si elle ne l'était d'autre part par les déformations angulaires latérales dont nous avons parlé dans un précédent paragraphe; en effet, ces déformations font qu'un angle fait dans la nature par une ligne fixe CD et l'axe principal OCα, n'est rendu exactement dans un appareil photographique que lorsque cet angle est petit; en sorte que lorsque le point δ serait trop éloigné de l'axe principal mobile Cα, il ne serait plus placé sur la droite DC, tandis que rapproché de cet axe, il serait situé sur cette droite fixe; avec un écartement trop grand, *a*α, qui résulterait d'une trop grande ouverture du diaphragme *ab*, la fixité de l'image de D ne serait pas obtenue, et le résultat par les actions successives de la lumière agissant en des points divers, produirait de la confusion dans l'image.

La petitesse forcée de *ab* diminuant le temps pendant lequel chaque point est frappé par la lumière, le temps de pose augmenterait considérablement si on n'observait pas que d'autre part, cette petitesse diminuant aussi l'ouverture du champ, il est possible d'augmenter d'autant plus l'ouverture du diaphragme ordinaire qu'on place en avant d'un objectif simple, ou dans l'intervalle compris entre les verres d'un objectif composé. Ce diaphragme a pour but d'arrêter les rayons lumineux qui, frappant les parties latérales de ces verres, produisent de la confu-

sion sur les extrémités des images ; l'effet mauvais n'existant qu'avec une intensité d'autant moindre que le champ est petit, on peut, dans le cas qui nous occupe, laisser arriver un plus grand nombre de ces rayons lumineux latéraux, c'est-à-dire, augmenter l'ouverture du diaphragme ordinaire.

Avec le diaphragme dont nous avons parlé, les images de points situés au-dessus ou au-dessous de la ligne d'horizon, resteraient soumises à la cause de trouble provenant de l'augmentation du champ dans le sens vertical, et elles ne nécessiteraient la diminution de ce champ que dans les limites ordinaires des vues fixes, c'est-à-dire 30 à 35^g pour l'emploi des objectifs simples. Dans l'exécution de vues panoramiques, ce champ vertical est toujours suffisant.

Nous avons donné quelques détails sur l'usage du diaphragme longitudinal parce qu'il faut l'employer dans tout système où le mouvement doit exister.

La distance focale de l'objectif employé doit être à très-peu près égale au rayon de la base du cylindre, à très-peu près seulement, disons-nous, parce qu'on sait que le tirage des chambres noires peut varier dans certaines limites, assez rapprochées, sans que le cliché perde de la netteté.

Les vues obtenues par le procédé que nous venons d'exposer, seraient dessinées sur un cylindre, et pour les voir sous un aspect qui soit le même que celui de la nature, ou pour avoir la mesure des angles naturels, il faudrait supposer l'œil, ou dans le second cas le sommet de ces angles, sur l'axe du cylindre à la hauteur du cercle d'horizon. Une image faite sur un cylindre n'étant pas admissible, on aurait eu soin de tendre un papier négatif qui peut être développé sur un plan; dans ce cas, la vue produite devrait être examinée en plaçant l'œil successivement sur les différentes perpendiculaires au plan, passant par la ligne d'horizon ; quant aux angles, ils seraient mesurés par les distances comprises entre les images des points projetés sur la ligne d'horizon, dans un cercle dont le rayon serait celui du cylindre.

Ce système n'est pas ou n'est plus employé parce qu'il nécessite l'usage d'un papier dont l'impression photographique est lente, et en second lieu parce qu'il exige impérieusement que l'axe optique soit sur l'axe du cylindre, condition qu'il est difficile mais non impossible de remplir, au moyen d'un petit mouvement longitudinal de l'objectif qui, écarté un peu plus ou un

peu moins du cylindre, donnerait (par rotation) des images de netteté différentes. Un certain nombre de tâtonnements exécutés en prenant des épreuves permettrait de reconnaître celle des positions de l'objectif qui, par suite d'une plus grande netteté du dessin, correspondrait à la position essentielle ; cette méthode est rendue possible, par suite de la petite variation de distance focale que nous avons dit être admissible.

Le principal défaut de ce système provient donc de l'emploi du papier négatif peu sensible, et de l'impossibilité de changer l'objectif pour avoir des images plus ou moins grandes répondant à la même amplitude angulaire. En dehors de ces inconvénients le mécanisme de ce système est beaucoup plus simple que ceux qu'on lui substitue.

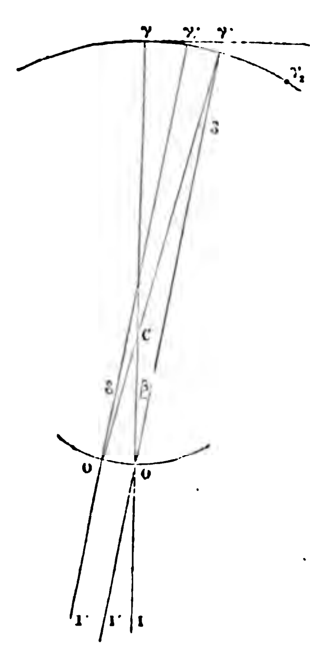
66. Appareils panoramiques à double mouvement. — Pour pouvoir opérer avec le collodion beaucoup plus rapide que le papier, il faut recevoir les images successives sur un plan au lieu de les recevoir sur un cylindre ; il faut pour cela, qu'à mesure que le mouvement de rotation amène le diaphragme rectangulaire vis-à-vis des génératrices du cylindre, le plan de la glace placée tangentiellement à celui-ci, et participant au mouvement de rotation, glisse dans le sens longitudinal de façon que la génératrice de contact occupe, sur ce plan, des verticales successives espacées convenablement. Le cylindre primitif supprimé de fait, se trouvera ainsi virtuellement remplacé par une série de verticales du plan, de telle sorte que le dernier représentera le développement du premier.

Dans le cas de la figure précédente, c'est-à-dire dans celui où le centre optique serait placé sur l'axe de rotation, il suffira que le déplacement longitudinal soit le même que le déplacement circulaire dû au mouvement de rotation.

Mais examinons le cas plus général, qui permet un changement d'objectif, cas dans lequel le centre optique se projeterait horizontalement hors de l'axe de rotation.

Soient C cet axe, O une première position de l'objectif, γ et γ' les images de deux points de la nature I et I' supposés à l'infini, images que, par suite de la petitesse de l'ouverture du diaphragme rectangulaire placé presque sur la glace, l'on peut regarder indifféremment comme formées sur celle-ci ou sur le cylindre.

Après une rotation quelconque α, le point de tangence γ viendra en γ' qu'occupait primitivement l'image de I'. Par le seul mouvement de rotation γ' s'est transporté en γ_1 tel que $\gamma\gamma' = \gamma'\gamma_1$.



D'autre part, le centre optique qui a partagé le mouvement général s'est transporté en O' de telle manière que, le point I' étant supposé à l'infini, son image irait se peindre en γ' de la nouvelle position de la glace, sur un parallèle à I'O, si cette glace n'avait été soumise qu'au mouvement de rotation. Dans ce cas I' aurait formé successivement ses images sur tous les points compris entre γ_1 et γ'_1 et le résultat produit aurait été complétement diffus.

Que faut-il faire pour que toutes ces images se superposant donnent un résultat unique ; il suffit que la plaque glisse sur elle-même en sens inverse du mouvement que lui donne la rotation, d'une quantité linéaire $\gamma_1\gamma'_1 = \gamma'\gamma_1 + \gamma'_1\gamma' = \gamma\gamma' + \gamma'\gamma'_1$.

Si les points $\gamma'\gamma'_1\gamma'_1$ sont assez rapprochés, ce à quoi l'on arrive par l'emploi d'un *diaphragme rectangulaire d'une faible ouverture* placée très-près de γ et en face de ce point, on pourra les regarder comme appartenant indifféremment aux cercles de rayons r et F ou à leur tangente et on sera en droit de poser, $\gamma\gamma' = \beta.F$, $\gamma'\gamma'_1 = \delta.F$, en désignant par F la distance focale de l'objectif. En sorte que le mouvement linéaire répondant à une petite fraction de rotation α devra être $F(\beta + \delta) = F.\alpha$. Mais à partir de la fin de cette petite rotation les choses se représenteront dans le même ordre, le mouvement linéaire devra encore être $F\alpha'$, en sorte que le mouvement général de translation sera $F(\alpha + \alpha' + ..) = F\alpha$, si α désigne maintenant un angle de grandeur quelconque, et il donnera naissance à une *perspective exécutée sur un cylindre de rayon F, cylindre que l'opération même aura développé sur la glace.*

Nous avons supposé que les rayons lumineux partis de l'ob-

jet arrivaient parallèlement en O et O', ou autrement dit que le déplacement du point de vue était négligeable, ce qui n'est rigoureusement vrai que pour des points situés à l'infini. Quelle sera l'influence d'une non-réalisation de cette hypothèse. En supposant que OO' soit l'intervalle qui correspond au diaphragme, intervalle pendant lequel les rayons agissent efficacement sur la plaque, le changement du point de vue produira sur celle-ci un déplacement de l'image d'un même point égale à $p.F$, en désignant par p l'angle de la nature, soustendant à une distance S, le déplacement OO' de l'objectif. On verrait facilement par un calcul très-simple, qu'en appelant d l'ouverture du diaphragme, on a pour expression de ce déplacement, $pF = \frac{OO'}{s} F = \frac{d(F-r)}{r.s} F$. Pour se rendre compte de l'importance de ce déplacement, supposons qu'avec les données, $F = 0^m,2$, $r = 0,1$, $d = 0,02$, on cherche quelle serait la valeur de s qu'il ne faudrait pas dépasser inférieurement pour que le déplacement des images d'un même point, déplacement nuisible à la netteté, ne dépassât 0^m0001 qui semble assez petit pour pouvoir être négligé.

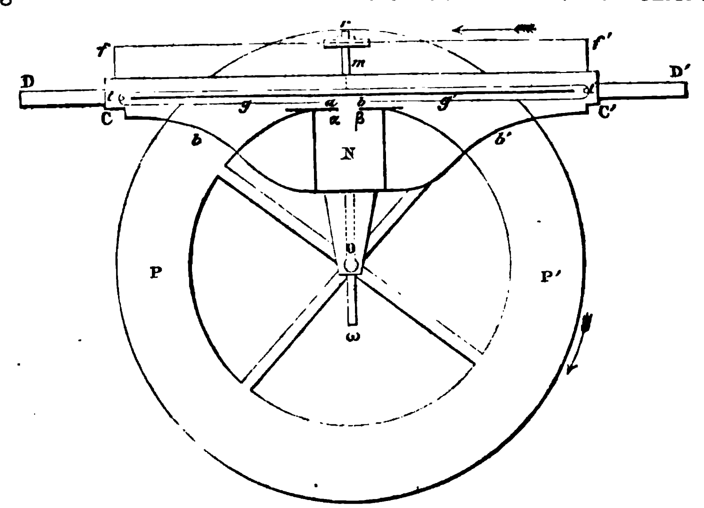
Il faudrait que $0^m,0001 > \frac{0,02.0,1}{0,1.s}. 0,2$, ou $s > 10000. 0,2. 0,02 > 40^m$.

Les suppositions faites sont assez défavorables pour qu'on soit en droit d'admettre que généralement le petit déplacement du point de vue provenant de la non-superposition du centre optique et de l'axe de rotation, sera insignifiant. On comprend pourtant que dans un cas de très-grand rapprochement des objets, ou de très-grande excentricité de l'objectif, il y aura lieu de se préoccuper de cette cause de trouble.

Les appareils panoramiques sur cylindre développé, ne peuvent différer que dans la manière mécanique d'obtenir la combinaison des deux mouvements qui satisfont à la condition essentielle que nous avons trouvée.

67. Appareil pantascopique de MM. Johnson et Brandon. — Cet appareil permet la production de vues panoramiques de champs divers, c'est-à-dire qu'avec les mêmes glaces et des objectifs différents, il peut fournir des vues soustendant des angles différents. Il se compose des parties suivantes : PP' est un plateau métallique fixé sur un pied, plateau sur lequel doit

glisser sans frottement une chambre noire mise en mouvement



circulaire par un axe de rotation vertical O qui est mu par un mouvement d'horlogerie placé sous le plateau, mouvement qui fait également tourner une petite roue *r* autour d'un axe horizontal *rm* qui a été entraîné par la première rotation.

La chambre noire NN'F est portée par une sorte de cadre Oω*b*DD'*b'* posé sur le plateau. Ce cadre, et par suite la chambre, participent au mouvement de rotation par le secours de la tige Oω qui est fixée à l'axe de rotation O au moyen d'une vis de pression.

Le châssis CC' peut glisser dans des coulisses appartenant à la chambre noire, et il est supporté d'un autre côté par deux galets qui peuvent rouler sur la partie *dd'* du cadre.

Ce châssis, ouvert du côté de l'objectif F contient la glace sensible qui ne pose que par ses bords horizontaux, de manière à permettre la rotation d'un obturateur en toile noire *tt'* tournant autour de deux tourillons verticaux *t*, *t'*, en laissant toujours une ouverture libre *ab* vis-à-vis d'un diaphragme αβ; cet obturateur ne participe pas au mouvement rectiligne du châssis, parce que deux de ses points sont fixés aux parois de la chambre noire. Il est destiné à arrêter les rayons lumineux venus du dehors, et il ne permet d'agir sur la glace qu'à ceux qui, après avoir traversé l'objectif, passent d'abord par le diaphragme αβ, puis par l'ouverture *ab*.

Le mouvement rectiligne est dû à l'action de la petite roue r tournant par le fait même du mouvement d'horlogerie, autour de l'axe horizontal rm; sur cette roue s'enroule un fil de laiton qui va s'attacher par ses deux bouts à deux points fixes f et f', faisant corps avec le châssis, en sorte qu'en tournant, cette roue avance sur le fil, ou inversement fait avancer chaque point de celui-ci, et par suite produit sur f et f' ainsi que sur le châssis qui les porte le mouvement rectiligne qui doit exister simultanément avec le mouvement circulaire. Le sens relatif de ces mouvements dépend du sens dans lequel le fil est enroulé ; on lui donne celui qui est convenable, c'est-à-dire celui qui fait marcher les deux mouvements en sens inverse.

Nous passons quelques détails de construction dont l'inspection de la figure suffira seule à faire comprendre l'utilité ; disons seulement que le diaphragme $\alpha\beta$ est composé de deux parties ; l'une, fixée à la chambre, laisse une ouverture assez grande que viennent régler deux petites feuilles de carton noirci qu'on peut rapprocher plus ou moins, suivant l'intensité de la lumière. On peut même les incliner l'une sur l'autre de manière à diminuer l'intensité de l'action photographique produite par le ciel, et avoir ainsi quelques effets de nuages, quand on opère sur collodion humide.

Voyons comment ce système peut satisfaire à la condition essentielle que nous avons précédemment trouvée, condition qui dit que le mouvement rectiligne doit être égal à $F\alpha$, F étant la distance focale employée, ou à très-peu près la distance focale principale, et α exprimant l'angle de rotation parcouru.

Soient V et v les vitesses angulaires relatives de l'axe horizontal de la petite roue r et de l'axe vertical qui imprime le mouvement circulaire ; pendant que l'axe vertical décrira un angle α, l'axe horizontal tournera d'un autre angle $\alpha \frac{V}{v}$ et chaque extrémité du fil ff' parcourra l'arc $\alpha \frac{V}{v} r$ qui mesure cet angle sur la circonférence de la petite roue.

En désignant par ρ la distance de la plaque à l'axe de rotation vertical et par m celle qui la sépare du fil ff', le déplacement linéaire de chaque point de cette plaque sera $\frac{V}{v} r \frac{\rho}{\rho + m} \alpha$.

La condition essentielle de netteté des images exigera par conséquent que

$$F = \frac{V}{v} r \frac{\rho}{\rho + m},$$

Le rapport des rotations $\frac{V}{v}$ doit être constant pour un même mouvement d'horlogerie ; il en est de même de r dans le système construit. Si m était nul $F = \frac{V}{v} r$ serait forcément constant aussi et l'appareil ne pourrait servir qu'avec un seul objectif. Pour avoir la facilité de changer d'objectif, il faut nécessairement varier ρ ou m. La variation seule de ρ est rendue possible par la construction, et elle n'aura d'influence sensible sur F, à moins d'être excessive, qu'autant que m ne sera pas très-petit.

Ainsi comme exemple soient :

$$m = 0,1 \quad \rho = 0,2. \quad \rho' = 0,4$$

on trouvera $\frac{F}{F'} = \frac{\rho}{\rho'} \frac{\rho' + m}{\rho + m} = \frac{0,2}{0,4} - \frac{5}{3} = \frac{10}{12}$ et la distance focale F ne pourrait être augmentée que de $\frac{1}{6}$ de sa valeur.

Il nous aurait paru plus avantageux, pour favoriser plus largement cette variation des distances focales avec des valeurs admissibles de ρ, de laisser celui-ci constant, ainsi que m, et de faire porter les variations sur le rayon r de la petite roue motrice ; cela aurait nécessité, il est vrai, une mobilité de la portion du plateau sur laquelle se meut cette roue, mais cette mobilité aurait été facile à obtenir, et les variations de foyers auraient été proportionnelles à celles des rayons.

On peut du reste se demander quelle utilité il y a à ce que la roue r pose sur le plateau ; si elle est utilisée, subsidiairement comme support, cette partie de son rôle pourrait être remplie par une autre roue étrangère à la rotation autour de l'axe horizontal, et celui-ci pourrait supporter seul la roue r directrice du mouvement rectiligne qui, pouvant alors avoir des valeurs quelconques, donnerait par suite de la constance attribuée à ρ et m, des distances focales, F, proportionnelles à r.

Le même appareil, avec les mêmes plaques, pourrait ainsi donner naissance à des images répondant à des angles naturels très-différents, et il conviendrait, par suite, à tous les cas de la photographie pour laquelle les vues panoramiques ne sont que des exceptions.

On voit que dans ce système le centre optique de l'objectif n'a pas eu besoin de se trouver sur l'axe de rotation, et qu'avec un objectif donné, possible pour l'appareil, il suffit de faire marcher toute la chambre noire sur le limbe le long du petit axe rectiligne $O\omega$ jusqu'à ce que ρ ait la valeur convenable. Cette position serait mal déterminée par le calcul; on l'obtient par quelques tâtonnements de la manière suivante. Après avoir mis l'objectif au point, par un mouvement propre ou par l'adjonction à la partie principale de la chambre noire, d'un appendice de longueur convenable, supportant cet objectif, on prend plusieurs épreuves, avec différentes valeurs de ρ approximativement connu. L'épreuve la plus nette fait connaître, par la valeur de ρ qui lui correspond, le tirage qui sera convenable toutes les fois qu'on emploiera l'objectif ainsi essayé. Ce tirage est alors marqué par un trait sur la règle $O\omega$, en même temps qu'une indication précise celui de l'objectif, ces deux tirages étant solidaires l'un de l'autre.

Nous avons dit que la position du centre optique de l'objectif en dehors de l'axe de rotation ne produisait pas d'erreur, ainsi que cela a été prouvé dans le paragraphe précédent; mais il faut se rappeler que cela n'a été dit que pour les images de points situés à l'infini ou du moins assez loin pour que le changement de position du point de vue, qui résulte du déplacement du centre optique, ne produisît pas de variation sensible dans la direction de la nature, ce qui peut être regardé comme le cas qui se présente le plus habituellement dans les vues panoramiques.

Lorsqu'on veut reproduire des objets rapprochés, des groupes de personnages même, comme peut le faire l'appareil de MM. Johnson et Brandon, cette position variable du point de vue n'est plus admissible, et pour rester constant, il doit être sur l'axe de rotation. Il faut alors que $F = \rho$ ce qui conduit à $\frac{V}{r}\frac{r}{F+m} = 1$, et le constructeur arrive, pour une valeur donnée de $\frac{V}{v}$ qui ne change pas avec le même mouvement d'horlogerie et pour un objectif donné F, à établir cette relation par des essais, tentés, grossièrement d'abord sur quelques valeurs de r, et complétés ensuite par de légères variations de m obtenues par l'adjonction de petites rondelles de cuir placées entre la roue r et une saillie de l'axe de rotation horizontal. Ces essais exigent l'exécution de

clichés représentant des objets rapprochés; le système convenable est celui qui a donné le cliché le plus net.

Nous avons vu du reste à la fin du paragraphe précédent, que la réalisation complète de la condition ci-dessus énoncée n'était nécessaire que pour la représentation d'objets excessivement rapprochés.

L'appareil de M. Brandon est depuis longtemps expérimenté pour la production de vues panoramiques pittoresques, et il a produit d'excellents résultats ainsi que cela est prouvé par l'examen des vues panoramiques de la Suisse de la collection Braun, vues qui ont été exécutées avec le secours de l'appareil que nous avons décrit.

M. Brandon n'applique pas son système à des tours d'horizon complets qui ne présentent que rarement de l'intérêt et dont la réussite est souvent difficile par suite de l'éclairage différent des parties qui sont frappées directement par les rayons solaires, et de celles qui sont situées, pour l'observateur, proche de la direction qui passe par cet astre. Ces appareils sont disposés de manière à donner des ouvertures angulaires variant de 120 à 175 degrés, avec l'objectif du plus court foyer destiné à chaque instrument. Il va sans dire que les objectifs supplémentaires, ne donnent sur les mêmes châssis que des épreuves provenant de champs plus restreints.

Les temps de pose, avec collodion humide, varient de 2 à 10 minutes : pour opérer avec du collodion sec, comme cela serait nécessaire pour la topographie, il faudrait probablement une dizaine de fois plus de temps, et cela pour avoir seulement un demi-tour d'horizon au maximum.

Application à la topographie. — Les appareils panoramiques s'adapteraient plus facilement que les autres aux besoins de la topographie. Leur mise en station serait la même, ainsi que la détermination de leur ligne d'horizon. La recherche de la distance focale serait plus facile parce qu'on pourrait employer un très-grand angle, par suite de l'absence des déformations latérales angulaires qui existent dans les vues directement prises sur un plan. Le point principal étant remplacé par tous les points de la ligne d'horizon, il n'y aurait pas lieu de s'en occuper.

Pour avoir l'angle de deux plans verticaux passant par deux points de la nature, il suffirait de prendre la distance comprise

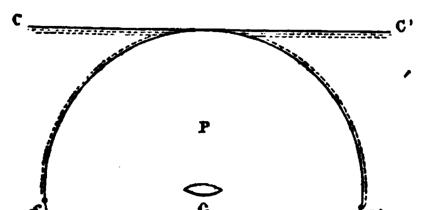
entre les projections de ces deux points sur la ligne d'horizon; divisées par la distance focale trouvée une fois pour toutes, elles donneraient la mesure de l'angle en rapport, mesure qui serait facilement transformée en grades et minutes.

Les distances zénithales seraient une conséquence de la hauteur linéaire de chaque point, au-dessus de la ligne d'horizon; le quotient de cette hauteur par la même distance focale déjà employée fournirait la tangente de l'angle à l'horizon.

Le seul défaut comparatif qu'on pourrait reprocher à ces instruments serait de nécessiter, à grandeur égale, un objectif de plus court foyer, donnant par suite des images plus petites que celles produites par la chambre noire ordinaire. D'un autre côté le nombre des épreuves pourrait être réduit de douze à trois, deux et même une seule.

68. Appareils panoramiques divers. — L'appareil de MM. Johnson et Brandon a résolu avantageusement le problème, ainsi probablement que plusieurs autres que nous ne connaissons pas. Mais il n'offre peut-être pas une assez grande simplicité de construction.

Ces ingénieurs avaient primitivement exécuté des instruments disposés de la manière suivante :



La chambre noire, que ne représente pas la figure, pivotait sur un plateau fixe horizontal P, portant à son centre un axe vertical de rotation, mu par un mouvement d'horlogerie situé en dessous. Les deux extrémités du châssis CC' étaient armées de petites poulies sur lesquelles passait un fil qui, attaché en f sur le limbe fixe, se dirigeait en s'appuyant d'abord sur le bord de celui-ci, sur la poulie C', puis sur celle placée en C et enfin sur un second point fixe f'. Il est évident qu'à mesure que le châssis était entraîné par le mouvement circulaire, il devait se mouvoir sur lui-même d'une longueur égale à l'arc parcouru, en sorte que si l'axe de rotation O contenait le centre optique d'un objectif, la condition que nous avons reconnue nécessaire, par suite de l'existence d'un diaphragme rectangulaire, pour que

les images ne soient pas superposées, se trouvait remplie d'elle-même, avec la plus grande simplicité de construction.

MM. Johnson et Brandon ont abandonné ce système par suite de deux inconvénients.

1° Ils ne croyaient pas pouvoir trouver assez exactement la distance focale d'un objectif pour pouvoir tracer rigoureusement le cercle décrit par la glace ; c'était là, pensons-nous, une crainte peu fondée, car la distance focale principale est effectivement très-difficile à trouver, mais est-ce toujours cette distance même, qu'on donne au tirage des objectifs ; chacun sait que la mise au point permet quelque latitude, dans ce tirage, sans que la netteté en paraisse troublée. Toute la question revenait alors à tracer le cercle avec un rayon compris entre ces valeurs extrêmes du tirage, ce qui simplifiait la solution cherchée. Avec un quelconque de ces cercles de rayons quelque peu variables, la mise exacte du centre optique au-dessus de l'axe de rotation se serait faite par de légères variations de tirage donnant naissance à des images qui, nettes sur la glace dépolie, par suite de la variation permise sur F, auraient été plus ou moins nettes sur des épreuves réellement exécutées, suivant que l'axe optique aurait été plus ou moins près de l'axe de rotation. La meilleure aurait précisé le degré de tirage convenable pour la réalisation de la condition essentielle.

2° Le changement d'objectif est impossible, et les images ne peuvent pas être prises de dimensions différentes avec le même appareil. Nous ne donnerions pas une grande importance à cet inconvénient, mais cependant il existe, et on comprend que, pour des vues pittoresques, il soit souvent plus avantageux de diminuer le champ et d'avoir des détails plus complets, que de conserver sur l'épreuve des parties du paysage qui n'offrent aucun intérêt ; mais au point de vue topographique il n'en est pas de même.

Courbes directrices du mouvement rectiligne. — La rotation doit être engendrée par un mouvement d'horlogerie qui seul peut la rendre bien régulière, ce qui est nécessaire pour qu'il n'y ait pas sur l'épreuve des zones plus venues les unes que les autres. Nous croyons pourtant qu'il existe un appareil dans lequel ce mouvement est donné par la main à une manivelle qui, mue avec une assez grande vitesse, transforme la vitesse et l'axe de rotation

par le moyen d'engrenages ou mieux de cordes et de poulies. Ce système, s'il existe, ne produira probablement jamais autant de régularité que le mouvement d'horlogerie, mais il peut permettre une accélération quelquefois utile, pour diminuer le temps de pose des parties trop vivement éclairées, et inversement. D'autre part, il a l'inconvénient d'exiger une main exercée et quelquefois infatigable.

Quoi qu'il en soit de la production du mouvement circulaire, celui-ci doit lui-même engendrer le mouvement rectiligne du châssis. MM. Johnson et Brandon arrivent à ce résultat en employant un mouvement d'horlogerie qui produit deux rotations autour d'axes perpendiculaires l'un à l'autre ; le second de ces mouvements est ensuite transformé en mouvement rectiligne au moyen du fil et de la petite roue. Une fois qu'on a obtenu, par expérimentation, les relations convenables entre les différentes parties de l'appareil, une concordance permanente existe entre les deux mouvements qui ne peuvent pas s'accélérer l'un sans l'autre.

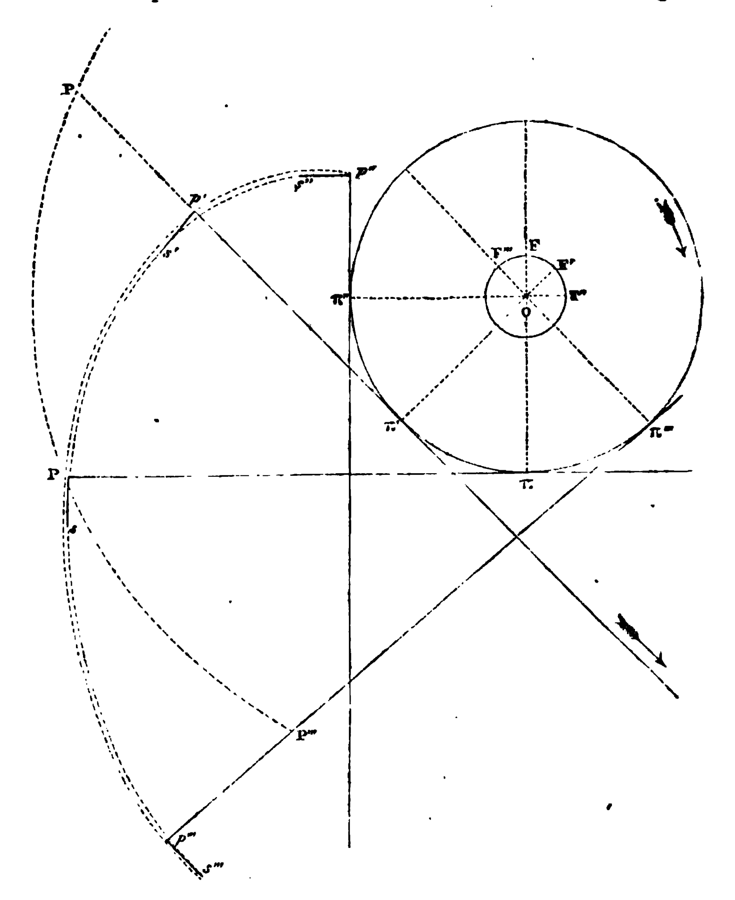
Avant de connaître le système de MM. Johnson et Brandon, nous avions cherché nous-même un procédé qui rendît les deux mouvements convenablement solidaires. Nous avons appris que le résultat auquel nous sommes arrivé, avait déjà été imaginé par M. Gagella, ingénieur mort à Londres il y a quelques années ; nous lui laissons alors la priorité du mérite de l'idée, si mérite il y a.

Ce résultat nous semble du reste inférieur à celui qu'a obtenu M. Brandon, sous certains rapports, aussi ne le mentionnerions-nous pas, s'il n'avait l'avantage de permettre une plus grande variation dans les distances focales possibles avec le même appareil.

Nous savons qu'il faut que le déplacement rectiligne du châssis relatif à un angle de rotation α, soit toujours égal à $F\alpha$, F désignant la distance focale employée.

Si on laissait agir seul le mouvement de rotation, l'extrémité primitive π de la plaque $P\pi$, resterait toujours au point de tangence du cercle de rayon $O\pi$, si O est le centre de la rotation; l'autre extrémité P décrirait une developpante de ce cercle. Mais le déplacement rectiligne de la plaque sur elle-même devant être $F\alpha$, si, à partir des points P, P', P'', P''' de cette développante, on porte des longueurs égales aux différentes valeurs correspondantes $F\alpha$, et si l'extrémité P de la plaque est assu-

jettie à correspondre aux points ainsi obtenus, cette extrémité et toutes les parties du châssis ont suivi le mouvement exigé.



La courbe directrice sera tracée graphiquement de la manière suivante. Par le centre de rotation O on mènera une suite de rayons faisant entre eux des angles égaux, 10^g par exemple, on mènera les tangentes au cercle de rayon $O\pi$ et limitant ces tangentes au cercle OP, on aura d'abord la courbe que parcourrait l'extrémité P si le mouvement rectiligne n'avait pas lieu. Pour engendrer celui-ci dans le rapport voulu, on portera à partir de P', P'' les longueurs calculées $F\alpha$, répondant à une distance focale F choisie d'avance, et aux différentes valeurs de

α adoptées dans le tracé des tangentes ; ainsi si l'angle élémentaire choisi est 10^g, on devra porter sur ces tangentes, 0,1 fois, 2 fois, etc.

$$F \times 10^g = F \frac{\pi}{2000} = F \frac{3,1416}{20} = 0,157\ F$$

La courbe $Pp'p''$..., ainsi obtenue par points, il suffirait de la regarder comme la trace d'un cylindre vertical à génératrices très-courtes, d'armer l'extrémité P de la plaque d'un style venant buter contre celui-ci, et le mouvement circulaire forcerait ce style, et par suite la plaque, à suivre le mouvement rectiligne exigé.

Nous avons toujours appelé P l'extrémité de la plaque ; il est évident que le point occupé par le style sera toujours un peu extérieur ; la construction indiquée se rapporte en réalité au style, mais en supposant celui-ci sur le prolongement de la glace sensible. Dans la pratique il n'en serait probablement jamais ainsi, et ce style se trouverait déplacé perpendiculairement à πP, d'une quantité Ps ; pour avoir la courbe réelle qu'il devrait parcourir et par suite le petit cylindre contre lequel il devrait s'appuyer, il suffirait de porter, en chaque point de la courbe précédente, et perpendiculairement à la tangente employée, des longueurs $P'S' = P''S'' = \ldots\ldots = PS$.

La figure suppose le centre optique de l'objectif très-différent de l'axe de rotation ; il n'y a aucun inconvénient à ce qu'il en soit ainsi pour les vues générales, mais rien n'empêcherait de faire coïncider à peu près ces deux centres, ce qui serait favorable dans le cas où, les objets étant très-rapprochés, la variation du point de vue successivement placé en F, F', F''... acquierrait de l'importance.

On aurait évidemment d'autant plus de champ que le point P serait plus éloigné de l'origine π, ou d'autant plus que la glace serait plus grande. On pourrait ainsi aller à faire un tour d'horizon complet, ce qui, avons-nous dit, serait peu utile au point de vue pittoresque, et ce qui serait inutile pour la topographie qui se servirait aussi facilement de deux demi-tours successifs que d'un tour entier. Cela aurait d'autre part l'inconvénient d'augmenter démesurément les glaces et par suite le châssis.

La directrice S,S',S''... a été une conséquence de l'adoption de la distance focale F ; elle ne peut par conséquent servir que

pour un seul objectif. Mais qui empêcherait pour en utiliser un second, un troisième, de tracer plusieurs courbes, ou plutôt plusieurs cylindres de génératrices différentes de hauteur, et de rendre le style mobile dans les deux sens verticaux et horizontaux, de manière à pouvoir amener son extrémité en contact avec celui qui conviendrait à l'objectif employé.

La construction de la courbe présenterait quelque difficulté, par suite de celle qui existe dans la recherche de la distance focale d'un objectif; nous avons indiqué deux moyens d'arriver à cette connaissance, moyens qui laisseraient toujours subsister quelque incertitude sur la vraie valeur de cette distance, valeur qui doit pourtant être rigoureusement connue. Cela aurait un inconvénient très-grave si la distance focale principale *à employer* était unique. Sans répéter entièrement ce qui a été dit au commencement du présent paragraphe, nous observerons seulement qu'il suffirait que le rayon employé dans l'estimation des arcs de cercle (Fα), fût un de ceux que permet, sans trouble pour les images fixes, le tirage plus ou moins prononcé, d'une chambre noire.

La position de F, F′... de la figure se déterminerait ensuite par des essais tentés sur des plaques sensibilisées.

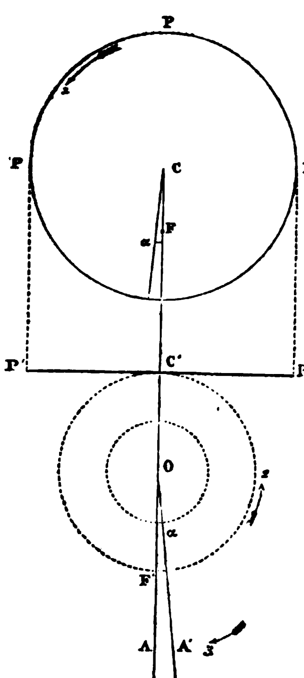
Planchette photographique de M. Chevalier. — Cet appareil n'est destiné qu'à la topographie. En vue d'obtenir directement les angles formés par les plans verticaux, M. Chevalier emploie, en outre du mouvement de rotation ordinaire nécessaire pour viser dans les différents azimuts, un second mouvement de rotation exécuté par la plaque sensible sur elle-même; ces deux mouvements solidaires l'un de l'autre, sont de même vitesse angulaire.

L'un d'eux, qui s'exécute autour d'un axe vertical O, entraîne tout l'appareil et il engendre, au moyen d'engrenages coniques, le second mouvement qui fait tourner la plaque sur elle-même autour de l'axe horizontal C,C′A. L'objectif F,F′ est placé à hauteur du milieu, à peu près, du rayon supérieur ou inférieur de la plaque. Ces deux positions donnent naissance à deux résultats différents d'aspect que M. Chevalier appelle nadiraux et zénithaux.

Pendant le mouvement de rotation autour de l'axe vertical O la plaque vient se placer successivement dans toutes les positions de tangence au cercle de rayon OC′ et l'objectif parcourt



le cercle de rayon OF′, les deux mouvements ayant lieu, par suite d'un détail de construction, dans les sens (1) et (2) indiqués par les flèches tracées sur la figure.



Pour se rendre plus facilement compte de ce qui se passe, on peut supposer la rotation (2) qui a lieu autour de l'axe vertical, remplacée par une rotation (3) exécutée en sens inverse par tous les points de la nature.

Supposons toute la plaque cachée par un diaphragme ne laissant passer la lumière que par une fente *sans largeur* placée le long de CF. A un premier moment une verticale A donnera son image sur le rayon vertical CF ; après une rotation α hypothétiquement exécutée par la nature entière, la verticale A′ viendra occuper la position primitivement occupée par A, et son image se peindra encore sur CF ; mais la plaque étant soumise au mouvement de rotation (1) égal au premier, la ligne primitivement frappée par les rayons lumineux venus de A se sera mue dans le sens (1) et elle aura cédé la place à *C*α qui faisait primitivement avec elle l'angle des deux rotations, c'est-à-dire l'angle de la nature compris entre les deux verticales A,A′.

Toutes les verticales viendront donc former leurs images sur les rayons du petit cercle CP, et pour connaître les angles formés par deux plans verticaux de la nature, passant par la station, il suffira de mesurer, dans le cercle CP, ceux qui sont formés par les rayons sur lesquels sont les images des points contenus dans ces verticaux.

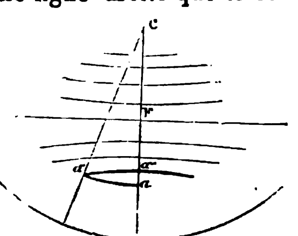
Le problème topographique se trouverait ainsi résolu, s'il n'y avait pas eu une supposition inadmissible ; cette supposition a admis que la plaque ne serait impressionnée par les rayons lumineux que suivant la verticale CF ; mais s'il en était ainsi, l'impression n'aurait pas le temps de se produire quelle que fût la

lenteur des mouvements de rotation. Il faut, en réalité, donner au diaphragme une dimension finie pour que les rayons lumineux émanés des verticales de la nature aient une action efficace.

Mais alors sera-ce toujours le même point de la plaque qui sera frappé par ceux des rayons qui seront venus d'un même point de la nature? Non, et cela rend les images produites très-diffuses.

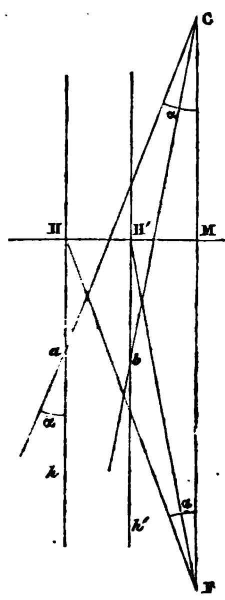
Voyons successivement quels sont les déplacements des images partiellement produites par le même objet, dans les deux sens vertical et horizontal.

Supposons, pour plus de simplicité, que l'axe vertical de rotation contienne le centre optique de l'objectif; un point de la nature, par suite de l'hypothèse de renversement de la rotation, décrira la base d'un cône droit dont l'axe se confondra avec celui du mouvement, et ses images iront se former sur la plaque, suivant les génératrices de ce cône; le lien géométrique de ces images sera l'intersection de celui-ci par le plan de la plaque, c'est-à-dire une hyperbole qui s'éloignera d'autant plus d'être une ligne droite que le cône sera plus fermé ou que le point sera plus loin d'être à l'horizon; il se produira alors, suivant les différentes hauteurs, ce qui se passe sur la figure. Un point A de la nature donnera une série d'images comprises, sur l'hyperbole, entre a et a', si l'action limitée par un diaphragme ne commence qu'en a'; mais le mouvement de rotation de la plaque ayant lieu, le point a' primitivement impressionné aura parcouru l'arc de cercle $a'a$, en sorte qu'il se produira pour représenter A une série d'effets agissant successivement sur les différents points compris entre a et a''. La ligne aa'' sera évidemment d'autant plus petite que a' sera peu éloigné de a'', et destinée à représenter un point unique, elle exige impérieusement le rapprochement de ces deux points extrêmes d'action photographique.

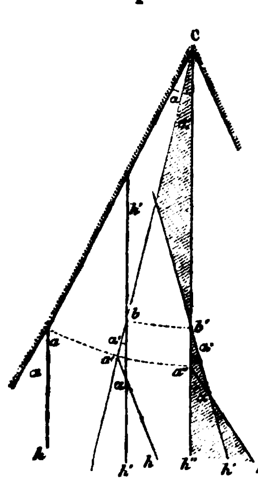


Pour arriver à ce résultat, M. Chevalier place près de la plaque un diaphragme en forme de secteur à angle très-aigu, diaphragme qui ne participe pas au mouvement particulier de celle-ci.

Estimons maintenant la diffusion dans le sens horizontal. Soit F la projection horizontale du point de vue situé sur l'axe de rotation, MHH′ la section constante de la plaque par le plan horizontal passant par F. Dans la rotation inverse, une verticale de la nature engendrera successivement des plans verticaux dont les traces seront FH, FH′, FM sur le plan horizontal, et H*a*, H*b*, CM sur le plan vertical. En faisant en C des angles égaux à ceux qui sont formés en F, on aura les lignes de la plaque sensible qui sont destinées à représenter les différentes verticales; ainsi, après les deux rotations égales à α, FH et H*h* se confondront avec C*a*, en CMF. A ce moment la verticale de la nature sera représentée par CM rayon vertical de la plaque; mais en sera-t-il toujours ainsi pendant la portion de la rotation utilisée pour l'impression lumineuse, c'est-à-dire sera-ce toujours le même lieu de la plaque, occupant successivement les positions CM, C*b*, C*a*, qui recevra l'image de la verticale qui aura successivement occupé sur celle-ci les positions FCM, H′*h*′, H*h*?



La première impression aura lieu suivant *ha*; puis la verticale tournant autour de F pour aller se peindre sur *h′b*, le rayon de cercle C*a* se sera placé sur C*b* entraînant avec lui la première impression qui se trouvera transportée en *a′h*, tandis qu'une nouvelle action lumineuse de la même verticale agira suivant *bh′*. De même en C*h″* les trois actions se seront ajoutées et l'impression se sera successivement produite sur *a″h*, *b′h′*, C*h″*. Mais le mouvement s'étant produit d'une façon continue, ce qui a été dit de ces trois positions se rapporte à toutes les positions intermédiaires, en sorte que tout l'espace compris entre



ces trois lignes aura été successivement atteint par les rayons lumineux venus de la même verticale.

Le mouvement se continuant jusqu'au second côté du secteur, des impressions semblables auront lieu produisant des nappes symétriques, et la ligne de la nature, au lieu d'être représentée par une ligne unique fortement tracée par l'action photogénique, sera remplacée par l'ensemble de ces nappes impressionnées avec des intensités variables dans leurs différentes parties.

La figure a représenté l'ouverture du demi-secteur avec des dimensions outrées : aussi la diffusion y paraît-elle complétement inadmissible. Le diaphragme devra forcément, pour éteindre les rayons nuisibles et ne conserver que ceux qui se rapprochent beaucoup de CM, être excessivement petit. Malheureusement en diminuant son ouverture, on perd en rapidité ce qu'on gagne en netteté. En conservant un temps de pose qui ne lasse pas démesurément la patience, peut-on arriver à avoir une netteté suffisante ? Cela ne paraît pas résulter de l'aspect des épreuves que nous avons vues.

Nous dirons peu de chose de la manière d'utiliser les résultats fournis par cet instrument; les angles horizontaux sont donnés immédiatement, les angles à l'horizon sont donnés par leurs tangentes qui sont égales aux hauteurs des images au-dessus de la ligne d'horizon de dessin, divisées par la distance focale de l'objectif. Cette ligne d'horizon est marquée par une circonférence noire provenant d'un crin tendu horizontalement devant le secteur diaphragme, à la hauteur du centre optique.

Si on avait à se servir de cet instrument, les détails que nous omettons seraient facilement imaginés. Mais nous ne croyons pas qu'il faille songer à l'utiliser.

Nous avons dit, au commencement de ce chapitre, qu'en thèse générale, nous trouvions que les procédés photographiques appliqués à la topographie ne rachetaient que par un avantage quelquefois assez important, il est vrai, les nombreux inconvénients dont ils étaient accompagnés. Cet avantage provient de la facilité que procurent les épreuves vues simultanément pour la reconnaissance de points qui, visés d'une première station topographique, seraient souvent perdus pour les suivantes. Que devient cet avantage dans le cas actuel ? Les vues produites sont presque illisibles, et il faut que les points soient bien remarquables pour être reconnus.

D'un autre côté, les mesures d'angles, très-faciles à tenter, il est vrai, seraient-elles bien exactes ; le cercle impressionné doit être forcément très-petit pour que l'instrument soit transportable, et les côtés comprenant les angles à mesurer n'ont généralement que le quart du diamètre de ce cercle, les points visés étant souvent proches de l'horizon. Dans certaines vues ces côtés sont de $0^m,05$. Si les points étaient bien déterminés, l'erreur linéaire commise involontairement dans l'estimation de leurs positions, appliquées à un côté du canevas topographique, serait multipliée par le rapport de ce côté réduit à l'échelle, à cette longueur de $0^m,05$. Dans une triangulation les côtés du dessin atteignent, avec la planchette, sans grand inconvénient, 0,3 ou 0,4 décimètres. L'erreur commise dans l'appréciation d'un sommet de triangle pourrait être $\frac{0,4}{0,05} = 8$ fois plus grande que celle de la lecture du dessin. Que sera-ce donc si cette image n'est pas nette, comme cela existe pour le système de M. Chevalier à mouvement continu ?

Cet ingénieur a proposé d'opérer, avec sa planchette photographique, par secteurs fixes, ce qui nous semblerait bien préférable. Pour cela on ne se servirait de la solidarité des deux mouvements de rotation que pour amener les vues partielles sur différents endroits de la plaque répondant à différents azimuts.

Mais alors, on aurait simplement des perspectives linéaires absolument semblables à celles d'une chambre noire ordinaire, avec cet inconvénient qu'elles seraient disposées sur une même glace, embarrassante par sa dimension, nécessitant un grand châssis, de grandes roues dentées devenues inutiles et produisant des images beaucoup plus petites que celles résultant de l'emploi d'un appareil ordinaire de mêmes dimensions générales.



CHAPITRE XIII

EXÉCUTION GRAPHIQUE

69. **Dessin des cartes topographiques.** — La première condition à laquelle doit satisfaire un dessin topographique est l'exactitude ; il doit ensuite être facilement lisible, et enfin son exécution doit plaire à l'œil. Il y a du reste une certaine connexité entre ces trois conditions.

Trait. — Il doit être net et non tremblé. D'après les conventions actuelles qui n'admettent plus d'ombres, tous les traits de la planimétrie sont de la même grosseur, attendu que dans l'ancien système on ne les renforçait en certaines parties que pour indiquer le côté de l'ombre. Néanmoins, on marque d'un trait rouge plus fort les gros murs dans le cas où l'échelle ne permet pas d'apprécier rigoureusement leur épaisseur par deux traits extrêmement rapprochés et comprenant un petit espace teinté avec du carmin. La même observation subsiste pour les ruisseaux dont la largeur ne comporte pas deux traits. On fait encore une exception à la règle générale pour les maisons dont on force le trait des côtés opposés à l'angle N.O. dans le cas où l'échelle est assez grande pour que ces maisons ne soient pas dessinées d'un seul trait plein, ce qui commence à se faire à l'échelle de $\frac{1}{20000}$.

Tout ce qui n'appartient pas au figuré général du terrain doit être considéré comme trait : tels sont les petits accidents qui ne sont pas assez considérables pour être indiqués par les tranches, tels que les escarpements, les ravins et les rochers. On pourra, pour ces objets, exécuter un travail qui rentre dans le dessin d'imitation, et qui deviendra alors signe conventionnel : ainsi les escarpements, les ravins et les rochers seront représentés par des traits dont les contours exprimeront les différentes masses irrégulières projetées horizontalement. Ces traits seront plus ou moins multipliés, suivant que les rochers seront plus ou

moins divisés : leur inclinaison sera déterminée à peu près par le gisement des couches. Ils ne seront au surplus assujettis à aucune loi fixe.

Pour distinguer la nature et l'importance des chemins, on a établi des conventions qui les font reconnaître à la simple inspection. C'est ainsi que les routes impériales se tracent au moyen de deux traits pleins avec fossés. Les routes départementales et les chemins de grande communication s'expriment au moyen de deux traits pleins sans fossés. Les chemins vicinaux se représentent par un trait plein et l'autre ponctué ; les chemins d'exploitation par deux traits ponctués, et enfin les sentiers par un seul trait plein ou ponctué. Au surplus, il faut pour tout ce qui est relatif au tracé des routes, chemins, canaux, etc., consulter le tableau qui a été gravé au Dépôt général de la guerre, et qui donne les modèles pour les échelles le plus fréquemment usitées.

Les teintes sont conventionnelles et réduites à la plus grande simplicité pour la facilité et la promptitude du travail. Elles sont uniformes comme le trait, c'est-à-dire posées à plat : il n'y a d'exception que pour les eaux que l'on renforce également sur l'un et l'autre bord par une légère teinte adoucie. Nous rappelons ici succinctement que les bâtiments et constructions se figurent par une teinte peu intense de carmin ; les prés, pâturages et vergers, par des verts plus ou moins bleus ; les bois, par du jaune légèrement modifié par de l'indigo ; les vignes, par une teinte violette composée avec de l'indigo, du carmin et un peu de gomme-gutte ; les broussailles, les bruyères et les friches par du vert peu intense panaché avec de la teinte de bois, du rose ou de la teinte nankin (anciennement consacrée à représenter les terres labourables et formée de gomme-gutte et de carmin) : les eaux douces s'expriment par une faible teinte de bleu indigo ; celles de la mer par la même teinte modifiée avec une très-petite quantité de gomme-gutte ; enfin les sables, par une teinte de jaune et de carmin, un peu plus forte que celle dont on couvrait les terres labourables. On emploie la même couleur pour les escarpements. Quant aux rochers, dont le ton local varie ordinairement avec leur structure, ils seront représentés par des nuances imitées de la nature, de manière à rendre le mieux possible l'espèce des roches, comme la disposition du trait indiquera leur composition par stries, par couches ou par blocs. On

ne peut rien dire de plus positif à leur égard, l'habitude du dessin d'imitation suppléera au reste.

Ajoutons encore que, dans un plan de ville, on est dans l'usage de signaler les bâtiments publics, civils ou religieux par une teinte rouge deux fois plus intense que pour les habitations privées : les établissements du génie militaire sont teintés avec du bleu un peu rompu par du carmin pour donner à peu près l'aspect de l'ardoise, et ceux de l'artillerie par une teinte violette composée des mêmes couleurs que la précédente, mais dans une autre proportion.

Indiquons ici une chose qui nous paraît bonne, quoiqu'elle ne soit pas encore généralement adoptée : elle consiste à employer pour le dessin des fossés et ruisseaux dont la largeur ne comporte pas deux traits, le bleu de cobalt; on évite par là l'inconvénient d'un trait qui se confond quelquefois avec le noir, lorsqu'il est fait avec de l'indigo.

Tout ce qui peut contribuer à la clarté d'une carte n'est point à dédaigner, attendu qu'après l'exactitude, c'est son principal mérite. Sous ce rapport, il n'est pas indifférent d'écrire de telle ou telle manière les noms propres ou les indications quelconques qui doivent y entrer.

Pour tout ce qui est relatif à la grandeur des lettres, à leur grosseur, leur écartement, etc., il faut consulter les modèles adoptés en dernier lieu au Dépôt de la guerre. On y trouve des types de tous les caractères usités, puis l'indication et les dimensions de ceux qui sont consacrés à tout ce qui doit s'écrire sur une carte. L'usage est d'écrire les noms des villes, villages, bâtiments isolés à droite ; cependant on pourra déroger à cette règle dans le cas où le nom, ainsi placé, couvrirait des détails essentiels. Les noms de routes, chemins, sentiers, et les désignations des communications qu'ils fournissent, s'écrivent parallèlement à leurs sinuosités en choisissant pour le sens de l'écriture celui qui force le moins à tourner la carte pour faciliter la lecture.

Il faut qu'un dessin topographique, destiné à être lu plutôt que regardé, présente une certaine harmonie telle qu'aucune partie n'y soit sacrifiée, comme cela se fait au contraire dans les dessins pittoresques. Il faut donc éviter d'y marquer des choses trop visibles, trop brillantes, parce que l'œil, involontairement attiré vers ces parties, négligerait celles qui auraient les aspects contraires. On ne doit alors employer que des

couleurs qui ne soient pas trop voyantes; le bleu de Prusse, par exemple, doit être remplacé par l'indigo, dans le lavis. Les teintes doivent être légères, afin que tout le dessin ne soit pas écrasé par elles, afin que le trait de la planimétrie, les hachures du relief conservent toute leur visibilité.

Comme dernier conseil nous dirons que le trait doit être plus fort que celui des épures, et que lors de son exécution, il doit paraître trop lourd afin de pouvoir supporter la concurrence des teintes et des hachures qui tendent à diminuer son importance.

Lorsque le dessin ne doit pas être fait à l'encre et en couleurs, il faut employer un crayon un peu dur dont les traits ne risquent pas d'être trop facilement effacés par le frottement. Ces traits doivent être nets et secs.

On n'a plus, dans le dessin fait au crayon, les ressources fournies par les teintes. On y supplée alors par des signes conventionnels qui, malheureusement, sont quelquefois insuffisants; les maisons sont couvertes de petites lignes fines parallèles, les rivières sont filées, les divisions de culture marquées par une lettre ou par des pointillés d'apparences diverses, enfin les bois plus importants à connaître sont feuillés. Ce dernier signe conventionnel doit être un peu plus fort sur les limites que dans l'intérieur afin de ne pas trop charger le dessin, et partout il doit être très-léger.

Figuré du relief. — Nous avons dit, au § 4, que pour donner aux hachures la grosseur et l'écartement convenables en rapport avec l'hypothèse de représentation du relief, on avait établi plusieurs *diapasons* ou modèles graphiques pour les différentes échelles. Nous ne pouvons pas donner ici la figure de cet instrument, figure trop embarrassante pour le texte ; mais nous rappelons qu'il est, pour le topographe, un outil aussi indispensable que beaucoup d'autres.

Pour se servir d'un diapason, il suffit de prendre celui qui se rapporte à l'échelle et d'appliquer le tracé des hachures correspondantes à la pente qu'on veut rendre, en copiant celles qui, sur ce diapason, représentent cette même pente.

Mais, sur les dessins topographiques, les inclinaisons du sol ne sont connues que par les longueurs des hachures à tracer. On a donc dû les indiquer de la même manière sur le diapason; aussi, en regard de chaque type de hachures, a-t-on mis l'écar-

tement des courbes qui correspond à la teinte représentée ou à la pente qu'elle est destinée à rendre.

Mais cet écartement, pour un même angle à l'horizon, dépend de l'équidistance et de l'échelle ou de l'*équidistance graphique* ou *réduite;* le diapason n'a pas pu tenir compte de la variation de cette quantité se présentant dans des circonstances diverses; aussi les renseignements qu'il fournit ne se rapportent-ils qu'à une seule et quelquefois à deux valeurs de cette équidistance réduite.

Si dans un cas particulier on emploie une valeur différente de celles-ci, il faut avoir soin de tenir compte de ce changement, comme cela a été dit au § 4.

Nous plaçons ici quelques renseignements relatifs à l'exécution graphique du relief.

Les hachures de deux tranches successives ne doivent jamais être dans le prolongement les unes des autres, ce qui produirait un effet désagréable et ce qui attirerait trop les yeux sur certains endroits. En les alternant on a encore l'avantage de laisser subsister virtuellement la courbe.

Sauf dans de très-rares exceptions les teintes fournies par les hachures doivent être fondues. Les courbes tracées avec une équidistance nécessairement finie, ne représenteraient exactement la nature que si elles étaient en nombre infini, et dans ce cas le passage d'une pente à une autre, naturellement effectué par degrés insensibles, le serait également sur le dessin par la décroissance des longueurs de hachures, aussi effectuée par degrés insensibles; la teinte qui en résulterait serait donc fondue. On ne peut pas multiplier ainsi indéfiniment le nombre de petites tranches, mais en limitant ce nombre on doit conserver l'effet naturellement produit. C'est en tenant compte des pentes supérieure et inférieure qu'on arrive à ce résultat, en amincissant ou grossissant, lorsqu'il y a lieu de le faire, l'extrémité de la hachure vers le côté où la pente diminue ou augmente.

Lorsque le changement devient trop brusque, cette modification apportée à la grosseur de la hachure peut même devenir insuffisante, à moins qu'on n'emploie un renforcement qui produise une épaisseur de trait plus forte que celle de la tranche qu'on veut raccorder, ce qui ne doit jamais se faire. On a alors recours quelquefois à l'emploi de petites hachures supplémentaires, emploi difficile à faire et dont on abusera le moins possible.

Comme conséquence de ce qui vient d'être dit, on voit que les commencements et fins de pente ne devant pas avoir lieu brusquement, il y a lieu de les exprimer par des hachures qui, commençant avec une certaine intensité, doivent finir très-finement.

Il faut bien s'abstenir de figurer les normales suivant la ligne de faîte ou de partage, quoique ces lignes soient en effet de plus grande pente, parce qu'alors placées dans le prolongement les unes des autres, elles formeraient une ligne continue qui attirerait l'œil, contrairement à la convention qui établit que pour les pentes les plus douces le papier doit être le moins couvert par la teinte. Les abords de ces lignes de partage sont d'une exécution difficile quand les pentes existant suivant ces lignes sont faibles comparativement aux pentes latérales. Il en résulte que si on prolongeait les hachures partant de la courbe inférieure jusqu'à la courbe supérieure, qui a beaucoup moins de développement, ces hachures se rapprocheraient trop et ne produiraient pas la teinte qui doit être indépendante du lieu où elle est tracée (en admettant les mêmes pentes supérieure et inférieure à celle de la tranche considérée). Il faut donc, pour atteindre cette uniformité de teinte, supprimer des hachures et amincir le trait des autres, dans le sens convenable.

Quelquefois, pour la facilité d'exécution, on s'éloigne un peu de la loi qui dit que les hachures doivent être normales aux courbes, mais alors on doit avoir soin d'établir une concordance entre les inclinaisons un peu faussées et celles des tranches avec lesquelles elles se raccordent, pour ne rentrer dans la règle générale que par degrés insensibles.

Enfin, toujours pour les abords des lignes de partage, le rapport des pentes existant suivant ces lignes et des pentes latérales, peut devenir assez faible pour que l'exécution graphique qui forcerait à courber les hachures outre mesure, devienne trop difficile ; on se contente alors d'exprimer les raccords avec les pentes supérieure et inférieure, en laissant un intervale blanc entre ces raccords.

La même difficulté se présente plus souvent et avec plus d'intensité dans les thalwegs, lorsque les pentes latérales sont beaucoup plus fortes que celles de la ligne de réunion des eaux. Dans ce cas on ne cherche pas à raccorder la pente latérale et on la fait tomber normalement au thalweg. C'est le cas qui se présente, par exemple, lorsque les mouvements de terrain

viennent s'éteindre dans la vallée que parcourt une rivière dont le lit est toujours à peu près horizontal.

Lorsque, suivant une inclinaison quelconque, il existe un changement de pente brusque, il produit une arête qui coupe les courbes et sur laquelle elles s'infléchissent toutes angulairement. Les portions séparées par cette arête appartenant à des surfaces d'inclinaisons différentes, doivent être représentées par des hachures de grosseurs et d'écartements différents aussi, qui n'aboutissent pas à l'arête sur le prolongement les unes des autres. Dans chacune de ces parties, les hachures ou fractions de hachures dépendront de l'écartement correspondant des courbes, comme si elles étaient continuées au delà de l'arête, ou, en d'autres termes, comme si chacune des deux surfaces conservait son uniformité au delà.

Les cols étant les raccords de deux pentes ascendantes et de deux pentes descendantes, appartiennent à la fois à deux lignes de partage et à deux thalwegs qui viennent se recontrer bout à bout : il doit nécessairement y exister une partie horizontale plus ou moins étendue. Une portion blanche du dessin devra donc y exprimer leur existence, du reste généralement assez vague. Quand même, ce qui est possible géométriquement, les changements de sens des pentes aurait lieu suivant un point ou une ligne, il y aurait lieu de laisser subsister cette zone blanche, pour faciliter la lecture du dessin.

Les escarpements sont rendus par des hachures très-serrées, tracées dans le sens de la pente, sans aucune autre règle.

Les déblais et les remblais se confondant ensemble dans la représentation plane, on est convenu de dessiner leurs flancs par de petites hachures en forme de virgules, dont le délié est toujours à la partie la plus basse du terrain.

Enfin, nous recommanderons en terminant de ne pas sacrifier, dans l'expression du relief, l'exactitude à l'exécution plus ou moins bien réussie d'un effet plaisant à l'œil. Le dessin topographique est plutôt géométrique que pittoresque ; tant mieux si la nature du pays se prête à l'exécution d'une œuvre agréable à la vue, tant pis dans le cas contraire ; mais toujours la vérité doit dominer la fantaisie.

70. **Copie et réduction des cartes.**—Si l'on veut reproduire un dessin à même échelle, on en partage la surface en carrés ou rectangles par deux systèmes de lignes parallèles tracées

légèrement au crayon : ont race, sur une feuille de papier, un même nombre de carrés égaux à ceux de l'original, et l'on y dessine de proche en proche tous les détails compris dans les rectangles correspondants de la minute ; cette opération se fait, soit à vue, soit en rapportant chaque point par des coordonnées, soit enfin en décrivant deux arcs de cercle dont il est l'intersection. Les directions des lignes droites s'obtiendront en plaçant deux de leurs points, ou en les imaginant prolongées jusqu'à la rencontre des côtés du rectangle qui les comprend, et en reportant les points de rencontre au moyen du compas. Dans les parties du dessin plus chargées de détails, on pourra multiplier les carreaux ou les diviser par des diagonales.

Quelquefois, au lieu de carrés ou de rectangles généralement plus commodes pourtant, il vaut mieux se servir de figures égales de formes quelconques déterminées par la chose même à représenter. Ainsi, quand, ayant achevé la planimétrie, on veut tracer les courbes, il est préférable de substituer aux rectangles, les figures formées par les thalwegs, lignes de partage, commencements et fins de pente, qu'on place sur la projection par rapport aux lignes et aux points de celle-ci. De cette manière, si la copie de la première partie a produit quelque inexactitude, le relief se trouve déplacé de la même manière, ce qui est essentiel.

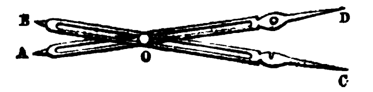
Le meilleur procédé à employer pour arriver à la copie exacte d'un dessin est le calquage ou le décalquage.

Lorsqu'il s'agit de réduire un dessin à une autre échelle, on substitue la similitude des figures à leur égalité, et pour exécuter les rapports intérieurs, on se sert d'un angle ou d'un compas de réduction.

Le premier se construit en traçant sur un papier et sous un angle quelconque deux lignes dont les longueurs soient dans le rapport des échelles, et en menant une suite de parallèles espacées d'une manière quelconque. Les portions des lignes primitives comprises entre le sommet et une de ces lignes parallèles à la base, seront toujours dans le rapport des échelles, et l'une d'elles appartenant au dessin, l'autre devra être la ligne correspondante de la copie.

Le *compas de réduction* se compose de deux branches AD BC se croisant en un point O, qui est la charnière du compas dont A,B,C et D sont les pointes : les branches sont disposées de manière que toujours la ligne qui unirait A à B soit parallèle à

celle qui irait de C en D; il s'ensuit que l'on a AB : CD : : AO : OD, et par conséquent que CD étant la longueur d'un côté sur le modèle, AB sera son homologue sur la copie, si l'on a pu

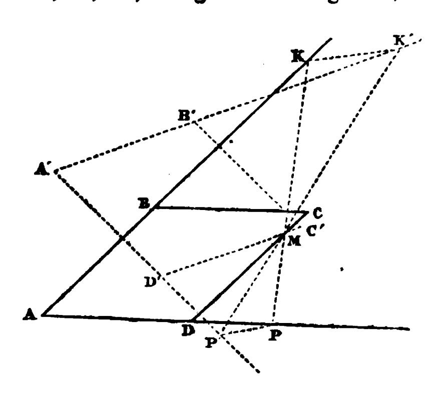


établir d'avance entre AO et OD le rapport des deux échelles. C'est à quoi l'on parvient facilement en raison de la construction de l'instrument. Le pivot O traverse les joues du compas par deux fentes longitudinales dans lesquelles on peut le faire glisser, seulement quand elles se superposent. L'une des branches AD porte des graduations qui indiquent que le pivot leur correspondant, le rapport de AO à OD est $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, etc.

Quel que soit le moyen qu'on emploie pour réduire un dessin, les courbes doivent y être copiées en forme, mais non en nombre. Nous savons, en effet, que si on emploie une équidistance graphique constante, ce qui est avantageux, généralement du moins, l'équidistance naturelle devra varier avec l'échelle, et les hachures des deux dessins, répondant aux mêmes pentes, devront avoir même longueur. Il ne faudra donc pas que ces dessins aient le même nombre de courbes ; si par exemple la copie se fait à une échelle moitié, il ne faut prendre qu'une courbe sur deux de celles du modèle.

Nous avons dit que la meilleure manière d'avoir une copie exacte, était celle du calquage. Un dessin ne peut pas être réduit par ce procédé auquel on substitue le suivant.

Pantographe. — Cet instrument se compose de quatre règles AB,DC,AD,BC égales en longueur, ou tout au moins égales deux à deux : elles sont unies par quatre articulations A,B,C, D de manière que leur ensemble forme toujours un parallélogramme dont les angles seuls varient. A un point K est adapté un calquoir : en M est placé un axe vertical traversant une douille qui est adhérente à la branche CD. Tout l'instrument peut ainsi se



mouvoir autour de cet axe qui est maintenu par une masse de plomb dans laquelle il est vissé. Pour rendre plus doux les mouvements du pantographe, il repose sur des roulettes placées en A et aux extrémités des côtés AB,AD prolongés.

Cela posé, démontrons que si un crayon est fixé en P sur le prolongement de AD et à la rencontre de la droite MK, il décrira une figure semblable à celle que l'on fera parcourir au calquoir, et de plus le rapport des côtés homologues des deux figures sera le même que celui des distances de P et K au pivot M : en effet, les côtés AK et DM étant constamment parallèles et de longueurs invariables de même que AP et DP, il en résulte que les triangles AKP,DMP seront toujours semblables, puisqu'ils auront toujours un angle égal compris entre côtés proportionnels, et que par suite les angles M et K devant être égaux, la ligne PMK sera toujours une ligne droite.

Si on observe ensuite que le rapport $\frac{KM}{PM} = \frac{AD}{DP}$ devra rester constant par suite de l'invariabilité de longueur de AD et DP, on verra que deux triangles tels que KK'M et PP'M décrits par le calquoir et le crayon, seront toujours semblables, et que par suite les figures du modèle et de la copie composées d'un même nombre de triangles semblables et semblablement placés, seront aussi semblables.

Si l'on veut que les échelles des deux plans soient entre elles comme m et n, il faut faire en sorte que KM et PM le soient aussi. Reste donc à trouver la position de M sur DC, et celle de P sur AD qui satisfassent à cette condition.

La comparaison des triangles semblables AKP, DMP donne AK : DM : : KM + MP : MP et AD : DP : : KM : MP. Désignant par a et b les longueurs constantes AD et AK par x et y les variables DP et DM, et substituant m et n aux lignes MP et MK, les deux proportions ci-dessus se transforment en

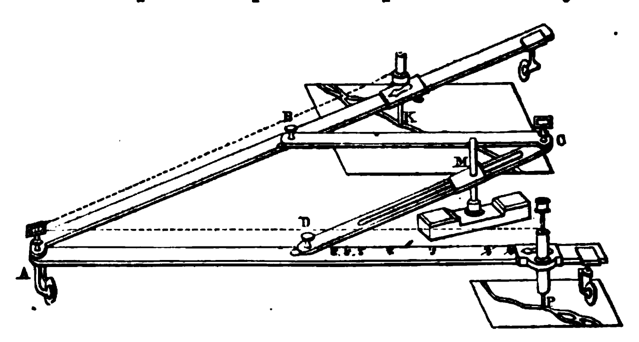
$$b : y :: m+n : m \quad \text{et} \quad a : x :: n : m.$$

d'où
$$y = b\,\frac{m}{m+n}, \quad x = a\,\frac{m}{n}.$$

En attribuant des valeurs diverses à m et à n, on a calculé celles de x et de y correspondant à différentes échelles, et on les a tracées sur les deux branches du pantographe. On peut s'assurer de l'exactitude des nombres trouvés pour x et y en pla-

çant une règle sur K et M ; puis en voyant si elle passe bien par le point P trouvé.

Nous ajouterons à la théorie du pantographe une courte description de sa construction. La figure précédente n'en donne que les lignes mathématiques : la figure ci-jointe présente les coulisses dans lesquelles on place le calquoir K et le crayon P, les



roulettes adaptées au moyen de pinces aux extrémités de branches extérieures de l'instrument, la tige à laquelle tient le crayon et qui est surmontée d'une cuvette dans laquelle on peut placer un poids plus ou moins considérable, en raison de la dureté du crayon et de l'intensité du trait que l'on veut obtenir. Le fil indiqué par une ligne ponctuée passant par l'agrafe du pivot A tient à la partie inférieure du porte-crayon et traverse le tube dans lequel il a la faculté de monter et de descendre. Le dessinateur en tient constamment l'autre extrémité, de manière à soulever le crayon et éviter qu'il trace une ligne sur le papier, lorsqu'il veut porter le calquoir sur un autre point de l'original.

L'axe vertical M traverse la branche CD et est vissé à sa partie inférieure dans une masse de plomb garnie en dessous de pointes d'acier très-courtes et très-aiguës qui assurent la position du pantographe. Des vis de pression placées sur les trois coulisses de K, M et P en arrêtent le mouvement lorsqu'elles sont une fois placées convenablement. Deux séries de divisions sont tracées sur les deux branches DC et DP. L'une donne des positions correspondantes de M et de P pour reproduire un dessin de manière que les côtés homologues soient dans un rapport donné : l'autre sert lorsque c'est le rapport des surfaces qui est déterminé.

Dans ce cas les graduations s'obtiennent facilement au moyen de celles qui, précédemment trouvées, se rapportent aux lignes. Il suffit d'observer que si les surfaces doivent être dans le rapport $p:q$, les lignes de ces surfaces seront dans l'autre rapport $\sqrt{p}:\sqrt{q}$; en sorte que dans la recherche de x et y on n'aura qu'à substituer $\sqrt{p}$ et $\sqrt{q}$ à m et n. Ce qui fournira

$$x = a\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}} \qquad y = b\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$$

Le micrographe ou prosopographe ne diffère du pantographe qu'en ce que les trois points K.M.P, sont constants, et que la modification des échelles provient du déplacement des deux sommets B et D du parallélogramme.

L'identité des théories de ces deux instruments nous engage à borner à ce peu de mots les développements relatifs au micrographe.

Ce serait une opération peu exacte que d'augmenter les dimensions de la copie, c'est-à-dire de passer d'une petite échelle à une grande. Si cependant on avait besoin de procéder de la sorte pour un motif quelconque, on conçoit que rien ne serait plus simple : il suffirait en effet de changer de places entre eux le calquoir et le crayon ; si les échelles devaient être dans le rapport de 1 à 3, on amènerait les index des coulisses M. et P aux divisions qui, sans cette mutation, auraient donné celui de 1 à $\frac{1}{3}$.

Les deux instruments et leurs mêmes divisions serviraient encore à reproduire les dessins, si le pivot était mis en P et le crayon en M : ici, les figures semblables des deux dessins seraient tournées dans le même sens par rapport au dessinateur, tandis que l'une d'elles est renversée dans l'état habituel de l'instrument. Il y aurait un inconvénient à agir ainsi : ce serait d'établir les deux feuilles trop près l'une de l'autre ; elles se superposeraient pour peu que leurs surfaces eussent trop d'étendue.

Si le pantographe était dépourvu de divisions, on pourrait encore opérer par tâtonnement. On disposerait le pivot, le calquoir et le crayon en ligne droite, et l'on ferait parcourir au calquoir, une ligne quelconque de la minute : on verrait si le trait produit par le crayon est à cette ligne dans le rapport voulu. S'il n'en était pas ainsi, on déplacerait le pivot dans le sens convenable, on modifierait la position du crayon, pour toujours satis-

faire à la condition que K, M et P soient en ligne droite, et l'on ferait un nouvel essai.

Si le dessin à réduire est d'une grandeur telle qu'on ne puisse se dispenser de déplacer le pantographe durant l'opération, il faut, avant ce dérangement, tracer des lignes de repère homologues. Soit AB, *ab* ces deux lignes : après avoir donné à l'instrument sa nouvelle position, on place le calquoir sur A et on amène *a* de la copie sous la pointe du crayon : par le mouvement général on fait dévier le crayon, pour permettre d'enfoncer une aiguille en *a* : on place le calquoir sur B ; puis on fait pivoter autour de *a* la feuille de la copie, jusqu'à ce que *b* arrive précisément sous le crayon. Dans cet état de choses on peut poursuivre le cours de la réduction.

On emploie le pantographe pour la gravure et pour la statuaire ; mais nous nous éloignerions trop de notre sujet en nous occupant de ces applications.

Réduction photographique. — La photographie, beaucoup plus utile ici que dans son application au levé du terrain, produit une copie ou une réduction de dessin avec une fidélité qui ne peut pas atteindre le plus habile dessinateur, et dans un temps relativement nul.

Il n'y a pas de renseignement à donner à cet égard sur la manière d'opérer. Nous dirons seulement que, si on se rappelle ce que nous avons dit au § 64 de la déformation angulaire des images, on reconnaîtra qu'il ne faut pas que le dessin sous-tende un angle trop grand, au centre optique de l'objectif. Il faut donc reculer l'appareil jusqu'à ce que cet angle soit assez petit, et employer, suivant qu'on désire une reproduction plus ou moins grande, un appareil de plus ou moins long foyer.

Nous ferons observer en terminant que malheureusement cette méthode de réduction offre quelquefois un inconvénient grave qui force à la rejeter. Dans un dessin réduit, tout ne doit pas subir en effet la même réduction ; les choses qui sont de convention, comme les largeurs de chemins, hauteurs d'écriture, etc., pourraient devenir illisibles si le rapport des échelles devenait trop petit.

LIVRE II

GÉODÉSIE.

CHAPITRE Ier

NOTIONS GÉNÉRALES

71. But de la géodésie. — La géodésie se propose deux buts qui se lient l'un à l'autre :

1° *Détermination de la figure de la terre.* — On entend par figure de la terre celle d'une surface constamment normale aux verticales de tous les lieux de la terre ; cette surface est celle d'un liquide en repos. Ce but n'est pas encore atteint, du moins, avec une grande rigueur, et si, comme cela est très-probable, la terre n'a pas une forme régulière, si la surface horizontale affecte de *légères ondulations* analogues à celles de la croûte solide, on n'arrivera jamais à connaître exactement cette forme.

Mais cette question devant être traitée dans un chapitre spécial, nous nous contenterons de dire qu'on est du moins arrivé à connaître la figure de la terre considérée dans son ensemble, indépendamment des petites irrégularités locales.

2° *Canevas géodésique.* — Les levés topographiques se font sur des plans tangents à la surface terrestre, et l'assimilation, erronée pourtant, des deux surfaces, ne produit pas d'erreur sensible. Mais les procédés topographiques employés ne comportent qu'un certain degré d'exactitude ; mais, en second lieu, les

levés qui en résultent, exécutés isolément, ne se raccordent pas complétement entre eux; si on les plaçait à côté les uns des autres, ils formeraient un seul plan qui serait le même que celui qui proviendrait d'opérations faites sur une terre plane; la terre n'étant pas plane, les déformations ne tarderaient pas à se faire sentir si on employait ainsi un grand nombre de levés isolés.

On obvie à ces deux inconvénients, lorsqu'il s'agit d'exécuter la carte d'un pays entier, au moyen d'un canevas géodésique qui sert : 1° à corriger les imperfections des canevas topographiques isolés ; 2° à les raccorder entre eux, en les déformant quelque peu dans leur ensemble, de manière que par suite d'un système de projection adopté, ils puissent être placés à côté les uns des autres sur un plan, en n'engendrant que des erreurs provenant de ce système lui-même, erreurs qui auront été estimées dans le choix qu'on aura fait.

Le canevas géodésique doit donc être fait avec la plus grande rigueur, de manière à déterminer très-exactement les positions des points principaux situés sur la terre; puis ces positions doivent être ensuite rapportées sur un plan, avec des déformations forcées, mais subissant certaines lois jugées les plus favorables.

Nous réserverons pour un chapitre spécial l'étude des systèmes de projection nécessairement enployés quand le canevas géodésique doit donner naissance à l'exécution graphique d'une carte, et nous considérerons d'abord ce canevas en lui-même, c'est-à-dire comme déterminant les positions réelles des points principaux, indépendamment de l'usage qu'on peut en faire ensuite.

Le procédé général consiste, comme pour le canevas topographique, à considérer les points principaux comme sommets de triangles qu'on projette sur la surface horizontale. La détermination de ces triangles se fait encore par l'observation des angles combinés avec la mesure d'un premier côté.

Puisque le canevas géodésique doit être plus exact que le canevas topographique, et qu'il emploie les mêmes procédés que celui-ci, il ne pourra arriver à être tel, qu'en perfectionnant ces procédés, et en faisant disparaître les causes d'erreur qui les affectent. Il devra donc :

1° Tenir compte de la figure de la terre;

2° Se servir d'instruments aussi exacts que possible, en leur

faisant donner, par des observations multipliées et soigneusement exécutées, toute l'exactitude qu'on peut en attendre ;

3° Substituer le calcul aux opérations graphiques toujours plus ou moins entachées d'erreur.

Marche générale des opérations. — On commence par observer des séries de grands triangles disposés à peu près suivant les directions de quelques méridiens et de quelques parallèles : cela forme les *réseaux primordiaux*, dont les éléments sont observés avec les plus grands soins.

Sur les côtés linéaires de ces réseaux on appuie d'autres grands triangles dits du *premier ordre*, qui couvrent tous les intervalles restés libres.

On établit ensuite les triangles du deuxième ordre dont les sommets plus rapprochés tendent à compléter le canevas géodésique.

Mais pour que celui-ci soit suffisant, il faut que les points qui le constituent soient excessivement rapprochés, et pour y arriver il faut modifier un peu le procédé employé jusqu'alors.

Toutes les opérations successives que nous avons mentionnées ont dû être faites avec une grande rigueur qui allait pourtant en diminuant (pour diminuer le travail), depuis les réseaux primordiaux jusqu'aux triangles du deuxième ordre. Pour la détermination des *points du troisième ordre* qui doivent compléter le réseau et qui sont beaucoup plus nombreux que les précédents, on abandonne encore un peu de cette rigueur d'observation qui fait perdre trop de temps. Une modification beaucoup plus profonde est en outre apportée dans la recherche de ces points.

Dans les ordres précédents on a dû stationner à tous les sommets de triangles, ce qui n'était pas indispensable pour la détermination de ceux-ci, parce qu'on obtenait ainsi une vérification de chacun d'eux pris isolément, vérification sur laquelle nous reviendrons plus tard. Les points du troisième ordre, moins importants, puisqu'ils ne serviront pas à en déterminer d'autres, ne sont obtenus que par la résolution de triangles dans lesquels on n'observe que les deux angles à la base ; on diminue ainsi beaucoup le travail et surtout on le rend possible, car on peut alors choisir une foule de points tels que moulins, maisons, arbres, clochers même dans lesquels la station n'aurait pas pu être établie.

La vérification isolée dont nous avons parlé ne pouvant pas alors être faite, on la remplace par une autre qui consiste à déterminer chaque point du troisième ordre par deux triangles ayant un côté commun.

72. **Vérifications.** — Les vérifications isolées dont nous venons de faire mention, peuvent être satisfaites chacune avec une approximation suffisante sans qu'on soit pourtant en droit d'en conclure que l'ensemble du canevas est exact. De proche en proche, les erreurs nécessairement tolérées, quelque petites qu'elles soient, peuvent finir par en engendrer d'autres qui soient considérables, sur les positions des points éloignés de l'origine.

On vérifie l'ensemble d'un travail de deux manières :

1° *Bases de vérification.* — Une première base a dû nécessairement être mesurée directement ; par son secours et celui des angles observés, on calcule tous les triangles d'une chaîne primordiale, et on arrive à la valeur d'un dernier côté. Si, en mesurant directement ce côté, on trouve une valeur identique à celle qui provient du calcul, on a du moins acquis la preuve qu'il n'y a pas une certitude d'erreur ; on n'est pas du reste en droit d'en conclure que tout le travail intermédiaire est exact, car les erreurs commises sur les côtés, si elles existent, ne pouvant être qu'en plus ou en moins, ont dû nécessairement se compenser de temps en temps, puisqu'elles n'auront pas pu provenir d'une cause commune identique dans ses effets, en un mot, d'une erreur de collimation.

La preuve acquise, sans être complétement concluante, a pourtant une certaine importance. Pour augmenter cette importance il est nécessaire de mesurer encore directement d'autres bases intermédiaires, et plus on en mesurera, plus il y aura de probabilités, en admettant la concordance des résultats obtenus, pour que l'ensemble du travail soit bon.

Nous verrons que la mesure des bases est très-longue à faire ; aussi est-on très-sobre de leur exécution ; d'où il suit que la vérification rigoureuse d'un canevas n'est jamais complétement obtenue. Mais cette certitude, qu'on n'obtient pas, n'existe du reste jamais dans aucune branche des connaissances humaines, et elle est même extrêmement incertaine dans presque tous les cas, si ce n'est dans ceux qui reposent uniquement sur certaines considérations abstraites.

2° *Latitudes et longitudes de vérification.* — Nous apprendrons plus tard à conclure les latitudes et longitudes des points du canevas, de la connaissance des triangles et de celle des éléments analogues d'un premier point. Pour vérifier ce canevas, on peut alors observer astronomiquement ces mêmes éléments. Si la concordance existe entre les deux résultats, on peut en tirer une conséquence favorable à l'exactitude ; mais si elle n'existe pas, y a-t-il lieu d'être certain que les opérations géodésiques ont été mauvaises ? Non.

En premier lieu les observations astronomiques faites dans des observatoires géodésiques nécessairement moins bien établis que les vrais observatoires, ne donnent ces latitudes qu'à 1″ centésimale près, ce qui produit en latitude un déplacement linéaire d'environ 10^m.

On trouve des discordances beaucoup plus considérables qui, ne provenant pas alors du fait de l'observation astronomique, prouvent que les résultats géodésiques sont erronés. Cela est vrai au résultat, mais on n'en doit rien conclure sur la qualité du canevas lui-même. En effet, le calcul des latitudes et longitudes est, il est vrai, basé sur ce canevas, mais il invoque en outre une certaine forme terrestre à laquelle il suppose appartenir les triangles ; et si cette forme hypothétique est inexacte, sa transformation seule en coordonnées géographiques est elle-même inexacte.

Ainsi donc, le canevas doit être contrôlé au moyen de bases de vérification, et quand celles-ci ont conduit à de bons résultats, on doit admettre qu'il est bon. Si les latitudes qu'il fournit sont défectueuses, la faute en vient très-probablement de l'ignorance dans laquelle on se trouve sur la véritable forme locale de la partie de la terre sur laquelle on a opéré.

Cela du reste est peu important pour l'exécution graphique d'une carte, ainsi que nous le ferons comprendre dans le § 111 du présent livre II.

73. **Principales opérations effectuées.** — Des grandes opérations géodésiques ont, jusqu'à ce jour, été effectuées en Angleterre, dans le Nord, l'Italie, en Autriche, en Prusse et dans la plupart des autres États de l'Allemagne, en Belgique, dans les Pays-Bas, en Russie, dans l'Inde anglaise et aux États-Unis.

En France les chaînes primordiales mesurées sont :

Les méridiennes de Dunkerque à Barcelone;
— de Bayeux;
— de Sedan aux Bouches-du-Rhône ;
— de Strasbourg.
Les parallèles de Paris prolongé jusqu'en Hongrie ;
— de Bourges;
— moyen prolongé jusqu'à Fiume;
— d'Amiens;
— de Rodez;
— des Pyrénées.

On a, en France, mesuré 7 bases et observé astronomiquement en 19 points des chaînes primordiales.

74. Opérations à effectuer sur le terrain. — Ces opérations consistent à :

1° Mesurer un côté de triangle auquel on donne le nom de base ;

2° Mesurer les angles;

3° Observer astronomiquement la latitude et la longitude d'un point au moins;

4° Observer l'azimut d'un côté, c'est-à-dire l'angle que fait ce côté avec le méridien de l'une de ses extrémités;

5° Enfin, faire le nivellement trigonométrique qui donnera les cotes des sommets de triangles.

Toutes ces opérations, à l'exception de la mesure des angles et du nivellement, peuvent à la rigueur n'être faites qu'une seule fois.

Les angles, au contraire, demandent un long travail qui, pour être mené à bonne fin, exige des renseignements de détail que nous allons passer en revue, en laissant pour les chapitres spéciaux qui les concernent les autres parties du travail qui doit être exécuté sur le terrain.

Reconnaissance. — La première chose à faire est de parcourir le terrain que l'on doit trianguler.

Le but de cette reconnaissance est de trouver un nombre de stations suffisant pour déterminer tous les points de troisième ordre, si l'on s'occupe de la triangulation de détail. Il faut faire en sorte que ce nombre soit le plus petit possible. Si, cependant, on opérait dans un pays de plaine et très-découvert, il ne faudrait pas abuser de cette faculté d'en voir toute l'étendue de quelques stations seulement, parce qu'alors le temps que l'on

aurait cru gagner d'un côté serait perdu, et peut-être plus encore, à chercher des points très-peu visibles, en raison de leur grand éloignement.

Il faut d'un autre côté se préoccuper du but qu'on veut atteindre ; le canevas géodésique doit servir de fondement au canevas topographique. Il est donc bon de rapprocher les points du premier de telle façon que ses petits côtés ne dépassent pas la limite de longueur dont l'emploi sera permis avec l'instrument qui sera employé à l'exécution du second.

Il est nécessaire d'avoir, pendant la reconnaissance, un instrument tel qu'un sextant, une boussole, un cercle à réflexion, etc., afin de pouvoir construire un premier canevas provisoire.

Ce canevas servira à reconnaître les points qui pourront être recoupés, de manière à ne pas faire d'observations inutiles ; il fera connaître le choix de ceux qui sembleront bien placés pour aider aux opérations de la topographie ; enfin il guidera dans le choix des triangles, qui ne doivent pas s'écarter trop d'une forme type plus favorable que les autres.

Forme préalable des triangles géodésiques. — Malgré tous les soins employés pour la mesure des angles, ceux-ci seront entachés d'erreurs inévitables. Ces erreurs n'auront pas toujours la même influence sur la longueur des côtés, quelle que soit la forme des triangles employés. Il est donc avantageux de se rapprocher de la forme qui, avec les mêmes erreurs angulaires, donnera le minimum d'erreur sur les côtés. Cherchons cette forme particulière.

Nous verrons plus tard qu'on substitue à la résolution du triangle sphérique dont on connaît un côté b et dont on a mesuré les trois angles, la résolution d'un triangle rectiligne ayant même longueur de côtés et dont les angles très-peu différents de ceux du triangle sphérique, sont des fonctions très-simples de ceux-ci.

Soient A,B,C les éléments du triangle plan substitué, tels qu'ils auraient été si l'on n'avait pas commis des erreurs d'observations.

Soient $A+\alpha$, $B+\beta$, $C+\gamma$, les mêmes éléments réellement employés ; les erreurs angulaires α,β,γ sont des fonctions des erreurs d'observations.

La résolution du triangle vrai b,A,B,C, conduirait à

$$a = \frac{b \sin. A}{\sin. B}$$

Celles du triangle faux donnera, en désignant par da l'erreur qui résultera sur le côté a,

$$a + da = \frac{b \sin. (A + \alpha)}{\sin. (B + \beta)}$$

De ces deux équations, on tire

$$da = b \left(\frac{\sin. (A + \alpha)}{\sin. (B + \beta)} - \frac{\sin. A}{\sin. B}\right)$$

$$= \frac{b}{\sin. B \sin. (B + \beta)} (\alpha \cos. A. \sin. B - \beta \sin. A \cos. B)$$

en observant que α et β sont toujours assez petits pour que, dans les développements en séries de leurs lignes trigonométriques, on puisse se borner à prendre les premiers termes seulement.

Les angles B et B $+ \beta$ différant très-peu, on peut confondre leurs sinus, et l'on aura

$$da = b \left(\frac{\alpha \cos. A}{\sin. B} - \frac{\beta \sin. A}{\sin. B} \cot. B\right)$$

La même hypothèse, qui revient à supposer β nul au dénominateur, ne peut pas être faite au numérateur, parce que le premier a une valeur finie que la supposition ne fait que modifier légèrement, tandis que le second excessivement petit se trouverait annulé,

mais $b = \frac{a \sin. B}{\sin. A}$; donc $da = \frac{a \sin. B}{\sin. A} \left(\alpha \frac{\cos. A}{\sin. B} - \beta \frac{\sin. A}{\sin. B} \cot. B\right)$

$$da = a (\alpha \cot. A - \beta \cot. B)$$

On aurait de même pour le troisième côté,

$$dc = c (\gamma \cot. C - \beta \cot. B)$$

La forme pour laquelle les erreurs da et dc seraient minima est évidemment celle qui rendrait les deux seconds membres nuls. Mais ces seconds membres sont fonction des erreurs angulaires α, β, γ, qui ne sont connues ni en grandeur ni en signes. Diverses hypothèses faites sur ces variables conduiraient à des formes de triangles favorables pour les cas examinés, mais défavorables pour les autres, et, comme on ne connaît aucune-

ment le cas dans lequel se trouvera le triangle employé, il nous semble inutile de rechercher ce qu'on devrait faire dans une circonstance qui sera toujours inconnue.

La seule relation $\alpha + \beta + \gamma = o$ (puisqu'il s'agit de triangles rectilignes A,B,C et $A + \alpha$, $B + \beta$, $C + \gamma$) ne précisant pas les valeurs relatives de ces variables, il nous semble rationnel de chercher à diminuer les erreurs linéaires da et dc, en diminuant les termes dont elles se composent, ce qui conduit aux conséquences suivantes :

A petit, A proche de 100^g, B proche de 100^g,
C *id.*, C *id.*, B *id.*

Mettant de côté celles de ces conditions qui sont contraires les unes aux autres, il ne reste que B proche de 100^g, qui joint à la similitude des rôles joués par A et C, conduit à cette conséquence, que la forme la plus avantageuse, généralement, à donner aux triangles rectilignes substitués aux triangles géodésiques est celle du triangle isocèle rectangle.

Dans la pratique, on se contente d'exclure les angles qui donneraient trop d'importance aux facteurs cot. A, cot. B, cot. C, c'est-à-dire à ceux qui seraient trop petits ou trop rapprochés de 200^g. On n'emploie pas d'angles plus petits que 20^g ou plus grands que 180^g.

Les valeurs de da et dc auraient encore pu être rendues très-petites, par la supposition de a et c petits eux-mêmes ; mais il n'y a pas lieu d'admettre cette supposition dans un cas général, car ces côtés sont toujours tels que $a + c > b$, et si l'un d'eux est petit, l'autre est grand.

La base dont on part, pour y attacher une chaîne de triangles, est toujours plus petite que la longueur moyenne qu'il convient d'adopter pour les côtés de triangles. Cela s'explique par la difficulté de trouver un terrain favorable d'une étendue suffisante, et aussi en raison du temps considérable et de la fatigue extrême que nécessite la mesure d'une base. Il faut donc faire croître successivement la longueur des côtés, et cela ne peut avoir lieu qu'autant que B est aigu. Si l'on employait une succession de triangles équilatéraux, les côtés resteraient toujours de même longueur que la base b. Si l'angle B était droit, a et c seraient plus petits que b. Les côtés qui s'appuieraient sur a et c seraient par le même motif, plus petits qu'eux, et ainsi de suite. On arriverait donc bientôt à des proportions inadmissibles.

En faisant la reconnaissance on s'aperçoit souvent de l'insuffi-

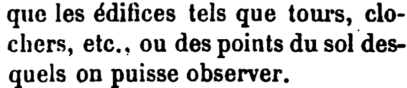
sance des stations faites dans les édifices. On obvie à cette insuffisance de la manière suivante.

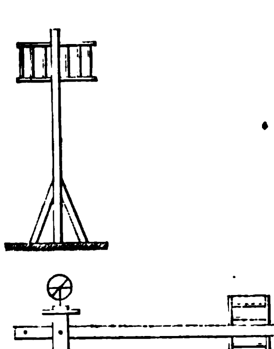
Signaux. — Pour la triangulation du premier et du second ordre, on fait construire des signaux aux endroits que l'on a adoptés comme points de station.

Les signaux du premier ordre forment observatoire, quand on ne peut observer du sol, et sont plus ou moins hauts, suivant les obstacles qui arrêtent la vue. Quoique la forme à leur donner ne soit pas absolue, il semble bon d'indiquer ici celle qui, paraissant la meilleure, a été adoptée pour les opérations de la carte de France.

Ils se composent d'un observatoire ou petite chambre soutenue en l'air par quatre arêtiers. Les faces sont percées de fenêtres qui se ferment à volonté au moyen de volets. Le toit a la forme d'une pyramide quadrangulaire, au sommet de laquelle s'élève un poinçon supportant une autre petite pyramide renversée, à claire-voie, pour donner moins de prise au vent. Au centre, sous le signal, on place une borne destinée à faire retrouver postérieurement l'emplacement où a été érigé ce signal. On a, en outre, la précaution de placer par-dessous du charbon, parce qu'il jouit de la propriété d'être incorruptible.

Dans la triangulation secondaire, on ne choisit pour stations que les édifices tels que tours, clochers, etc., ou des points du sol desquels on puisse observer.

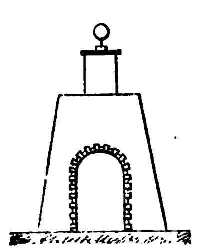




Dans ce cas, le signal consiste en un poteau planté en terre et surmonté de deux faces rectangulaires en bois, à claire-voie, et d'un mètre environ de côté. Quelquefois le poteau est composé de deux pièces qui forment charnière à peu de distance du sol. Quand le signal est debout, il est maintenu par deux boulons, et l'on en retire un lorsqu'on veut l'abaisser. Cette modification a pour but de pouvoir, lorsqu'on observe les angles, placer l'instrument au centre de la

station et éviter par là une réduction dont nous aurons à parler plus tard.

Quelquefois, dans le premier ordre surtout, la grande difficulté, voire même l'impossibilité de faire parvenir les pièces de bois, fait employer des signaux en maçonnerie ou construits en pierres sèches. Leur forme est ordinairement un cône tronqué surmonté d'un cylindre de plus petit diamètre. Ce dernier supporte l'instrument, et l'observateur se tient sur la portion de la base supérieure du cône qui déborde le cylindre.



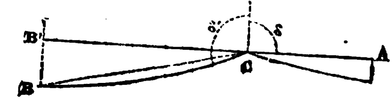
On emploie de préférence, lorsqu'il y a lieu, les monuments tels que tours, clochers, etc., tant à cause de leur solidité, que par raison d'économie. Les signaux permettent généralement de mieux prendre les éléments de réduction, et par conséquent les triangles ferment mieux ; mais ils sont généralement plus loin des habitations, et les transports deviennent plus longs et plus coûteux. Les flèches trop aiguës sont quelquefois de mauvais points de mire pour les distances zénithales, parce que leurs extrémités disparaissent d'autant plus que les côtés de triangles sont plus longs.

Les signaux doivent être peints en blanc ou en noir suivant qu'ils se projettent sur le terrain ou sur le ciel : ils sont plus constamment favorables dans ce dernier cas. On fait donc en sorte qu'il en soit ainsi ; cependant, comme ils ne peuvent pas toujours satisfaire à cette condition, il est bon de s'assurer de ce qui aura lieu lorsque le signal sera érigé, afin de le faire couvrir de la couleur convenable.

Soient donc A et B, deux points choisis comme sommets de triangles. On est en A, et sans retourner en B, on veut savoir sous quel aspect on verra le signal A de ce point. On prend la distance zénithale de B, et celle du point C de l'horizon, opposé à B et situé dans le plan vertical qui passe par A et B. Si leur somme est plus petite que 200^g, le point A se projettera en terre pour l'observateur placé en B : le contraire aura lieu si la somme est plus grande que 200^g. On peut calculer la hauteur qu'il faudrait donner au signal A par un procédé analogue à celui qui va être indiqué ci-après : cependant, dans le cas où les observations ne doivent pas être faites du sol, mais dans un observatoire placé en haut du signal, il faut s'assurer encore que cet accroissement de hauteur, en diminuant la difficulté pour

le point B, n'augmentera pas celles que l'on doit éprouver en A, qui, plus élevé, pourrait alors voir projetés en terre d'autres signaux qui, sans cette modification, se seraient détachés sur le ciel.

Quand on détermine l'emplacement des signaux, on est souvent embarrassé dans leur choix, parce que, du sol où l'on se trouve placé en faisant cette recherche, on n'aperçoit pas toujours les points qu'il serait important d'observer. Ainsi,



différentes circonstances peuvent faire présumer que le point B serait convenablement choisi si on s'y élevait à une certaine hauteur. Toute la question revient à connaître approximativement la hauteur B'B qu'il faudrait donner au signal pour que le rayon visuel, passant par-dessus un obstacle C, allât rencontrer un autre point signalé A. S'il y a dans les environs de B une maison ou un arbre, on y fait monter quelqu'un, et on reconnaît par là si l'élévation du signal B peut être tentée. Ce cas est rare, les signaux devant être isolés pour que la vue ne soit pas masquée. On peut arriver au même résultat de la manière suivante.

On se transporte à l'obstacle C qu'on trouve par tâtonnement, car il doit être dans l'alignement de A et de B, et on y observe les distances zénithales δ et δ' qui fournissent $BCB' = \delta' + \delta - 200^g$. Pour pouvoir résoudre le triangle BB'C dont le côté BB' est l'inconnue cherchée, il suffit de connaître encore deux autres de ses éléments. Une ancienne carte, quelque mauvaise qu'elle soit, ou une petite opération topographique très-légèrement exécutée, donneront une valeur approchée de BC; l'angle B' est à peu près égal à $200^g - \delta$. La résolution du triangle sera donc possible et donnera un renseignement quelque peu erroné, il est vrai, mais suffisant pour faire savoir s'il y a lieu de tenter l'érection du signal B.

Opérations de cabinet. — Nous ne pouvons donner ici que la nomenclature de ces différentes opérations qui seront développées dans le cours de ce livre. Elles se composent de :

1° Réduction de la base provenant de la température, de l'inclinaison à l'horizon et de l'élévation au-dessus de la surface de projection qui est celle des eaux moyennes de la mer;

2° Calcul des triangles provisoires ou construction d'un canevas provisoire ;

3° Réduction des angles à l'horizon et au centre de la station, et des distances zénithales aux sommets des signaux, correction de phase rarement exécutée ;

4° Calcul des triangles définitifs ;

5° Transformation du canevas géodésique en coordonnées géographiques ;

6° Calcul des altitudes.

CHAPITRE II

MESURE DES BASES

75. Choix de la base. — La mesure de la base sur laquelle repose tout le canevas géodésique, doit être faite en s'entourant de toutes les garanties d'exactitude. Les unes consisteront dans les soins minutieux qu'on apportera dans l'opération, les autres dans des réductions qui seront une conséquence de la méthode qui aura été employée. Nous n'aurons pas à nous occuper des premières qui n'exigent que de l'adresse et de la conscience. Quant aux secondes, elles seront examinées après que nous en aurons fait connaître la nature en exposant la marche suivie.

La base devra être choisie sur un terrain uni et ne présentant aucun obstacle, ce qui limite beaucoup le nombre des emplacements qu'elle pourra occuper. Il sera bon que de ces extrémités on aperçoive quelques points remarquables qui serviront à lui rattacher le canevas géodésique ; cette condition n'a pas l'importance de la première, et si elle n'est pas remplie naturellement, on y obviera par la construction de quelques signaux.

Le temps prolongé et les minuties d'observation qu'exigent la mesure de la base, tendent à la faire choisir de petite dimension ; la double opération qui consiste à mesurer de nouveau, en sens inverse, pour contrôler le premier résultat, agit de la même manière.

Mais, d'un autre côté, il est avantageux pour l'exactitude, de la choisir ayant une grande étendue, car ce sont ici les erreurs relatives qu'il importe de considérer et non pas les erreurs absolues ; dans le calcul des triangles on verra toujours apparaître la formule $a = \frac{b \sin. A}{\sin. B}$ qui, calculée avec une base fausse $b + db$, fournira un second côté erroné $a + da = (b + db) \frac{\sin. A}{\sin. B}$.

L'erreur commise sur ce côté sera donc $da = db \frac{\sin. A}{\sin. B} = a.\frac{db}{b}$; en sorte que toutes circonstances égales d'ailleurs, cette erreur sera proportionnelle à $\frac{db}{b}$ ou a l'*erreur relative* commise dans la mesure de la base. De proche en proche, la même influence se transmettra successivement, puisque les côtés calculés deviennent, à leur tour, les bases de nouveaux triangles.

L'erreur relative sera plus petite dans la mesure d'une base $2.b$ que dans celle de b, car dans l'un des cas elle pourra être $\frac{db \pm db}{2b}$ et dans l'autre $\frac{db}{b}$, en désignant par db le maximum d'erreur possible sur l'élément isolé b. La première n'atteignant la valeur de la dernière que dans une circonstance particulière et restant plus faible dans les autres cas, il y a en effet lieu d'en conclure généralement que $\frac{d.nb}{nb} < \frac{db}{b}$, et que par suite les longues bases sont préférables aux petites.

Les bases mesurées jusqu'à ce jour ont été comprises entre 8000^m et 20000^m.

Pour faire voir avec quel degré de précision on mesure les bases et l'on observe les éléments des triangles, nous allons citer ici quelques résultats des opérations de la nouvelle carte de France.

En 1804, on a mesuré la base d'Ensisheim, près Colmar, avec trois des quatre règles de platine qui avaient été construites pour les opérations de la mesure de la méridienne, et dont la quatrième depuis lors reste constamment déposée au bureau des longitudes. On la trouva égale à 19044^m, 39. Elle devait servir de départ pour la carte de la Suisse En partant de cette base, on est parvenu, par une suite de triangles,

Au côté Strasbourg. — Signal du Donon. .	=	43931^m,62
Le même côté, en partant de la base de Melun a été trouvé.	=	43930^m,91
Différence.	=	0^m,71

Celle de *Plouescat*, sur les bords de la mer, non loin du cap Finistère, mesurée avec les mêmes règles, est de 10526^m,91, et calculée par une chaîne de 33 triangles qui la rattachent à la base de Melun, elle a été trouvée identiquement la même.

La base de *Gourbera* près Dax (Landes), mesurée avec les règles de platine, est.	12220^m,031
Calculée au moyen des triangles qui la lient à celle de Perpignan, on a trouvé.	12220^m,769
Différence.	0^m,738

On a reconnu, dans cette dernière opération, que l'Océan et la Méditerranée sont de niveau.

Tracé de la base. — On commence par signaler les extrémités de la base choisie au moyen de constructions portant nettement indiqué le point précis où commence la base sur le sol, point déterminé par le secours d'un fil à plomb passant par le sommet du signal.

On jalonne ensuite cette ligne au moyen d'une lunette décrivant un plan vertical, placée à l'une des extrémités de la base. Quelquefois il est nécessaire d'établir une station intermédiaire.

76. **Instruments employés.** — Les unités de mesure qui, par des additions successives, sont destinées à donner la longueur de la base, ont beaucoup varié avec les observateurs. Ce sont 1° des règles graduées en métal; 2° des règles de bois, huilé et verni pour éviter les effets hygrométriques; 3° des tubes en verre qui, comme le bois, sont peu dilatables; 4° enfin des chaînes tendues.

Les détails de l'opération peuvent beaucoup varier; nous n'indiquerons qu'un petit nombre de procédés.

Procédé primitif.— Après avoir jalonné la base, on place, à la suite les unes des autres et dans l'alignement, des règles de métal de 4^m environ, qui, pour éviter la flexion, reposent sur des

madriers qui sont eux-mêmes supportés par des chevalets à large base.

Pour éviter les chocs et par suite les dérangements, on ne place pas les règles bout à bout; mais, laissant un petit intervalle vide, on le mesure lui-même soit avec une languette graduée qui, partant de l'extrémité d'une des règles, vient s'appuyer légèrement contre la précédente, soit avec des coins de verre également gradués.

Si les longueurs des règles sont connues ainsi que la valeur des graduations des languettes ou des coins, il n'y a qu'à faire la somme des différents éléments pour avoir la longueur totale.

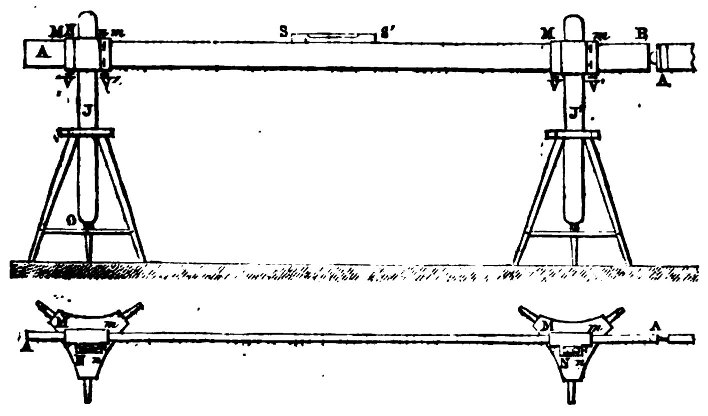
A la fin de chaque série d'opérations, on projette au moyen d'un fil à plomb la dernière extrémité sur une plaque de plomb coulé sur un corps de bois ou de pierre enfoncé dans le sol.

Mais la longueur d'un corps dépendant de sa température, il est nécessaire de connaître celle-ci, dans chaque circonstance. On adapte alors un thermomètre à chaque règle. On peut également employer une espèce de pyromètre, en adjoignant a chaque règle une seconde bande faite d'un métal différent et soudé à elle par une de ses extrémités. Les variations de température seront indiquées, par suite des effets divers produits par la chaleur sur les deux métaux différents, par la marche relative de l'extrémité de la seconde règle. Chacun des procédés a, comme toujours, ses avantages et ses inconvénients ; le thermomètre accuse les variations de température par une marche plus accentuée ; le pyromètre indique mieux la température propre des règles, tandis que les indications du thermomètre ne font en réalité connaître que sa température propre.

Les bases devant être réduites à l'horizon, il faut connaître l'inclinaison de chacun des éléments. On arrive à ce résultat par l'emploi d'un niveau de maçon gradué ou par celui d'un niveau à bulle également gradué.

Appareil de l'École d'état-major. — Nous renvoyons ceux de nos lecteurs qui veulent connaître, dans leurs plus grands détails, les opérations minutieuses et les instruments de précision qu'ont employés Delambre et Méchain, lors de la mesure d'un arc de méridien, à la description qu'en a donnée Puissant dans son *Traité de géodésie* : il faudrait la copier textuellement ou la rendre incomplète en l'abrégeant. Nous nous bornerons donc à dire quelques mots de l'appareil de règles que possède

l'École d'application d'état-major, et qui présente une exactitude suffisante pour l'exécution des opérations relatives à la carte d'un pays occupé ou conquis.



Cet appareil est composé de deux règles de 4^m chacune. Elles sont en sapin imprégné d'huile bouillante, puis de vernis. Elles portent, à leurs extrémités, des talons en cuivre, et à l'une d'elles une languette A, qui a la faculté de glisser dans une rainure à queue d'aronde, pratiquée dans l'épaisseur de la règle, et qui se meut à l'aide d'un pignon engrenant dans une crémaillère intérieure. Cette languette est divisée en millimètres. On y a même adapté un vernier, afin de pouvoir opérer avec plus de précision. Le talon en B est terminé par une surface arrondie à laquelle vient s'appuyer tangentiellement la languette de la règle qui suit. La longueur de 4^m est comprise entre les points A et B : ainsi les languettes se comptent en plus. Chaque règle est soutenue par deux jambes ou montants J et J' qui lui sont perpendiculaires ; chacune d'elles pénètre dans une ouverture rectangulaire pratiquée dans la tablette supérieure d'un trépied. Cette ouverture est plus grande que n'est large le support; mais celui-ci, lorsqu'il en est temps, est maintenu par deux vis butantes dont les écrous sont noyés dans la tablette.

Vers la partie inférieure du trépied, est placée une autre planche qui relie les trois jambes, et sur laquelle repose et pivote au besoin l'extrémité O du support J. Enfin, les jambes du trépied sont terminées par des vis dont les larges têtes, tournées en contre-bas, appuient sur le sol. Ces vis sont destinées à remédier aux inégalités du terrain.

La règle et ses deux jambes sont unies par des doubles manchons Mm, $M'm'$, dans lesquels elles peuvent glisser indépendamment l'une de l'autre. Des vis VV, TT', pressant sur des ressorts, fixent le tout ensemble, lorsque l'appareil est convenablement placé. Chaque règle est établie horizontalement au moyen du niveau SS' qui lui est adapté. On dispose enfin les règles dans une direction déterminée à l'aide d'une alidade et de jalons ; puis on tend une corde d'un jalon à l'autre, pour disposer les jambes J, J' dans un même plan vertical. C'est alors que les deux vis butantes sont approchées peu à peu du montant J, qui était resté libre jusqu'à ce moment pour ne pas contrarier les mouvements imprimés à la règle, tandis qu'on la rendait horizontale. Toutes les vis étant bien serrées, l'appareil est stable. On fait sortir la languette de la règle précédente pour apprécier le petit intervalle que l'on avait conservé à dessein, afin d'éviter toute chance de recul.

Appareil de M. Porro. — Cet appareil a le mérite de n'exiger qu'un alignement approximatif des différentes règles, alignement qui, pour être parfait, ainsi que l'exigent les procédés ordinaires, demande beaucoup de temps et de soin.

Les règles employées par M. Porro sont en bois huilé, mais il serait préférable qu'elles fussent formées de métal ou de verre, car il n'est pas tout à fait exact de supposer que le bois huilé est complétement indifférent à l'action de la chaleur et de l'hygrométrie. Elles sont renfermées dans des tubes en cuivre qui ont reçu une contre-courbure calculée de manière qu'ils soient rectilignes malgré leur poids, lorsque leurs deux extrémités posent sur deux supports. Ces règles, d'une longueur de 3ᵐ environ, se terminent par deux appendices divisés en dixièmes de millimètre.

Le procédé consiste à mesurer les éléments d'une ligne quelque peu brisée, mais ne s'éloignant pourtant pas beaucoup de la direction de la base, et à projeter, par des perpendiculaires, ces éléments sur celle-ci.

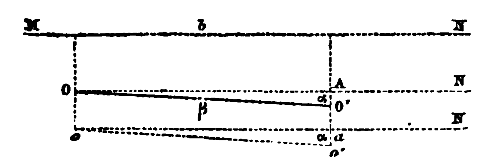
Pour connaître ces éléments on se sert de microscopes dont les axes optiques sont verticaux. On place une des règles de manière que l'axe optique d'un premier microscope, qui a limité la partie de la base déjà mesurée, se projette sur une des languettes, et, dirigeant la règle à peu près dans la direction de la base, on fait mettre à la distance approximative convenable un

second microscope se projetant également sur la seconde languette, ce à quoi on arrive facilement en imprimant à la règle, un léger dérangement latéral.

L'intervalle compris entre les deux axes optiques est cet élément de la base qu'on devra ensuite projeter sur celle-ci. Si C désigne la longueur regardée comme constante, de la règle, ou modifiée comme il sera dit plus tard, relativement à la température, l'élément obtenu sera $\beta = C + a + b$, si a et b désignent les lectures faites sur les languettes.

Toute la question se trouve ensuite ramenée à la recherche des projections des éléments mesurés.

Supposons que MN représentant la base, O et O' soient les deux axes des microscopes, β sera l'élément mesuré et b l'élément correspondant de la base qu'il s'agit de connaître. Pour passer de l'un à l'autre il suffirait de pouvoir mesurer $O'A = \alpha$ qui répond au parallélisme de OA et MN. Supposons connue cette quantité, que nous indiquerons ensuite le moyen d'obtenir.



La résolution du triangle rectangle OAO' fournira immédiatement $\alpha^2 = \beta^2 - b^2$ ou $\beta - b = \frac{\alpha^2}{b+\beta} = \frac{\alpha^2}{2\beta}$ approximativement, puisque, d'après la nature de la question, b et β diffèrent peu l'un de l'autre.

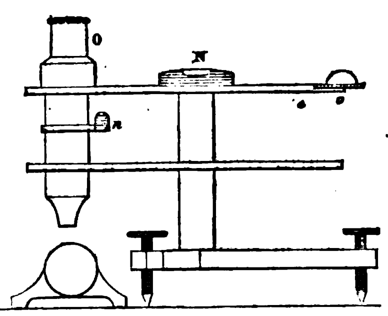
Nous indiquerons plus tard pourquoi, sous plusieurs rapports, il y a avantage, en géodésie, à calculer des corrections petites au lieu de calculer les quantités elles-mêmes.

Mais il reste à trouver la valeur de α élément essentiel du calcul.

Pour arriver à ce résultat les microscopes sont composés de la manière suivante :

Sur le centre d'une pièce à trois branches et à trois vis calantes, s'élève une colonne métallique creuse que des branches horizontales et parallèles traversent à deux hauteurs différentes et que termine un niveau à bulle N. Ces branches portent en saillie, d'un côté, le microscope dont elles maintiennent l'axe dans une position verticale. Un pignon et une crémaillère permettent de faire monter ou descendre le microscope pour le mettre à la distance la plus favorable de l'objet qu'on veut observer. De l'autre côté

de la colonne, les branches convenablement entaillées maintiennent dans la position verticale un demi-objectif simple *o*, de 3m de foyer et de 0m,06 d'ouverture, placé de manière que son plan optique prolongé passe par l'axe du microscope, et que son centre optique en soit distant de 0m,125.



Une échelle en ivoire, divisée en millimètres, occupe un diamètre horizontal de l'objectif.

Le niveau N sert à mettre vertical l'axe de rotation; un second niveau *n* sert à atteindre le même but pour les génératrices de l'enveloppe cylindrique du microscope, autour duquel il peut tourner. Ces deux résultats sont obtenus par des retournements et au moyen des trois vis calantes, comme dans l'emploi des instruments répétiteurs. Une verticalité absolue n'est pas, du reste, d'une nécessité rigoureuse.

Revenons à la recherche de l'élément de correction α.

On fait placer sur la base ou dans son alignement prolongé un jalon ou un fil à plomb. Par suite du grand éloignement de ce jalon et du rapprochement de la base, les lignes MN, OO', *oo'* peuvent être regardées comme parallèles.

Supposons qu'on puisse mettre les branches des microscopes exactement perpendiculaires à la base MN, un demi-objectif directeur viendra en *o* et l'origine des graduations de la petite règle en ivoire sera placée en *o'* de telle manière que *oo'* sera parallèle à OO' et que le triangle *oo'a'* étant égal à OO'A, la recherche de O'A pourra être remplacée par celle de *o'a*. Cette transposition est une nécessité de la construction qui ne permet pas de placer le demi-objectif *o* au-dessus de l'oculaire du microscope.

Si on plaçait l'œil au point *o* et si on regardait le jalon N, le rayon visuel couperait la règle divisée en *a* donnant la lecture cherchée α; mais si la position de *o* n'a pas été précisée rigoureusement, tout déplacement latéral de l'œil produira un déplacement identique sur A; mais en se servant du demi-objectif directeur *o*, dont la distance focale est approximativement égale à *oa*, les rayons émergents de cet objectif seront sensiblement

parallèles entre eux, en sorte que la position de l'œil deviendra indifférente pourvu qu'il reste dans le faisceau des rayons réfractés ; le point a de rencontre de la réglette et de la parallèle à la base qui passe par le point o centre optique de l'objectif, sera constamment vu le même.

Si on se servait d'un objectif entier, les rayons venus de N qu'on doit apercevoir pour connaître a donneraient lieu à une image réelle ne produisant dans l'œil qu'une sensation confuse. C'est pour obvier à cet inconvénient qu'on n'emploie qu'un *demi-objectif* qui agit sur les rayons venus de a, tandis que ceux de N sont reçus sans modifications optiques, par la pupille qu'on a soin de mettre à hauteur du diamètre qui limite le verre.

Les deux faisceaux de rayons alors agissant sur l'œil sont dans les circonstances ordinaires de la nature, et si on veut viser avec une plus grande précision, on peut employer à la main une lunette grossissante quelconque.

Mais nous avons supposé que les deux appendices Oo, O$'o'$ étaient perpendiculaires à la base ; s'il y avait une nécessité absolue à ce qu'il en fût ainsi, il vaudrait mieux employer le procédé habituel d'un alignement rigoureux. Heureusement de légères déviations ne produisent que des erreurs insignifiantes.

Rappelons-nous que

$$b = \beta + \frac{\alpha^2}{2.\beta}$$

et que, par suite, une erreur commise dans l'appréciation de α n'en entraînera une que sur le petit terme correctif $\frac{\alpha^2}{2.\beta}$.

Si on suppose en effet qu'un des appendices prend une direction O$'o''$ un peu différente de O$'o'$ perpendiculaire à la base, on voit à la seule inspection de la figure que α et α' différeront très-peu l'un de l'autre, pourvu qu'on ait soin de ne pas trop écarter OO$'$ de la direction ON de la base, que l'angle en O$'$ soit petit, et l'appendice lui-même petit, conditions qu'il est facile de remplir approximativement.



77. **Corrections de la base.** — La mesure directement obtenue doit généralement subir quatre corrections :

1° Correction due aux variations de la température qui donne des valeurs différentes à l'unité linéaire employée ;

2° Réduction de la base à l'horizon de l'un de ses termes, c'est-à-dire à la longueur de l'arc de grand cercle horizontal qui passe par une de ses extrémités ;

3° Réduction de celui-ci au niveau de la mer, la projection devant être faite sur la surface des eaux moyennes de celle-ci ;

4° Réduction à un arc de grand cercle, quand on a été obligé, par la nature du pays, de mesurer une base brisée.

78. *Correction due à la température.* — Deux cas peuvent se présenter.

Dilatation connue. — Supposons d'abord qu'on connaisse le coefficient de dilatation de la matière employée à la confection des règles, comme cela se présente toutes les fois que celles-ci sont métalliques.

Soit f la désignation générale d'une des règles qui, aux températures t, t', t''... aura des longueurs f_t, $f_{t'}$, $f_{t''}$...

En portant cette règle (ou plusieurs identiques) à la suite d'elle-même un nombre n de fois, on aura parcouru la base entière qui sera alors

$$B = f_t + f_{t'} + f_{t''} + \cdots$$

et pour que le problème soit résolu, il suffira de connaître les différents termes qui entrent dans le second membre.

La règle de fer aura été étalonnée, c'est-à-dire comparée ou mieux égalisée à une règle de platine qui représente le *mètre* à la température 0°. En sorte que si cette opération s'est effectuée à 10° de température du thermomètre centigrade, on aura, en désignant par p la longueur générale de la règle de platine :

$$f_{10} = p_{10}$$

Nous avons supposé connus les coefficients de dilatation du fer et du platine qui sont

$$d = 0{,}0000122 \text{ et } d' = 0{,}000008565$$

En les utilisant, on peut conclure

$$f_0 (1 + 10\,d) = p_0 (1 + 10\,d') = 1 + 10\,d'$$

Cette équation fera connaître $f_0 = \dfrac{1 + 10\,d'}{1 + 10\,d}$ exprimé en mètres.

Mais la base qui renferme autant d'inconnues que de termes peut s'écrire sous la forme

$$B = f_o(1 + td) + f_o(1 + t'd) + f_o(1 + t''d) + \text{etc.}$$

$$= n.\, f_o + f_o d\,(t + t' + t'' + \ldots)$$

Équation qu'on peut mettre sous la forme suivante, si on ne veut pas calculer séparément $f_o = \dfrac{1 + 10\,d'}{1 + 10\,d}$.

$$B = \frac{1 + 10\,d'}{1 + 10\,d}\Big(n + d\,(t + t' + t''\ldots)\Big)$$

$$= (1 + 10\,d')\,(1 - 10\,d)\,\Big\{n + d\,(t + t' + t'\ldots)\Big\}$$

$$= \Big\{1 + 10\,(d' - d)\Big\}\Big\{n + d\,(t + t' + t''\ldots)\Big\}$$

$$= n + 10.n\,(d' - d) + d\,(t + t' + t''\ldots)$$

Par suite de la petitesse des coefficients de dilatation on a pu, sans commettre d'erreur appréciable, négliger leurs secondes puissances.

Les résultats donnés par cette formule sont exprimés en mètres par suite de l'hypothèse $p_o = 1^m$; les températures t, t'... sont exprimées en degrés centigrades auxquels répondent les valeurs de d et d'.

Dilatation inconnue. — Supposons la base B mesurée avec des règles en bois. On donne le nom de portée à l'ensemble des règles que l'on emploie, qui sont ordinairement au nombre de trois ou quatre, et on n'observe la température que pour chaque portée.

On aura ainsi, p désignant une de celles-ci,

$$B = p_t + p_{t'} + p_{t''} + p_{t'''} + \text{etc.}$$

Si nous désignons par D, la variation de longueur de la portée entière pour un grade, nous diminuerons le nombre des inconnues du second membre en remarquant que

$$p_t = p_o + Dt, \quad p_{t'} = p_o + Dt'\ldots$$

en sorte qu'en désignant par n le nombre entier ou fractionnaire de portées employées, on aura

$$B = np_o + D\,(t + t' + t'' + \ldots)$$

La portée p a dû être étalonnée à une certaine température. Supposons que cette température soit zéro, p_0 sera connu et la valeur de la base ne renfermera plus qu'une seule inconnue D qu'il s'agit de trouver.

Pour cela on plante deux bornes en terre, à une distance un peu plus grande qu'une portée ; cette distance comptée de centre en centre est invariable. On la mesure à une première température θ; supposons que cette mesure soit entièrement faite avec les règles en bois, elle sera exprimée par $1+\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\alpha}$ étant une fraction estimée de la longueur totale actuelle. Cette partie supplémentaire pourrait être obtenue avec une règle en fer et on la traiterait alors comme nous l'avons indiqué plus haut. Dans le cas que nous avons admis, l'écartement constant des deux bornes sera

$$E = p_0\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) = p_0 (1+D\theta)\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$$

équation qui renferme deux inconnues E et D.

Si on lui en adjoint une seconde

$$E = p_0 (1+D\theta')\left(1+\frac{1}{\alpha'}\right)$$

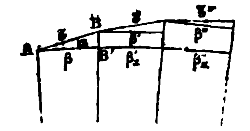
résultant d'une nouvelle mesure de E faite à une température θ', aussi différente que possible de θ, on aura un système de deux équations à deux inconnues qui permettra de connaître celles-ci.

On pourrait croire qu'une troisième mesure fournissant une nouvelle équation permettrait de se donner une inconnue de plus, p_0. Il n'en est pas ainsi : d'autres équations ne feraient que contrôler les premières, ce qui serait utile du reste. N'est-il pas évident, en effet, que p_0 ne peut pas être ainsi déterminé ? Pour que les mesures soient exprimées en mètres n'est-il pas nécessaire que l'existence du mètre ait été invoquée une fois dans l'étalonnage ?

Ajoutons en terminant que la dilatation du bois étant peu sensible dans le sens de la longueur, surtout lorsque, par des préparations préalables, on a cherché à le soustraire aux influences hygrométriques, on se dispense le plus souvent de tenir compte de l'effet de la température.

79. *Réduction de la base à l'un de ses termes, ou réduction à l'horizon.* — Les opérations géodésiques qui ont pour but de pro-

jeter les sommets des triangles sur la surface des eaux moyennes



de la mer, exigent que la base qui jusqu'à présent se trouve seulement dans un plan vertical, soit encore projetée sur l'arc de cercle correspondant de la sphère des eaux moyennes. Réduisons d'abord cette base à sa projection sur un grand cercle passant par l'une de ses extrémités. C'est dans ce but qu'on a mesuré l'inclinaison à l'horizon de *chacun* de ses éléments. Soit AB $= b$, une portée. Si on regarde les deux verticales qui passent par ses extrémités comme parallèles, la tangente pourra être prise comme égale à l'arc de cercle AB' $= \beta$ qui est la vraie projection cherchée, et sera représentée par $\beta = b$ cos. α. Rigoureusement il n'en est pas ainsi, mais pour un élément de la base l'erreur commise en prenant $\beta = b$ cos. α, quoique se répétant un grand nombre de fois, est complétement négligeable. Il n'en serait plus ainsi si l'on appliquait ce raisonnement à la longueur totale de la base ou à une fraction considérable de celle-ci.

Désignons par b, b' b''... les éléments mesurés sous des inclinaisons, α, α' α''..., par β, β' β''.., les projections sur les arcs des grands cercles passant par chaque extrémité de ces éléments, et par B et B' la base mesurée et celle qui résulte de la réduction. On aura évidemment

$$B - B' = b\,(1 - \cos.\alpha) + b'\,(1 - \cos.\alpha') + b''\,(1 - \cos.\alpha'')\ldots\ldots\ldots$$

$$= 2\,b\,\overline{\sin.}^2\,\tfrac{1}{2}\alpha + 2\,b'\,\overline{\sin.}^2\,\tfrac{1}{2}\alpha' + 2\,b''\,\overline{\sin.}^2\,\tfrac{1}{2}\alpha''\ldots\ldots\ldots$$

La correction ainsi obtenue conduira à la connaissance de B'. Observons qu'on n'obtiendra ainsi que la somme des arcs de cercle β, β', β'... de la figure, tandis qu'on aurait dû avoir $\beta + \beta_1' + \beta_1'' + \ldots$ des arcs appartenant à un même cercle. Mais si l'on remarque que l'on a toujours soin de prendre les éléments de la base très-peu inclinés sur leurs divers horizons, on en conclura qu'on peut, sans erreur sensible, regarder la base $\beta + \beta' + \beta''\ldots$ calculée, comme se confondant avec $\beta + \beta'_1 + \beta_1'' + \ldots$ appartenant à un cercle qui passe par une de ces extrémités, ou mieux à un cercle intermédiaire. Une vérification directe faite par le calcul prouve que l'erreur commise, dans les circonstances de longueur et d'inclinaison des bases mesurées jusqu'ici, est au-dessous des erreurs d'observation inévitables.

Il est important de bien faire sentir ici le double but pour

lequel on cherche la différence entre la ligne mesurée et sa projection, au lieu de cette projection elle-même, parce que plusieurs fois, pour les mêmes motifs, nous opérerons plus tard de semblables transformations. Dans le choix du terrain, on s'est arrêté à un qui fût, sinon entièrement horizontal, du moins fort peu incliné : ainsi α est toujours un angle très-petit. Or, quand les angles approchent de zéro, les cosinus varient très-lentement, et leurs valeurs sont représentées dans les tables par des logarithmes qui ne diffèrent pas ou presque pas entre eux dans les sept premières décimales.

La substitution des sinus est alors très-favorable, puisque, dans les mêmes circonstances, ils varient fort rapidement, et permettent ainsi de tenir compte, avec beaucoup de précision, de la valeur de α.

Le second avantage est, qu'en calculant par logarithmes $2b \sin.^2 \frac{1}{2} \alpha$, qui est l'expression de la différence, on trouve correspondant au logarithme de ce produit, un nombre qui contient la même quantité de chiffres, quelle que soit la caractéristique : plus celle-ci est petite, plus le résultat est donné avec précision, puisque le nombre de chiffres décimaux qu'il contient est d'autant plus grand. Prenons un exemple numérique pour mieux faire comprendre ceci :

Au logarithme 46641853 correspond le nombre 29254 : si la caractéristique est 4, le nombre ne contiendra pas de décimales, et on pourra dire qu'on le connaît à moins d'une unité ; tandis que, si la caractéristique est zéro, le nombre correspondant ne contiendra qu'un chiffre entier, tous les autres exprimeront une fraction décimale : il sera 2,9254, et sera exact à un dix-millième près.

Nous devons mentionner un autre avantage résultant de la recherche de la correction qu'il faut faire subir à un premier résultat pour en obtenir un second, au lieu de la recherche directe de celui-ci, quoique cet avantage n'apparaisse pas dans le cas actuel.

Cette correction est généralement très-petite ; on pourra alors se contenter de la calculer par approximation, en ne commettant sur le résultat final qu'une erreur d'autant moindre que la correction elle-même sera petite. On sera donc en droit d'apporter aux formules employées des simplifications qu'on n'aurait pas pu appliquer à celles des formules qui auraient donné la quantité cherchée elle-même et qui souvent ne peuvent pas être obte-

nues d'une manière rigoureuse. Ainsi, s'il s'agit de calculer une longueur de 10000^m au moyen d'une correction de 10^m, on pourra, dans la recherche de cette dernière, négliger un $\frac{1}{1000}$, c'est-à-dire, 0^m,01, tandis que dans le calcul direct de la distance 10000^m il n'aurait pas été permis de négliger le millième, qui aurait été de 10^m.

80. *Réduction de la base au niveau de la mer.* — En considérant les deux arcs de cercle situés, l'un B, obtenu jusqu'à présent, sur l'horizon d'un des termes de la base, l'autre b sur la surface des eaux de la mer, et sous-tendant le même angle au centre de la terre, ce qui doit être pour que b soit un côté géodésique, on a la proportion

$$B : b :: R + h : R$$

dans laquelle R désigne le rayon terrestre relatif à la surface moyenne de la mer, et h la hauteur de la base mesurée.

On préfère encore ici chercher la différence $B - b$, et l'on a

$$B - b = B - \frac{BR}{R + h} = \frac{Bh}{R + h}$$

On peut encore, si l'on veut, réduire cette expression en série : pour cela on divise le numérateur et le dénominateur par R, puis on trouve successivement

$$B - b = \frac{B\frac{h}{R}}{1 + \frac{h}{R}} = B\frac{h}{R}\left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-1} = B\frac{h}{R}\left(1 - \frac{h}{R} + \frac{h^2}{R^2} - \frac{h^3}{R^3} + \text{etc.}\right)$$

$$= B\left(\frac{h}{R} - \frac{h^2}{R^2} + \frac{h^3}{R^3} - \frac{h^4}{R^4} + \text{etc.}\right)$$

On tient compte ici de la hauteur H parce qu'elle peut être considérable, et on a négligé l'élément analogue dans le paragraphe précédent, parce qu'il représentait les hauteurs relatives des différentes parties de la base, hauteurs toujours forcément très-petites.

81. *Réduction de la base à un arc de grand cercle.* — Une circonstance quelconque peut quelquefois obliger de mesurer les deux côtés d'un triangle AB, BC au lieu de mesurer le troisième côté AC qui doit être la base géodésique. Pour pouvoir passer des éléments connus à celui qu'on désire connaître, il suffit de mesurer encore l'angle dont le sommet est en B, et de résoudre le triangle ABC ; mais ici, contrairement à ce que nous avons

dit de la forme des triangles géodésiques, cet angle B doit être obtus. Cela résulte des données particulières a. c. B qui définissent le triangle. En effet, la base AC serait déterminée par la formule

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac.\cos.\,B$$

Mais une erreur β commise sur la mesure de B conduira au résultat,

$$b'^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac\cos.\,(B + \beta)$$

d'où $$b^2 - b'^2 = 2\,ac \left\{ \cos.\,(B + \beta) - \cos.\,B \right\} = 2\,a.c.\,\beta\,\sin.\,B$$

Pour que l'erreur sur la base soit petite, il faut donc que B soit proche 0 ou de de 200^g; mais comme d'une autre part, b doit être grand, avec les mêmes mesures a et c, la limite favorable est $B = 200^g$.

Nous avons traité le triangle comme rectiligne, et nous étions en droit de le faire si le sommet B est très-rapproché de la base, ce que nous avons vu devoir exister. En effet, dans ce cas, la surface du triangle est très-petite, et nous verrons plus tard que les triangles plans ayant mêmes longueurs de côtés que les triangles sphériques, ont des angles très-sensiblement égaux à ceux de ces derniers, lorsque les surfaces sont très-petites.

CHAPITRE III

MESURE DES ANGLES

82. Instruments répétiteurs. — Les angles devant être obtenus avec une grande exactitude, on ne peut pas employer pour leur mesure le principe de la fixité de l'aiguille aimantée, fixité que nous savons ne pas être rigoureuse. Pour cette cause et par suite de l'incertitude de la lecture, on est obligé d'abandonner l'usage d'une directrice fixe n'exigeant pas d'observation directe, et on est forcé de revenir à l'idée première,

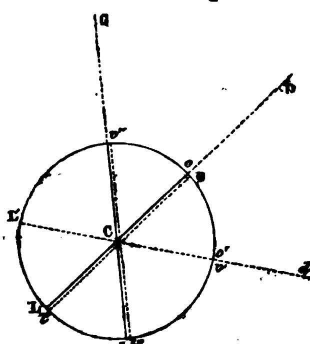
au graphomètre qui mesure l'angle compris entre deux directions réellement visibles.

Cet instrument, complété par des détails de construction destinés à assurer les conditions qu'il doit remplir, a donné directement naissance au *cercle répétiteur* et par une modification très simple il a produit le *théodolite.*

On a en outre appliqué à ces deux instruments le principe de la *répétition* dont les avantages seront expliqués dans un des paragraphes suivants.

La manœuvre théorique de ces deux instruments se réduit à ce qui suit :

Soit un limbe gradué au centre duquel sont placées deux lignes de visées mobiles L et l, dont l'une porte un vernier v. Ces lignes de visées appartenant à des lunettes sont assujetties soit à rester constamment dans le plan du limbe, soit à décrire des plans perpendiculaires à celui-ci. Les lunettes L et l portent les noms de supérieure et inférieure, noms qui leur viennent des positions qui leur sont assignées par des nécessités de construction.



On commence par mettre le limbe soit dans le plan des objets, soit horizontal, et après avoir fait coïncider le zéro du vernier v avec le zéro du limbe, on vise un des points, celui de droite par exemple, avec la lunette supérieure L, en ne changeant pas le contact des zéros, c'est-à-dire en se servant d'un mouvement général ; puis on dirige la lunette inférieure l' sur le second point G. Les deux lignes de visées ou axes optiques forment entre elles soit l'angle de la nature, soit celui qui provient des deux plans verticaux qu'ont décrits les lunettes.

On vise ensuite, par le mouvement général, le premier point D avec la lunette inférieure l; tout se transporte vers la droite, de l'angle primitif, en sorte que les deux lunettes viennent en L' et l et les zéros du limbe et du vernier toujours en contact, en o' et v' de manière que les angles GCD et DCd sont égaux.

En employant enfin un mouvement particulier, la lunette supérieure est dirigée en L″ v″ sur le second point ; dans ce mouvement, le zéro du limbe est resté fixe et le zéro du vernier

ayant décrit le même angle que la lunette L passant de L'd à L''G, aura parcouru sur le limbe gradué un arc de cercle qui mesurera le double de l'angle primitif DCG, si la rotation s'est effectuée autour du centre de ce cercle, comme nous l'avons supposé.

Pour effectuer les répétitions que nous avons dit être avantageuses, il suffit de recommencer les mêmes opérations qui, partant alors de la première lecture faite, au lieu de partir du zéro, fourniront une nouvelle lecture donnant l'angle quadruple, et ainsi de suite.

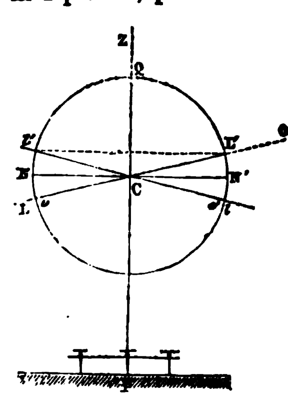
Le premier instrument devant subir la manœuvre que nous venons d'indiquer, c'est-à-dire celui dans lequel le limbe est dans le plan des objets et les lunettes dans le plan du limbe, est *le cercle répétiteur*.

Le second, soumis à la même manœuvre, mais répondant au cas où le limbe est horizontal et où les lunettes décrivent des plans verticaux, est le *théodolite*.

Le premier donne les angles dans le plan des objets ; le second les fournit réduits à l'horizon.

Ces deux instruments servent encore à obtenir les distances zénithales par une manœuvre identique.

Soit O l'objet observé : plaçons le limbe vertical au moyen d'un fil à plomb; pointons la lunette supérieure sur O, en LL', après l'avoir fixée au limbe sur zéro : calons un niveau qui est fixé à la lunette inférieure; retournons tout l'instrument par un mouvement de 200^g autour d'une colonne verticale : la lunette supérieure viendra en ll, son zéro en o', et sa position nouvelle sera symétrique par rapport au niveau NN', qui n'aura pas dû cesser d'être horizontal.



S'il s'était décalé dans le retournement, ce qui a presque toujours lieu, plus ou moins, parce que la colonne n'est pas parfaitement verticale, on le remettrait au moyen du mouvement général du limbe. L'angle lCN sera donc égal à L'CN'. Si maintenant on détache la lunette supérieure, de manière à ramener l'oculaire de l en L, sa position première, l'axe optique décrira l'angle l'QL' double de la distance

zénithale, et l'index, parcourant un arc égal, indiquera le double de l'angle cherché.

Ce résultat s'obtient donc aussi par deux observations conjuguées ; et en continuant de la même manière, on a successivement le quadruple, le sextuple, etc., de la distance zénithale.

Il pourrait se faire que les localités ne permissent pas de retourner l'instrument pour la seconde observation conjuguée : on prendrait alors l'angle OCN′, complément de la distance zénithale d'où l'on conclurait immédiatement cette dernière.

On rend, à cet effet, les deux lunettes parallèles en les dirigeant toutes deux sur un objet très-éloigné, puis on les établit horizontales, au moyen du niveau qui appartient à l'une d'elles, la lunette supérieure étant toujours à zéro. Alors on dirige celle-ci sur le point O, et l'on a l'angle simple, etc.

Cette manière d'opérer suppose que l'axe optique de la lunette inférieure est horizontal quand le niveau est calé. Pour s'en assurer, on opère par la méthode générale sur un point pour lequel le retournement est possible, puis cherchant la même distance zénithale par le second procédé, on arrive à deux valeurs identiques si la condition est satisfaite, ou à deux valeurs différentes qui, retranchées l'une de l'autre, feront connaître une erreur de collimation constante, qu'il suffira d'ajouter ou de retrancher dans tous les cas.

La similitude de manœuvre, que nous avons dit exister pour les deux instruments, se trouve quelquefois un peu dérangée quand on apporte dans la construction quelque modification plus ou moins utile. Ainsi on comprend facilement qu'il n'y a pas une nécessité absolue à l'existence des deux lunettes. Une d'elles suffit à la rigueur. Pour opérer, dans cette hypothèse, il faut viser le point de droite (ou de gauche suivant le sens des graduations tracées sur le limbe) par le mouvement général, puis le point de gauche par le mouvement particulier de la seule lunette dont on dispose ; l'angle simple, puis par des opérations successives, l'angle double, triple, etc., auront été successivement parcourus par le zéro vernier.

Cette suppression d'une lunette peut se faire également dans chacun des deux instruments, mais elle n'existe jamais que dans le théodolite ; par suite d'une mauvaise économie de construction on risque ainsi de faire naître une erreur qui peut avoir quelque importance. En effet, lorsqu'on se sert d'un mouvement particulier, il est sous-entendu que le mouvement général ne

doit pas céder; si par le défaut d'une vis mal serrée, il y a un entraînement du limbe, l'arc parcouru par le zéro du vernier ne mesure plus l'angle de la nature.

Quand l'instrument a deux lunettes, on peut reconnaître l'existence de cet entraînement au moyen de la lunette dont le mouvement particulier n'est pas en jeu, car elle doit rester toujours fixée sur le point de droite, pendant l'action du mouvement particulier de l'autre lunette.

On obvie en partie à cette cause d'erreur dans les théodolites à une seule lunette, en tournant celle-ci, tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, et combinant ces mouvements en raison de la grandeur de l'angle. Cette méthode tend en effet à produire dans la position du zéro du limbe des dérangements inverses qui ont pour résultat de détruire leur influence.

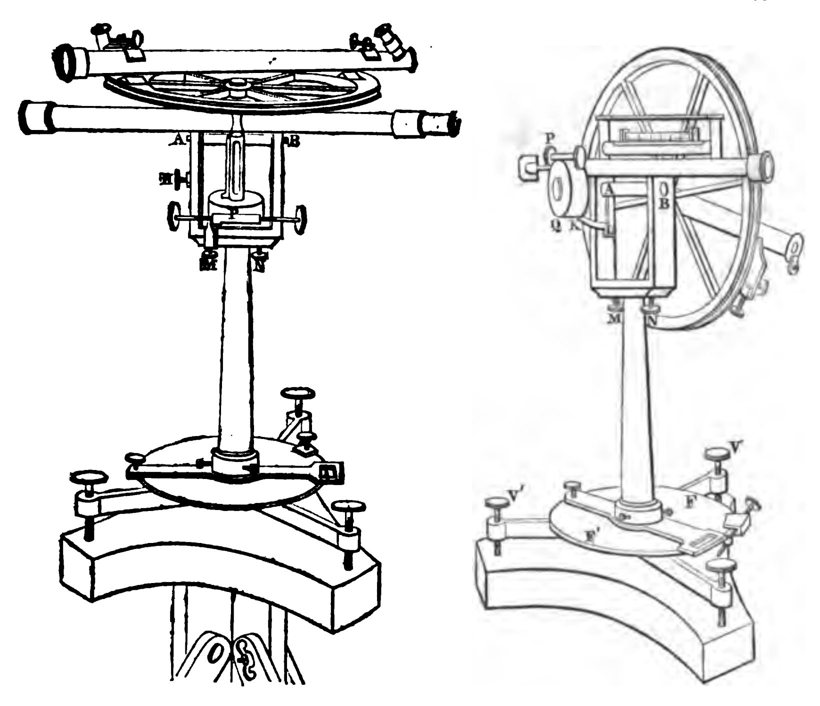
Nous allons décrire avec quelques détails les instruments répétiteurs pour indiquer par quels mécanismes on est arrivé à satisfaire rigoureusement aux conditions de la manœuvre que nous avons indiquée.

83. *Cercle répétiteur.* — Un cercle de $0^m,43$ (16 pouces) de diamètre suffit pour les opérations les plus délicates de la géodésie; on se contente même, en maintes circonstances, d'un cercle de $0^m,27$ (10 pouces). Le limbe est divisé en 4,000 parties ou décigrades; chaque division représente ainsi 10′ centésimales. On adapte à l'index de la lunette supérieure un vernier divisé en 50 parties, embrassant le même espace que 49 divisions du limbe : la différence entre les plus petites parties du limbe et celles du vernier est donc un 50ᵉ de 10′ ou 20″, c'est-à-dire la 200000ᵉ partie du cercle.

Les lunettes sont du genre de celles que l'on nomme astronomiques : à leurs foyers sont placés les réticules. Ce sont des anneaux de métal dont deux diamètres rectangulaires sont représentés par des fils extrêmement déliés.

Le réticule a la faculté de se mouvoir dans le sens de l'axe de la lunette, pour pouvoir être placé exactement au foyer; et dans son plan, autour de ce même axe, soit pour établir les deux fils horizontal et vertical, soit pour les incliner tous deux de 50^g, l'un à gauche et l'autre à droite de la verticale.

Un niveau à bulle d'air très-sensible est adapté invariablement à la lunette inférieure.



Sur le cercle gradué est placée une lunette qui y adhère au moyen d'un pince et d'une vis de rappel : cette dernière produit des mouvements aussi insensibles que possible, quand la pince est serrée : lorsqu'elle est libre, on peut donner telle impulsion aussi grande qu'on le veut avec la main seulement. Au-dessous du limbe est disposée excentriquement la seconde lunette qui se meut également à l'aide d'une pince et d'une vis de rappel. Sous le limbe se trouve un axe perpendiculaire à son plan, et qui passe dans un cylindre creux au-dessous duquel est un renflement PQ, nommé *tambour*, garni d'une pince et d'une vis de rappel, ou d'un autre mécanisme analogue servant à rendre indépendants ou à fixer l'un à l'autre l'axe et le cylindre creux. Celui-ci fait corps avec un axe de rotation AB qui lui est perpendiculaire. AB repose et pivote sur deux supports réunis par leurs parties inférieures, au moyen d'une semelle qui ne forme qu'une seule pièce avec eux. Cette partie de l'instrument se nomme la fourche, et elle est maintenue par deux vis M et N sur une traverse formant T sur une colonne C qui est destinée à

supporter le tout. La colonne est creuse et descend jusqu'à un cercle horizontal FF′, dit *cercle azimutal*, qui est fixé à un pied à trois branches. Celles-ci sont traversées par trois vis V, V′, V″, qui servent à rendre la colonne verticale ou à modifier son inclinaison : ces vis, à larges têtes plates en cuivre, sont en acier et terminées par des cônes aigus qui, en pénétrant dans de petits cônes creux pratiqués dans des pièces dites *gouttes de suif*, évitent que l'instrument se déplace pendant la durée des observations, parce que les gouttes de suif sont garnies en dessous de petites pointes aiguës, en acier trempé, qui entrent dans les pores ou inégalités de la table ou du massif sur lequel est placé l'instrument. Un axe vertical en fer, adhérent au cercle azimutal, pénètre dans le vide de la colonne qui est terminée dans le bas par une branche horizontale à l'extrémité de laquelle est établie une pince. Quand cette pince est serrée, la colonne et tout ce qu'elle supporte font corps avec le trépied ; quand elle est desserrée, le pied ne varie pas, mais la colonne et la partie supérieure de l'instrument peuvent pivoter autour de l'axe qui remplit le creux de la colonne. Il reste, pour compléter cette description succincte, à dire qu'à l'axe de rotation AB est adapté un quart de cercle KL, qui longe l'un des supports de la fourche, et conserve la position qu'on lui donne par l'effet d'une vis de pression H ; que, sur l'axe perpendiculaire placé sous le limbe, est posé un petit niveau dont le but est de rendre cet axe horizontal, et par conséquent le limbe vertical, quand il s'agit d'observer les distances zénithales ; que la recherche de celles-ci nécessite la présence d'un grand niveau sur la lunette inférieure, et qu'enfin, la lunette supérieure entraîne avec elle deux et quelquefois quatre verniers placés à angles droits.

Pour pouvoir exécuter la manœuvre que nous avons indiquée au paragraphe précédent, il faut d'abord mettre les axes optiques des lunettes parallèles au plan du limbe, puis faire coïnsider celui-ci avec le plan des objets.

Parallélisme des axes optiques et du limbe. — La première opération se fait avec le secours d'une *lunette d'épreuve* qui est supportée par deux collets quadrangulaires. On vérifie d'abord celle-ci, c'est-à-dire qu'on s'assure que son axe optique est en même temps son axe de figure, ou qu'il est du moins parallèle à celui-ci. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que, placée sur le limbe, elle donne le même pointé quand on la retourne sur

deux des faces opposées; lorsqu'on trouve quelque différence après le retournement, on corrige le pointé moitié par un mouvement convenable, mais quelconque, de l'instrument et moitié par un mouvement particulier au réticule. Quand le pointé se trouve constant, l'axe optique parallèle à l'axe de figure est aussi parallèle aux faces des collets si ceux-ci sont égaux, condition que le constructeur a eu soin de remplir, et enfin il est parallèle au plan du limbe sur lequel sont posés ces collets.

Pour que les axes des deux lunettes de l'instrument satisfassent à cette même condition, il suffit de les pointer par leurs mouvements particuliers aidés s'il y a lieu, des mouvements propres de leurs réticules.

Au lieu d'employer une lunette d'épreuve on peut opérer comme il sera dit lorsque nous nous occuperons du théodolite.

Établissement du plan du limbe. — Pour mettre le plan du limbe dans le plan des objets, on dirige deux des vis du pied, V et V', par exemple, vers l'un des objets; on desserre la pince F, et l'on fait tourner la colonne jusqu'à ce que l'axe AB ait pris la même direction: alors on serre bien F, on rend libre l'une des lunettes, soit par son mouvement propre, soit par le mouvement général, c'est-à-dire à l'aide de la vis P du tambour. C'est surtout ce dernier moyen que l'on emploie, si les divisions allant de gauche à droite, et le vernier étant placé à zéro, c'est de l'objet de droite qu'il s'agit, et la lunette supérieure dont on fait usage la première, ce qui est utile pour la mesure de l'angle. Pour lui donner l'inclinaison convenable, c'est-à-dire faire que le point de droite soit couvert par la croisée des fils, on se sert des vis V et V' du pied, que les deux mains font tourner simultanément et en sens inverse. Ceci fait, on rend libre la lunette inférieure, on l'amène dans le plan vertical passant par l'objet de gauche; puis on desserre la vis H qui presse sur le quart de cercle KL, et l'on fait tourner le limbe et les lunettes jusqu'à ce que celle de dessous rencontre le point de mire de l'objet de gauche. Quelques instruments ont un mouvement doux, annexé au quart de cercle KL; mais ce n'est pas bien nécessaire. On doit remarquer que cette seconde partie de l'opération n'a pas dérangé ce qu'on avait fait dans la première, si on a satisfait aux conditions hypothétiques que nous avons posées; en effet, l'axe AB ayant été, à dessein, établi parallèle à la lunette

supérieure, celle-ci décrit autour de cet axe une surface cylindrique dont le rayon de la base est la petite distance qui sépare ces deux lignes. Celle-ci restant donc parallèle à elle-même, son axe optique ira toujours passer par l'objet de droite qui est à une distance infiniment grande, comparativement au déplacement de l'axe optique. On peut également employer la troisième vis du pied, pour arriver au même résultat. C'est dans cette prévision qu'on a dirigé les deux autres vis dans la direction de l'objet de droite.

Mais la direction attribuée aux deux vis du pied et à l'axe de rotation ne pouvant être qu'approchée, il y aura, en réalité, une légère déviation du pointé ; il faudra alors, et par les mêmes moyens indiqués précédemment, recommencer plusieurs fois l'opération, et un grand nombre de tâtonnements sera souvent nécessaire avant qu'on arrive à avoir les deux lunettes simultanément pointées sur les deux objets, c'est-à-dire le plan du limbe déjà parallèle à celles-ci, confondu avec le plan de la nature.

Ce plan devra rester immuable pendant toutes les opérations relatives à un même angle, malgré l'emploi du mouvement général; cela exige que l'axe de rotation autour duquel se fait ce mouvement soit exactement perpendiculaire au limbe. Si cette condition n'est pas rigoureusement remplie, l'instrument peut du reste encore être employé, mais avec un surcroît de travail ; il nécessitera à chaque instant, pendant les opérations de mesure, le rétablissement dans le plan des objets, au moyen des mouvements qui ont été employés dans le premier établissement.

De petites déviations de ce plan, ainsi qu'un parallélisme des axes optiques des lunettes un peu défectueux, n'ont pas une grande importance sur le résultat ; l'angle de la nature se trouverait, par suite de leur existence, projeté sur un plan qui ne lui serait pas rigoureusement parallèle ; mais nous verrons, lorsqu'il s'agira de la réduction à l'horizon, que les erreurs qui en résulteraient, bien faibles quand il s'agit d'inclinaisons déjà considérables, deviendraient négligeables pour de très-faibles inclinaisons.

Il ne faut pas abuser de cette remarque, et c'est toujours avec un grand soin qu'il faut chercher à satisfaire aux deux conditions que nous avons examinées.

Mesure de l'angle. — Dans cette mesure, la tolérance dont nous

venons de parler ne pourrait pas être admise; les erreurs commises se transporteraient en vraie grandeur sur le résultat.

Nous ne redirons pas la manœuvre qui a été indiquée être générale au précédent paragraphe; nous donnerons seulement un moyen mnémonique rappelant la marche des opérations.

Lorsque le limbe est divisé de gauche à droite pour l'observateur qui regarde la partie de ce limbe la plus rapprochée de lui, les observations doivent commencer par le point de droite; le contraire a lieu pour les divisions inverses.

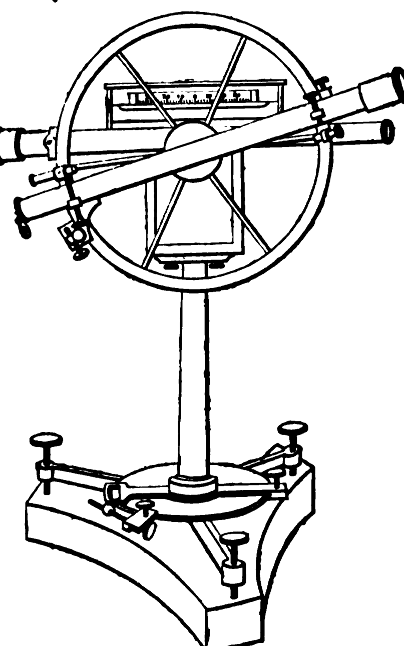
On vise alternativement à droite et à gauche, toujours à droite par le mouvement général et à gauche par un mouvement particulier, et on se sert deux fois de suite de la même lunette excepté en commençant et en finissant. Les deux visées consécutives effectuées avec la lunette supérieure sont séparées par une lecture.

Afin de mettre beaucoup d'ordre dans les observations que l'on recueille sur les lieux, on a fait des tableaux dans lesquels on inscrit les angles multiples et simples, ainsi que tous les éléments de réduction dont nous parlerons plus tard.

Dans les observations du premier ordre, on prend trois ou quatre séries du même angle, et chacune le donne vingt fois. Une seule série fournissant l'angle décuple suffit généralement pour le second ordre, et l'on se contente de l'angle sextuple pour les points conclus, quand d'ailleurs la série marche bien. On écrit les angles multiples dans la colonne qui leur est destinée, à mesure qu'on les obtient, et l'on opère immédiatement les divisions par 2, 4, 6, etc., pour voir comment marche la série. Vers la fin de l'opération, les quotients successifs qui expriment l'angle simple doivent différer très-peu.

Mesure des distances zénithales.—Pour observer une distance zénithale, il faut d'abord *rendre la colonne verticale*, pour deux motifs: le premier afin que le niveau, étant calé dans la première opération, ne soit pas trop éloigné de l'être encore après le retournement, ce qui retarderait d'autant; et, en second lieu, parce que les angles que l'on observe devant être parcourus dans un plan vertical, le limbe qui, dans sa position première, aurait été placé verticalement au moyen d'un fil à plomb, ne le serait plus dans la seconde position. Voici comment on procède: on renverse le limbe pour le mettre à peu près vertical; on détache la lunette inférieure, et on cale son niveau, en ayant soin de la placer dans la direction de deux des vis du pied. Si, après avoir fait

tourner le tout autour de la colonne de 200ᵍ, ce que l'on apprécie au moyen du cercle azimutal, le niveau est dérangé, on le rétablit, moitié avec les deux vis du pied mentionnées plus haut, et moitié par le mouvement propre de la lunette inférieure ou par celui du limbe. Après quelques épreuves, le niveau reste calé dans les deux positions : ce qui prouve déjà que la colonne est située dans un plan vertical perpendiculaire au niveau, et qu'ils forment entre eux un angle droit. Ensuite, toujours au moyen du cercle azimutal, on met la lunette inférieure dans un plan à peu près perpendiculaire à celui qui la contenait d'abord, on cale le niveau seulement à l'aide de la troisième vis du pied, et l'on arrive à conclure que l'axe de la colonne, étant situé à la fois dans deux plans verticaux, est lui-même vertical; la seconde opération ayant généralement dérangé la verticalité du premier plan qui pivote autour d'une ligne qui ne lui est qu'à peu près perpendiculaire, il y aura lieu d'opérer par tâtonnements successifs, effectués avec les seules vis du pied.



On place ensuite le *limbe verticalement* au moyen d'un fil à plomb : son axe est alors horizontal, et le petit niveau qu'il porte doit être calé, s'il est bien réglé; s'il ne l'est pas, on le règle au moyen du mécanisme qui est destiné à cet usage et, dans les opérations ultérieures, on peut dire que le plan du limbe est vertical lorsque la bulle est dans ses repères. Il y a quelquefois dans l'un des supports AM ou BN, une vis qui sert de buttoir, et que l'on amène jusqu'au contact d'une saillie située vers l'extrémité L du quart du cercle. C'est un second guide qui sert à rendre promptement le limbe vertical.

Pour plus de sûreté dans le pointé, on met alternativement le fil vertical à droite et à gauche de l'axe du signal, quand on observe l'angle entre deux objets ; et, quand il s'agit d'une distance zénithale, on fait en sorte que le point de mire soit successivement dessus et dessous le fil horizontal ; ou bien on incline les deux fils à 50^g chacun de chaque côté de la verticale.

Nous ne rappelerons pas encore ici la manœuvre générale précédemment indiquée qui permet d'obtenir une distance zénithale ; nous indiquerons seulement un moyen mnémonique de se rappeler la marche des opérations.

On vise le point avec la lunette supérieure en plaçant le limbe successivement à droite et à gauche ; les visées de droite se font avec le mouvement général, celles de gauche avec le mouvement particulier. On cale le niveau aussi exactement que possible, dans les deux positions, par les mouvements inverses, c'est-à-dire, à droite par le mouvement particulier de la lunette inférieure, qui ne sert ici qu'à cet usage, et à gauche par le mouvement général.

Comme pour la mesure de l'angle dans le plan des objets, les opérations préalables relatives à la colonne et au limbe peuvent supporter une légère inexactitude, mais les visées et le calage du niveau doivent être faits aussi rigoureusement que possible, sous peine de voir se transporter en vraie grandeur sur le résultat les erreurs commises dans ces opérations.

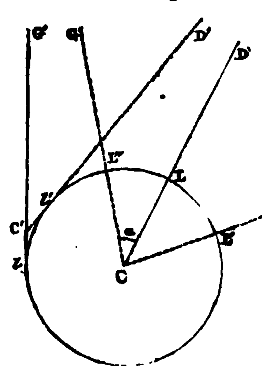
L'inscription des distances zénithales se fait comme celles des angles et avec le même soin.

Excentricité des lunettes. — Les nécessités de la construction forcent à rendre la lunette inférieure légèrement excentrique ; la lunette supérieure elle-même ne projette probablement jamais rigoureusement son axe optique sur le centre du limbe. Il peut naître de là une erreur commise dans la mesure de l'angle, erreur que nous allons apprécier.

Une des lunettes étant beaucoup plus excentrique que l'autre, nous allons supposer celle-ci exactement centrée, et en reconnaissant que l'erreur due à la première est excessivement faible, nous serons en droit de conclure que celle qui proviendrait de la seconde est complétement négligeable.

Il est bon d'observer que l'excentricité dont nous nous occupons n'est pas celle de l'axe de rotation relative au centre du limbe gradué ; l'influence de celle-ci, si elle existe, est beaucoup plus grave, et elle sera étudiée plus tard.

Pour se rendre compte de l'importance de celle qui nous occupe, il suffit de supposer faites les opérations indiquées. Les deux lunettes, pointées d'abord suivant LD et lG seront ramenées par le mouvement général en lD et CL de sorte que $ll' = \mathrm{LL}'$, en supposant que le cercle tracé sur la figure soit celui qui est tangent à la lunette inférieure. On peut supposer les angles mesurés sur ce cercle. La dernière observation fait passer la lunette supérieure en L''G, en lui faisant décrire un angle mesuré par $\mathrm{L'L''} = \mathrm{LL''} + \mathrm{LL'}$. Si α désigne l'angle vrai GCD, l'erreur commise dans la lecture qui devrait donner 2α sera donc $\alpha - \mathrm{LL'} = \alpha - ll'$. Mais l'arc ll' mesure GC'D qui, s'appuyant



aux mêmes points G et D de la nature, a son sommet en C' au lieu de l'avoir en C. L'erreur commise $\alpha - ll'$ est donc de la nature de celles dites réduction au centre dont nous nous occuperons bientôt.

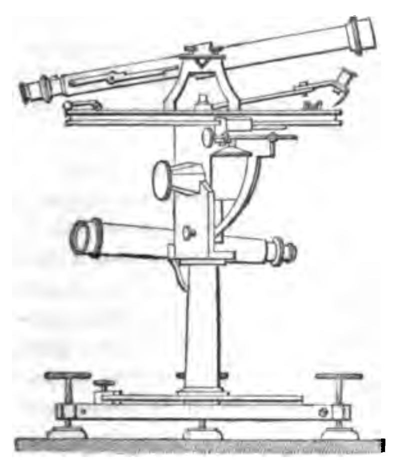
On verra que ces réductions sont faibles, pour des points éloignés G et D, comme cela se présente toujours en géodésie, quand le déplacement CC' du sommet de l'angle a une valeur assez sensible. Dans le cas actuel, ce déplacement, d'un petit nombre de centimètres, aura une influence entièrement inappréciable.

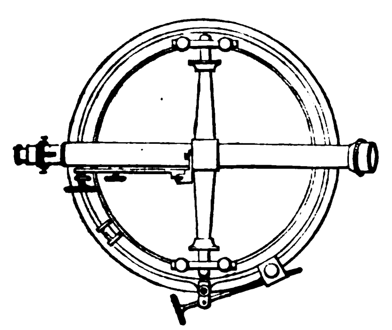
84. Théodolite. — Nous rappelons, avant de décrire cet instrument, qu'il donne les angles réduits à l'horizon, en projetant par des plans verticaux les lignes de visées sur un limbe horizontal.

Cet instrument se compose de deux limbes concentriques, l'un extérieur portant les divisions, l'autre intérieur portant quatre verniers. Ces deux cercles peuvent se mouvoir ensemble ou séparément : ils sont supportés par deux axes concentriques et coniques, perpendiculaires à leurs plans. L'axe du limbe intérieur est plein, l'autre est creux. Ce dernier porte un autre axe qui lui est perpendiculaire et qui repose sur deux collets adhérents à la colonne qui forme le pied de l'instrument. C'est autour de cet axe que se fait le mouvement qui sert à placer le limbe horizontalement ou verticalement. On arrête ce mouvement au moyen d'une vis pressant sur un quart de cercle vertical fixé au



limbe : la vis tient à la colonne, qui est aussi composée de deux axes concentriques et coniques, servant à faire tourner tout l'instrument sans déranger les pieds, et si le plan du limbe est vertical, à le mettre dans l'azimut convenable. Des divisions tracées sur le cercle horizontal placé au pied de la colonne, en facilitent la recherche. L'instrument est porté par trois vis qui servent à élever ou à abaisser le limbe, et à incliner la colonne. Tous les mouvements s'opèrent vite ou lentement, et s'arrêtent au moyen de vis de pression et de rappel combinées.





Pour être dans les circonstances les plus favorables, le théodolite devrait avoir deux lunettes comme le cercle répétiteur ; mais, dans la plupart des cas, sa construction a été simplifiée comme l'indique la figure. Il porte bien encore en réalité deux lunettes, mais l'une supérieure sert seule à pointer les objets; l'autre inférieure, attachée à la colonne et dite *lunette de repère,* ne sert à indiquer que les dérangements provenant du fait de cette colonne, sans rien indiquer de ceux qui peuvent provenir du mouvement général, beaucoup plus à craindre.

La lunette supérieure est supportée par un axe perpendiculaire à sa direction, et posant sur deux collets dépendant du limbe intérieur. Elle peut ainsi décrire un plan vertical, quand son axe de rotation est horizontal.

La lunette inférieure peut aussi se mouvoir dans un plan vertical ; mais elle n'a pas de vis de rappel.

Le limbe extérieur est divisé en 400^g, et chaque grade en

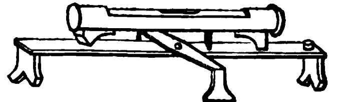
décigrades ou dizaines de minute centésimale. Chacun des verniers du limbe intérieur comprend 49 divisions du limbe, ou $4^g,90'$, et est divisé en 50 parties : l'approximation est donc de 20″.

Ainsi, le vernier donne les minutes indiquées par des chiffres placés de 5 en 5 divisions, et ensuite autant de fois 20″ qu'il y a de divisions, depuis la dernière minute jusqu'à la division qui coïncide avec l'une de celles du limbe.

Quatre loupes correspondant aux verniers servent à lire avec plus de facilité et de précision. Le limbe intérieur est toujours un peu plus bas que l'autre, de sorte qu'en lisant on projette la division du limbe sur celle du vernier. Cela donne lieu à une parallaxe qui va souvent à plusieurs divisions ; mais on ne saurait mieux faire. Si l'on plaçait les limbes dans le même plan, les deux divisions paraîtraient très-éloignées l'une de l'autre pour pouvoir bien juger de celles qui correspondent le plus exactement, parce qu'on est obligé, pour éviter le frottement, de laisser entre les deux limbes un vide qui, vu à travers la loupe, paraît plus grand encore.

Pour observer les angles horizontaux, on place le limbe à peu près horizontal, au moyen des vis du pied ; on tire l'oculaire des lunettes, de manière à voir bien nettement les fils ; puis ensuite, on tire ensemble et les fils et l'oculaire, afin de voir les objets clairement. On cherche un point remarquable et bien visible, sur lequel on dirige la lunette de repère ; puis on serre fortement la vis du cercle azimutal.

Horizontalité du plan du limbe. — Le plan du limbe est mis horizontal par le secours d'un niveau mobile construit de manière à pouvoir se placer sur l'axe de rotation de la lunette. Ce niveau a d'abord besoin d'être rectifié lui-même, c'est-à-dire qu'il faut s'assurer du parallélisme de son axe, ou tangente à la position moyenne que doit occuper la bulle quand elle est dite dans ses repères, et de la ligne déterminée par les pieds des supports de ce niveau. Pour cela, on le place sur l'axe de rotation de la lunette, et on le cale au moyen des deux vis du pied de l'instrument qui, à dessein, déterminent une ligne qui lui est à peu près parallèle. Si le bas des supports ou l'axe de rotation sur lequel ils posent est parallèle à l'axe du niveau, c'est-à-dire



horizontal, en enlevant le niveau et le retournant bout pour bout, il doit, dans cette nouvelle position, être encore horizontal ; s'il ne l'est pas, c'est parce que ses pieds ne sont pas égaux et que l'axe de rotation est incliné à l'horizon. La correction se fait moitié avec les deux vis du pied susmentionnées, et moitié par le moyen d'une vis placée à l'une des extrémités du niveau, et dont le but est de modifier la longueur relative de ses deux pieds. Cette méthode n'étant que de tâtonnements, il faut souvent plusieurs fois répéter l'opération indiquée, avant de trouver la bulle dans ses repères, pour les deux positions symétriques du niveau.

Le niveau ainsi réglé, il faut placer le limbe horizontal. Le niveau étant horizontal sur l'axe de rotation, le limbe extérieur étant fixe et le vernier correspondant à une division que l'on remarque, on fait décrire 200^g au limbe intérieur. Si, dans cette nouvelle position, le niveau se déplace, cela indique que les supports ne posent pas sur une ligne horizontale et ne sont pas de même hauteur : on corrige donc, partie avec les vis du pied, et partie avec une vis attachée à l'un des montants ; et, comme précédemment, on procède par tâtonnements, jusqu'à ce que le niveau soit calé dans les deux positions : ensuite on fait marcher le vernier de 100^g, on cale le niveau avec la troisième vis du pied seulement, et l'on remet le vernier dans l'une des précédentes positions pour s'assurer que l'horizontalité n'a pas changé dans ce sens. Bientôt le niveau reste calé dans trois positions, et il le sera encore dans toutes les autres, si l'instrument est bien construit. Au reste, une différence de quelques divisions sur le tube de verre du niveau est de peu d'importance.

Verticalité du plan décrit par la ligne de visée. — Il faut ensuite vérifier si l'axe optique de la lunette est perpendiculaire à l'axe de rotation de cette lunette, de manière à décrire un plan vertical. Cela se fait en plaçant l'intersection des fils sur un objet bien visible, serrant les vis des limbes, enlevant la lunette de dessus les collets, et retournant l'axe de rotation bout pour bout, c'est-à-dire faisant tourner la lunette de 200^g autour de son axe optique. Si l'intersection des fils ne donne plus sur le même objet, cela prouve que l'axe optique ne fait pas un angle droit avec celui de rotation. On corrige cette erreur, moitié avec les vis du réticule, moitié avec l'une de celles des limbes.

Si l'on pointait toujours exactement à l'intersection des fils,

peu importerait leur direction : mais comme on se sert souvent, pour pointer, de tout le fil vertical, il faut qu'il soit exactement tel. Cela se vérifie en le mettant sur un objet bien déterminé et faisant mouvoir la lunette autour de l'axe de rotation. Le fil est vertical, si dans le mouvement il reste constamment sur l'objet : s'il n'en est pas ainsi, on desserre la vis qui fixe le réticule, puis on le fait tourner de manière à redresser le fil.

Mesure de l'angle horizontal. — Nous ne répéterons pas ici ce qui a été dit de la marche à suivre, marche indiquée à la fin du § 78, relative au cas de suppression d'une des lunettes de visée. Nous observerons seulement qu'il est bon d'utiliser de temps en temps la lunette de repère, pour s'assurer de la seule chose qu'elle puisse indiquer, la fixité de la colonne.

Distances zénithales. — La marche des opérations étant la même que dans l'emploi du cercle répétiteur, nous ne redirons pas ici ce qui a été dit à propos de celui-ci.

Nous ferons seulement deux observations motivées l'une par la nature même de l'instrument, l'autre par la suppression arbitraire d'une des lunettes de visée.

La première provient de la nécessité d'établir le parallélisme du plan du limbe et de la lunette qui devait être mobile pour la mesure des angles dans le sens horizontal. Après avoir réglé la colonne et le limbe, on place d'abord la lunette à peu près parallèlement au limbe au moyen d'un mécanisme particulier qui peut varier d'un instrument à un autre; puis on cherche à perfectionner ce parallélisme. Pour cela on vise un objet et on fait la lecture sur le cercle azimutal; puis tournant l'instrument de 200^g, on amène le limbe à être parallèle à la première position occupée par lui. Si la lunette est parallèle au limbe, elle doit pointer encore sur le même objet, à la différence du double de la distance de son axe à celui de la colonne, quantité presque nulle, eu égard à l'éloignement de l'objet visé. Si la lunette ne donne plus dessus, après toutefois, pour s'en assurer, avoir ramené vers soi l'oculaire, on corrige la différence, moitié par la vis de rappel du cercle azimutal, et moitié avec la vis qui fixe la lunette au limbe. En continuant cette opération, on arrive à retrouver aux deux positions, le même objet à la croisée des

fils. Quand il y aurait une légère différence dans le retournement, cela affecterait peu le résultat : aussi se contente-t-on, quelquefois, pour obtenir le parallélisme, de mettre à vue le plan du limbe sur un objet, et d'y diriger également la lunette.

Le fil principal avait été placé verticalement pour l'observation des angles, il se trouvera donc maintenant horizontal. Si d'ailleurs il ne l'était pas, on le réglerait comme il a été dit précédemment.

La seconde observation provient de la suppression de la lunette inférieure de visée ; par ce fait même, le niveau qu'aurait dû porter celle-ci, se trouve aussi supprimé. On le remplace par un autre niveau à bulle fixé à la colonne et n'ayant qu'un très-petit mouvement propre destiné à rectifier la perpendicularité nécessaire pour mettre la colonne verticale. Cette dernière opération se trouve ainsi faite beaucoup plus rapidement que lorsque le niveau est complétement mobile, puisqu'une fois qu'il a été réglé, il n'y a pas de raison pour qu'il se dérègle ; mais on fait naître alors le même inconvénient qui, dans la mesure des angles horizontaux, provient de la suppression de la seconde lunette ; en effet, ce niveau indépendant du mouvement général, ne peut pas faire connaître les entraînements de celui-ci.

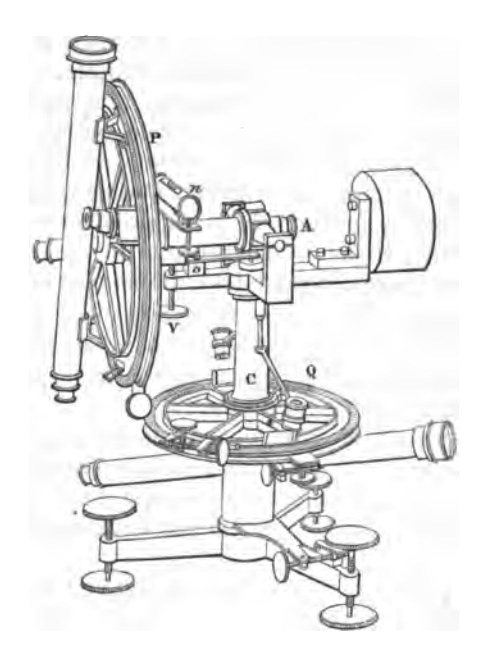
Il doit, comme celui qui devrait être appliqué à l'instrument plus complet, être calé dans les deux positions du limbe, mais avec le seul mouvement qui puisse agir sur la disposition adoptée, c'est-à-dire, avec les vis du pied.

Un second niveau, de petite dimension, est adapté à la lunette elle-même, pour pouvoir, par cas fortuit, opérer sans retournement, d'une manière analogue à celle qui a été indiquée pour l'observation faite avec le secours des deux lunettes du cercle répétiteur.

Nous avons dit que le plan du limbe du cercle répétiteur ou du théodolite devait être mis vertical au moyen d'un fil à plomb ; cette opération n'a pas besoin d'être autrement précisée. On la rend souvent plus commode par l'emploi de deux pinces d'égales dimensions qu'on fixe aux deux extrémités du diamètre vertical du limbe : il faut avoir préalablement vérifié cette égalité de longueur par une juxta-position, ou mieux en les alternant de place.

Théodolite à deux limbes.—Le peu d'élévation de l'axe des tourillons au-dessus du plan du limbe du théodolite que nous

venons de décrire, ne permet pas l'observation de points situés à toutes les hauteurs au-dessus de l'horizon ; en sorte que, suffisant pour les opérations géodésiques ordinaires, il est insuffisant pour les observations astronomiques. La figure représente la modification qu'il faut apporter à la construction que nous avons indiquée. Deux limbes P et Q perpendiculaires à deux axes de rotation A et C sont mis l'un vertical et l'autre horizontal. Composés chacun de deux limbes concentriques portant l'un les graduations et l'autre les verniers, ils sont analogues à ceux du théodolite ordinaire et du cercle répétiteur, et ils ont les mêmes mouvements que ceux-ci.



Ces limbes P et Q étant perpendiculaires à leurs axes, comme cela doit toujours exister dans tout instrument, afin que le plan reste fixe pendant la rotation, il suffit pour qu'ils soient vertical et horizontal, que les axes A et C soient l'un horizontal et l'autre vertical. On obtient ce résultat par l'emploi du niveau *n*, pour la colonne C, et par celui d'un niveau à fourche, pour l'axe A, par les mêmes procédés qui, dans l'usage du théodolite ordinaire, sont utilisés pour obtenir la verticalité de la colonne

et l'horizontalité de l'axe des tourillons, c'est-à-dire, en combinant, d'une part, le mouvement des vis du pied avec celui de la vis *v* particulière au niveau *n*, et, d'autre part, le mouvement de correction du niveau à fourche avec celui de la vis V.

Les mesures d'angles se font comme avec le théodolite ordinaire, avec cette seule différence que le mouvement particulier de la lunette relatif à la mesure de l'angle horizontal, exige l'opération combinée qui est nécessaire pour la mesure de la distance zénithale, c'est-à-dire le passage du limbe vertical, de la droite à la gauche de la colonne et le renversement de la lunette. Si on a soin de caler dans ces deux positions le niveau *n* au moyen des vis du pied, et si les visées sont faites l'une par le mouvement général, l'autre par celui de la lunette, on obtient sur les deux limbes l'angle à l'horizon et la somme des distances zénithales, somme qui peut contrôler ces distances qui s'obtiennent du reste isolément par le procédé ordinaire.

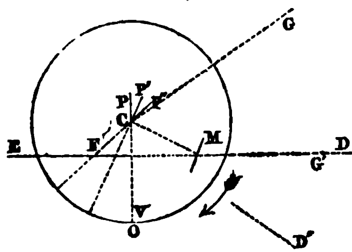
Cet instrument a, comme le théodolite à un limbe, l'inconvénient de ne pas donner connaissance des entraînements des mouvements généraux dus aux frottements qui proviennent de l'emploi des mouvements particuliers; il a de plus le désavantage d'être obligé d'admettre la perpendicularité des axes et des limbes, perpendicularité qui, après un usage prolongé de l'instrument, peut ne pas exister rigoureusement. Lorsque cette condition n'est pas remplie dans le cercle répétiteur et dans le théodolite ordinaire, le rétablissement continuel du plan du limbe peut être effectué par les procédés employés pour le premier établissement; mais il n'en est pas de même pour le *théodolite doublement répétiteur,* dont les limbes seront toujours inclinés si la perpendicularité des axes n'existe pas.

Cet inconvénient n'a du reste qu'une médiocre importance; les angles mesurés dans des plans quelque peu inclinés sur l'horizon ou sur la verticale, nécessiteraient des corrections qui seraient insignifiantes, ce dont on sera assuré si on considère le peu d'importance des réductions à l'horizon faites par le calcul, sur des angles dont les côtés ont des inclinaisons assez considérables par rapport aux horizontales.

85. **Cercle à réflexion.** — Cet instrument est rarement employé en géodésie. Inférieur aux deux précédents, il est utilisé dans le cas où l'on ne peut pas opérer avec un support fixe. Les marins sont obligés d'avoir recours à son aide à moins qu'ils ne

préfèrent se servir du sextant ; le cercle à réflexion n'est en effet qu'une modification, un perfectionnement, pensons-nous, de celui-ci ; il est un sextant répétiteur. Les marins d'un grand nombre de nations ont conservé l'usage de l'instrument primitif ; ils lui trouvent un avantage résultant de la diminution du poids, mais ils perdent un peu de l'exactitude que la répétition peut fournir. Ajoutons toutefois que dans les observations astronomiques, les seules qui puissent être exécutées sur des navires, la répétition est difficilement applicable.

Mesure des angles. — Le cercle à réflexion se compose d'un limbe gradué, d'une lunette EF destinée seulement à grossir et non à pointer, et de deux miroirs dont l'un M est fixé à l'alidade qui porte la lunette. Le second miroir P, mobile comme le premier autour du centre des graduations et situé vers ce centre, fait corps avec une seconde alidade armée d'un vernier V.



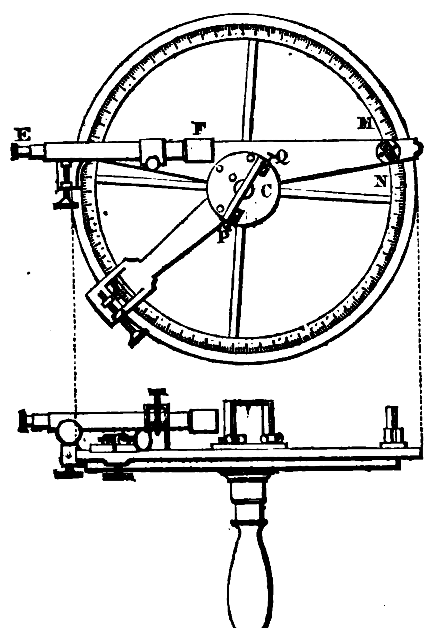
Après avoir mis ce vernier au zéro des graduations, on vise avec la lunette l'objet de droite (si le limbe est divisé de droite à gauche), à travers la partie non étamée du miroir M, et maintenant constamment cette visée, on fait tourner avec le poignet, le reste de l'instrument jusqu'à ce que le miroir P ait une direction convenable pour que la seconde réflexion de l'objet de gauche se confonde avec l'image directe de celui de droite, et alors on fixe le mouvement de la lunette.

A ce moment l'angle des deux miroirs est la moitié de celui de la nature ; mais il n'est pas lisible.

Pour le connaître il suffirait, lâchant le contact des zéros du limbe et du vernier, d'amener le miroir P à être parallèle au miroir M ; le zéro du vernier aurait parcouru un arc mesurant la moitié de l'angle de la nature ; ce parallélisme existerait lorsque les deux images directe et réfléchie d'un même point seraient superposées. Le point de gauche, comme le point de droite, pourrait servir à constater ce parallélisme sur lequel on passe sans s'y arrêter.

Supposons qu'il ait été établi lorsque les deux images de G étaient superposées, on continue, tout en restant pointé directe-

ment sur le point de gauche, à faire mouvoir le miroir P, dans le même sens, jusqu'à ce que la seconde réflexion du point de droite se confonde avec la visée directe du point de gauche. Pour remplacer le mouvement général de l'instrument que n'indique pas la figure, on peut supposer appliqué aux deux points de la nature, un mouvement en sens inverse qui transporte D et G en D′ et G′, et lorsque la nouvelle superposition est obtenue, le miroir P qui a passé par la direction P′ parallèle à M, est arrivé en P″ symétrique à P par rapport à P′.



En passant d'une position à l'autre, le miroir intérieur a donc décrit le double de l'angle que formaient primitivement les deux miroirs, ou l'angle de la nature, et son zéro de vernier a parcouru, à partir du zéro du limbe, un arc mesurant cet angle.

Les répétitions se font de la même manière en partant de la première lecture faite, au lieu de partir du zéro.

Cet instrument n'est soumis qu'à une vérification, celle qui exige la perpendicularité des miroirs au plan du limbe. Nous renvoyons au § 23, qui traite du sextant, pour la description du moyen employé afin d'arriver à cette vérification, ainsi que pour ce qui a rapport à la lunette qui ne sert ici qu'à grossir, sans que la visée soit précisée par aucune ligne de l'instrument.

On inscrit souvent sur cet instrument des indications doubles de celles des angles qui s'y rapportent. Cet usage, qui, dans le sextant, a le faible avantage d'éviter une multiplication par deux, nous semble dans le cercle à réflexion complétement inutile.

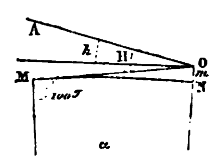
Angles à l'horizon. — On se sert encore de cet instrument pour

mesurer les hauteurs des objets au-dessus de l'horizon. Sur terre on emploie un horizon artificiel, qui est formé par du mercure contenu dans une boîte : sa surface est réfléchissante et toujours horizontale. L'horizon artificiel est placé en avant de l'observateur qui y aperçoit l'image d'un astre ; l'angle compris entre l'astre et son image, étant le double de l'angle à l'horizon, il n'y a qu'à mesurer cet angle, comme ceux qui sont pris dans le plan des objets, pour avoir, par division, celui que l'on cherche.

En mer, on prend l'angle entre l'astre dont on veut connaître la hauteur et le point de l'horizon situé dans son plan vertical ; mais rien ne détermine, *à priori*, ce plan vertical ; pour le préciser il faut alors avoir recours à l'observation suivante ; l'angle entre l'astre et un point quelconque de l'horizon de la mer, variable avec celui-ci, atteint son minimum lorsque le point employé est dans le vertical de l'astre. Si donc on a observé dans ce dernier plan et qu'on incline ensuite l'instrument, après avoir serré les vis des miroirs, l'image du point de l'horizon de la mer correspondant à la nouvelle position devra s'écarter de l'image de l'objet, puisque l'angle qui s'y rapporte est plus grand que celui qui a déterminé la position des miroirs. Il suffira donc, pour opérer dans le plan vertical de l'astre, d'imprimer à l'instrument un petit mouvement d'oscillation et de saisir la position du miroir mobile qui donne la trajectoire décrite par l'image de l'astre, tangente à l'image de l'horizon de la mer.

Cette méthode d'observation fournit en réalité, non pas l'angle avec l'horizontale du lieu, mais bien celui qui est formé avec l'horizontale de l'horizon de la mer.

Pour les marins qui observent sur le tillac d'un navire dont la hauteur est toujours très-petite, l'erreur qui en résulte est toujours très-petite elle-même. Cependant il peut se présenter des circonstances dans lesquelles une hauteur plus considérable du lieu de l'observation au-dessus de la surface de la mer donne naissance à une erreur assez importante qu'il est nécessaire de corriger. Soit O la position de l'observateur situé à une hauteur m au-dessus de la surface MN de la mer. L'angle observé sera H au lieu d'être h. L'erreur H—h est l'angle des tangentes aux points M et O, angle égal à celui des rayons et que nous appelle-



rons α. En désignant par R le rayon terrestre, on a successivement et par approximation

$$\cos.\alpha = \frac{R}{R+m} = \frac{1}{1+\frac{m}{m}} = 1 - \frac{m}{R}$$

Pour rendre cette expression calculable par logarithmes, on peut la remplacer par

$$2\sin.^2 \tfrac{1}{2}\alpha = 1 - \cos.\alpha = \frac{m}{R}, \quad \therefore \quad \sin.\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{m}{2R}}$$

α est l'erreur qui affecte l'angle à l'horizon. La formule donne cet angle exprimé par un rapport ; pour avoir son expression en secondes, nous savons qu'il faut diviser par sin. 1″ ; la correction que devra subir l'angle observé sera donc négative et égale à

$$\alpha'' = \frac{1}{\sin.1''}\sqrt{\frac{2m}{R}}$$

86. Causes d'erreur et approximation probable des résultats. — Pour apprécier l'exactitude des résultats auxquels on peut arriver, ainsi que les conditions auxquelles il faut satisfaire pour avoir de bonnes observations, il est nécessaire de se rendre compte des causes d'erreur possibles, ou tout au moins des principales d'entre elles. Nous supposerons que l'observateur satisfait exactement aux conditions exigées de l'instrument qu'il emploie, conditions qui ont été expliquées lors de la description des instruments usités pour les opérations géodésiques. Observons ici que toutes les prescriptions alors indiquées n'ont pas la même importance. Ainsi, pour ne prendre qu'un exemple, une horizontalité, quelque peu défectueuse du limbe du théodolite, aurait pour résultat de projeter les angles sur un plan quelque peu différent du plan horizontal. Il s'ensuivrait une erreur, il est vrai, mais une erreur fonction seulement, de l'inclinaison donnée au limbe et toujours beaucoup plus petite que cette inclinaison. Si au contraire l'erreur porte sur un pointé, sur un calage défectueux, en un mot, sur une quelcônque des opérations non de règlement, mais de mesure, elle se transportera en vraie grandeur, sur le résultat.

Nous ne pouvons pas passer en revue tous les cas qui se présentent dans l'usage des instruments répétiteurs. C'est à la

sagacité de l'observateur à apprécier l'importance relative des diverses prescriptions indiquées ; dans le doute, il devra se rappeler que trop de précautions prises ne peuvent avoir d'autre influence qu'une légère perte de temps, tandis que leur insuffisance peut nuire à l'exactitude des résultats.

Les causes d'erreur indépendantes de l'observateur sont les suivantes :

1° Mauvaise division du limbe ;—2° axe de rotation différent du centre du limbe ;—3° erreur de pointé ;—4° erreur de lecture ;—5° dérangement d'une partie de l'instrument.

Passons-les successivement en revue :

1° *Mauvaise division du limbe.* — Pour que les arcs parcourus par les verniers mesurent bien les angles, il faut que les divisions du limbe soient parfaitement égales. Quelque soin qu'on apporte à la construction de l'instrument, il y aura toujours certaines inégalités commises.

2° *Excentricité de l'axe de rotation.* — Il faut de plus que les angles aient leurs sommets au centre du cercle gradué, sans quoi, trop grandes dans une position, les mesures seraient trop petites dans la position opposée.

Comme la première, cette condition ne sera jamais rigoureusement satisfaite; les meilleurs instruments, avec le temps, deviennent sujets à l'erreur qui en résulte, par suite de l'*usure des centres*.

L'usage des *instruments répétiteurs* obvie en partie à ces deux inconvénients. En effet, par suite de la répétition, le même angle est mesuré successivement dans différentes parties du limbe, et s'il a été mesuré une première fois avec les divisions trop grandes, il peut l'être une autre fois avec les divisions trop petites. Il y a donc compensation tout au moins partielle. L'usage de plusieurs verniers agit dans le même sens, car dans le premier cas, ils donnent des mesures prises sur les diverses parties du limbe, et dans le second, ils fournissent par deux lectures opposées, les arcs de cercles compris entre les côtés opposés de l'angle, arcs dont la demi-somme représente bien la mesure de celui-ci.

3° *Erreur de pointé.*—Cette erreur peut provenir, soit de l'imperfection inévitable dans toutes les opérations des hommes, soit du doute qui peut exister sur le point à viser lui-même. Les in-

struments répétiteurs tendent à diminuer l'influence de la première cause, car dans la seconde visée, il y a chance de commettre une erreur inverse de la première. La compensation n'aura pas toujours lieu, mais elle est possible pourtant, et le cas le plus défavorable n'atteindrait jamais que la même erreur commise dans l'opération simple.

L'influence des instruments répétiteurs n'est plus aussi évidente quand il s'agit du vague qui peut exister dans le pointé par suite de la nature du point visé.

Les sommets de triangles qui devraient être des points mathématiques, ne sont souvent qu'une conséquence de la forme des monuments qui, éclairés différemment suivant la position du soleil, apparaissent à l'observateur sous des aspects différents. Ainsi, l'axe d'un tour circulaire devant être sommet d'un triangle ne sera pas vu directement d'une autre station, et l'observateur sera obligé de prendre, pour sa position, le milieu de la partie visible, laquelle partie varie avec la position du soleil. De là naît la correction de *phase* dont il est possible de tenir compte dans quelques cas, mais qu'on néglige la plupart du temps.

Le point qui devrait être visé peut devenir invisible et être remplacé par un autre défectueux. Ainsi, quelquefois les clochers qui servent de signaux ne sont pas verticaux, en sorte que l'extrémité de la flèche qu'on a choisie pour représenter une station n'étant plus visible quand l'éloignement devient considérable, se trouve remplacée, pour l'observateur, par un autre point moins élevé qui n'est plus sur la même verticale. Cette cause d'erreur a une influence plus grande encore pour les distances zénithales, que la flèche soit ou ne soit pas verticale.

Il n'y a pas d'autre moyen d'obvier à ces défectuosités du pointé, que de changer la nature du signal. Pour bien faire, il faudrait surmonter le monument d'une mire pour laquelle le doute ne serait plus possible, comme cela a lieu dans les signaux construits *ad hoc*.

Outre l'emploi de cette mire, on avait songé pour les opérations très-importantes à observer de nuit des *signaux de feu*, tels que des réverbères; mais on y a trouvé des inconvénients graves provenant de la *réfraction*. Généralement, l'effet produit par ce phénomène est de faire paraître le point vu plus élevé que celui de la nature, en le laissant dans le même vertical. Les angles dans le sens horizontal n'en sont pas affectés, et l'on sait corriger approximativement l'erreur commise sur les distances

zénithales. Mais il n'en est plus de même pour les observations de nuit ; l'état de l'atmosphère est soumis à de bien plus grandes variations que dans le jour, et les séries de la même distance zénithale observée varient entre elles, quelquefois, de plusieurs minutes.

D'un autre côté, il ne semble plus exact de supposer que la réfraction n'a d'influence que dans le plan vertical ; on est porté à croire qu'il existe aussi des réfractions latérales pour les rayons géodésiques qui sont toujours très-rapprochés du sol, parce qu'alors la terre rayonne au lieu d'absorber la chaleur.

On a donc été forcé d'abandonner les observations de nuit, et on se contente de faire signaler aussi bien que possible les points les plus importants.

Les observations doivent se faire par un temps calme, ni trop matin, ni trop tard, afin d'éviter les irrégularités de la réfraction.

La construction de signaux dont les pointés sont bien définis, est certes ce qu'il y a de mieux pour obtenir l'exactitude des opérations, mais il n'est pas possible de faire cette construction à tous les sommets de triangles, et, d'ailleurs, il est bon que les monuments et autres points stables du pays soient déterminés. On peut alors, tout en les conservant comme stations, car il ne s'agit ici que de points du deuxième et du premier ordre, ceux du troisième, n'exigeant pas une aussi grande exactitude, se contenter de signaler leur pointé, ne fût-ce que par deux planches fixées en croix.

Ce procédé devient insuffisant, de même que la construction directe des signaux, en tant qu'on ne l'envisage que sous le point de vue de la visée, lorsque les stations sont situées à des distances tellement grandes, qu'on ne les aperçoit que trop difficilement l'une de l'autre. On a alors recours à l'emploi d'*héliostats* ; ces instruments, tels que ceux de Gauss et de Silberman, sont composés d'un mouvement d'horlogerie et d'un miroir plan ; le premier imprime à l'axe de la glace un mouvement conique calculé d'après la marche diurne du soleil, tel que l'image de cet astre est réfléchie dans une direction constante.

L'usage de l'héliostat est peu commode ; il faut, pour qu'il soit visible d'une certaine station, que son orientation soit rigoureusement convenable, et cette orientation doit changer avec cette station, ce qui exige des soins minutieux. A ces inconvénients se joint celui qui résulte de cette circonstance, que les

observations ne sont possibles que lorsque le soleil n'est pas caché par des nuages ; aussi, ne doit-on avoir recours à l'emploi d'un héliostat que lorsqu'il n'est absolument pas possible de s'en passer pour apercevoir des points excessivement éloignés.

4° *Erreur de lecture.* — En admettant que l'angle marqué par le vernier soit bon, on commettra toujours quelque erreur dans la lecture. Ici reparaît l'avantage des instruments répétiteurs. Avec ces instruments, on lit tous les multiples pairs de l'angle, et on fait les quotients seulement pour voir si les séries marchent bien; mais l'angle que l'on choisit est le dernier quotient. L'erreur de lecture se trouve alors divisée par le dernier coefficient.

Les quatre verniers atténuent encore l'influence de cette erreur de lecture.

Il nous semble presque superflu d'indiquer comment on se sert de ces quatre verniers. On a fait, au départ, les quatre lectures qu'on retranche ensuite des quatre lectures finales, et la somme de celles-ci, ainsi modifiée, représente le quadruple du multiple de l'angle.

5° *Dérangement d'une partie de l'instrument pendant l'opération.* —On évitera cette cause d'inexactitude en suivant exactement les prescriptions indiquées pour la manœuvre des instruments géodésiques, en se pénétrant bien des principes exposés au chap. 7 du livre V, relativement à la mesure des angles effectuée avec le secours d'une lunette, en serrant vigoureusement toutes les pinces et en évitant tout mouvement brusque.

Approximation probable des résultats.—Toutes ces causes d'erreur combinées, indépendamment de celles qui peuvent provenir du fait de l'observateur, font qu'on ne peut pas répondre de la valeur rigoureusement exacte de l'angle. Plus les opérations sont importantes, plus on répète un grand nombre de fois les observations du même angle pour atténuer l'influence de certaines de ces causes.

Il existe un moyen de calculer directement l'excès sphérique des triangles, excès qui, comparé à la différence à 200^g de la somme des trois angles, conduit à la connaissance de la somme des trois erreurs. Cette opération répétée très-souvent a fait voir que cette somme ne descendait pas généralement au-des-

sous de 12 à 15″, et que, par suite, on ne peut pas répondre de la valeur des angles horizontaux à moins de 4 ou 5″ près.

On ne sera pas étonné de l'importance des inexactitudes commises dans la mesure des angles, si l'on reporte sa pensée vers toutes les causes d'erreur que nous avons signalées précédemment, et si on y ajoute cette observation que les fils des réticules qui servent au pointé sous-tendent à l'œil de l'observateur un angle d'environ 10″. On avait pensé, pour diminuer la valeur de cet angle, à tracer deux lignes très-tenues sur un verre à faces parallèles. On a dû renoncer à ce système, par suite des effets de diffraction qui se produisent, et surtout par suite de la réflexion de ces lignes sur la seconde face du verre, réflexion qui double l'image du réticule.

Nous terminerons les observations relatives à la mesure des angles, en disant que l'usage des instruments répétiteurs n'est pas adopté par tout le monde. Ainsi, les Anglais préfèrent les sextants au cercle à réflexion, par exemple, et ils recommencent plusieurs fois la mesure du même angle en remettant le vernier à *o*. A dimension égale, le premier de ces instruments a des divisions plus grandes, il est vrai, mais là est son seul avantage; les lunettes, de même longueur, ont même puissance et donnent le même pointé ; le défaut d'exactitude des divisions ou de centrages de l'axe de rotation existe avec toute son importance, puisque l'angle est toujours mesuré avec les mêmes graduations; l'absence de verniers diamétralement opposés agit également d'une manière défavorable.

La lecture rendue plus facile par l'augmentation du rayon est d'un autre côté entachée au résultat final d'une erreur probable que le calcul des probabilités indique égale à $\frac{\alpha}{\sqrt{n}}$ en désignant par α la valeur possible de l'erreur commise dans la lecture d'un angle, et par n le nombre des *réitérations*. Nous savons que par la *répétition* des angles, cette erreur est $\frac{\alpha'}{n}$, α' étant l'erreur de lecture isolée, qui pour l'instrument répétiteur d'un rayon moitié de celui employé pour la réitération est égal à 2α. Pour que l'avantage reste à la répétition sur la réitération, il suffit donc que $\frac{2\alpha}{n} < \frac{\alpha}{\sqrt{n}}$ ou $\sqrt{n} > 2$, $n > 4$. Les répétitions étant toujours multipliées plus de 4 fois, il vaut mieux se servir des instruments répétiteurs, pour cette cause et surtout pour celles que

nous avons énoncées plus haut, relativement à la mauvaise division du limbe, au défaut de centrage, et à l'absence des verniers opposés.

Observons cependant, à ce sujet, que l'interprétation donnée au résultat fourni par le calcul des probabilités, paraît étrange. Pour préciser le doute que nous avons à cet égard, il suffit de se poser la question suivante. L'erreur de lecture probable due aux réitérations, est-elle positive ou négative ? Quelle que soit la solution de cette difficulté, elle nous semble de très-minime importance, quand on songe à la multiplicité des opérations, qui, dans le cas des répétitions par exemple, donne avec $n=20$, une erreur de $\frac{1}{20}$ de l'erreur de lecture possible. Celle-ci peut facilement être amenée à ne pas dépasser $10''$, et l'erreur finale de $0'',5$ nous semble bien faible. Si, au contraire, on se préoccupe des autres causes déjà énoncées et dont l'appréciation numérique n'est pas possible, on voit que l'avantage, pour la mesure des angles dans le plan des objets ou dans le sens horizontal, est incontestablement acquis aux instruments répétiteurs, sur les instruments réitérateurs.

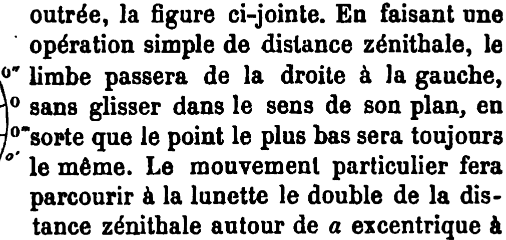
On a employé la réitération avec des instruments ayant un limbe entier, ce qui, à dimension égale, fait perdre l'avantage dû à la facilité de lecture, et on a obvié aux causes d'erreurs dues à la mauvaise qualité des divisions et à l'excentricité, en faisant les lectures sur les verniers opposés qui peuvent alors exister, et en choisissant le point de départ en différents endroits du limbe. Ainsi modifiée, la *réitération* perd de son infériorité relativement à la *répétition*, mais elle a toujours l'inconvénient d'une nouvelle mise au zéro pouvant engendrer une erreur que n'a pas la répétition ; d'autre part, elle prétend avoir l'avantage d'éviter toute chance possible de dérangement de la lunette supérieure portant le vernier, quand on pointe la lunette inférieure par le mouvement général. Il nous semble que ce dérangement est peu à craindre, si dans ce mouvement, on a soin de ne pas toucher à cette lunette, et de l'exécuter en prenant le limbe lui-même et le tournant sans brusquerie.

Quant aux distances zénithales, la variation probablement continuelle de la réfraction, l'usure des centres qui déplace l'axe de rotation et peut-être une légère flexion de la lunette ou du fil horizontal du réticule, font que les séries concordent beaucoup moins bien, et que, par exemple, trois séries du même angle différant entre elles de $50''$, en moyenne, on ne peut pas

répondre des mesures obtenues, à moins de 15 à 20″ près. En outre des erreurs variables, les distances zénithales paraissent affectées d'une erreur négative proportionnelle à leurs sinus, erreur peu importante qui est attribuée à l'usure des centres.

L'*usure des centres* n'a pas d'influence sur la mesure des angles dans le plan du limbe, si on a soin de faire les lectures sur deux verniers opposés, mais elle affecte quelque peu les distances zénithales qui proviennent d'opérations répétées et non celles qui proviennent de la réitération.

Si en effet le centre se trouve usé, l'axe de rotation de la lunette tombera toujours en *a*, comme l'indique, d'une manière outrée, la figure ci-jointe. En faisant une opération simple de distance zénithale, le limbe passera de la droite à la gauche, sans glisser dans le sens de son plan, en sorte que le point le plus bas sera toujours le même. Le mouvement particulier fera parcourir à la lunette le double de la distance zénithale autour de *a* excentrique à la vérité; mais si on fait les lectures sur deux verniers opposés, leur demi-somme donnera l'angle vrai.



Si au lieu de réitérer on veut répéter l'angle, on fera repasser le limbe à droite et on visera par le mouvement général de telle sorte que la lunette primitivement placée en *o*O prendrait la position $o''O''$ passant par le point a' qui représente le point *a* de support primitif, si son poids ne la faisait retomber en $o''aO'''$ en supposant qu'en o'' soit placée la pince. En mettant tout dans les circonstances les plus défavorables, supposons que le vernier soit à l'autre extrémité O'''; la première lecture faite qui répondait à la position $O''o''$ se trouvera donc diminuée de l'angle

$O''o''O''' = \frac{e}{r}$ sin. δ en désignant par *e* le déplacement possible ou l'usure du centre, par *r* le rayon compris entre ce centre et la pince, et par δ, la distance zénithale.

Il nous semble qu'on peut obvier en partie à cette cause d'erreur qui se propage de proche en proche dans toutes les mesures, si ce n'est dans la première, en rapprochant, ce qui se fait du reste pour la commodité, le vernier de la pince, et en second lieu, en les plaçant tous deux dans la direction aa', ce qui reviendrait à les mettre sur un rayon perpendiculaire à la lunette,

pour les observations géodésiques du moins, observations toujours faites proche de l'horizon.

L'influence de cette usure des centres, plus importante pour les opérations astronomiques, est déterminée par des observations de latitude. C'est ainsi, du reste, qu'on a reconnu qu'elle était proportionnelle au sinus de la distance zénithale, ou approximativement à la distance zénithale elle-même.

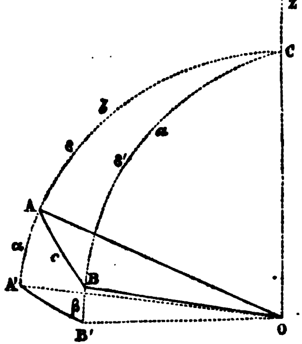
Il résulte de l'existence de cette cause que la répétition se trouve entachée d'une erreur, qu'on peut, du reste, annuler ou atténuer au moins dans les observations astronomiques par des combinaisons convenables, mais il lui reste toujours, sur la réitération, les avantages dus à la mauvaise division du limbe, à l'excentricité de l'axe de rotation, et à l'absence des verniers opposés. La cause d'infériorité qui vient d'être mentionnée, peut même être annulée en opérant comme il a été dit, sans retournement, avec un niveau placé sur une des lunettes. L'exactitude de ce mode d'opérations est subordonnée, il est vrai, à la recherche d'une erreur de collimation qui peut être obtenue par comparaison avec des résultats provenant de retournement. Ceux-ci, pris un très-grand nombre de fois par des *réitérations* indépendantes de l'usure des centres, donneraient exactement cette collimation si on avait soin de faire ces réitérations en plaçant le zéro du vernier au départ, en différents endroits du limbe et en faisant les lectures sur les quatre verniers. Les observations de mesure d'angles à l'horizon, *répétées* ensuite, comme il a été dit, se trouveraient indépendantes de l'usure des centres qui affectent les distances zénithales répétées, et elles auraient les avantages dues à la répétition et provenant des causes qui ont été plusieurs fois énoncées.

Les résultats obtenus par les Anglais avec des instruments réitérateurs de dimensions colossales (5 pieds de rayon), ayant par suite des lunettes très-puissantes, ne semblent pas avoir donné de meilleurs résultats que ceux obtenus par l'emploi de cercles répétiteurs de 16 pouces dont les Français se sont servis pour l'exécution de la triangulation de la carte du Dépôt de la guerre. Il est superflu d'ajouter que pour arriver à la même exactitude approchée, les premiers instruments ont dû causer des embarras énormes de transport, et qu'à dimensions égales, les instruments répétiteurs, l'auraient de beaucoup emporté sur les réitérateurs.

87. Corrections des angles. — Les angles observés doivent être corrigés de causes d'erreur presque toujours inévitables. Les corrections qu'ils doivent subir, au nombre de trois, sont : 1° *la réduction à l'horizon ;* 2° *la réduction au centre de la station*, et 3° pour les distances zénithales seulement *la réduction au sommet du signal.*

Réduction des angles à l'horizon. — Quand on observe les angles au moyen du théodolite, ils sont tous réduits à l'horizon ; mais ils doivent subir une correction lorsqu'ils sont mesurés avec le cercle, pour pouvoir exprimer les angles compris entre les plans verticaux qui projettent les points sur la surface moyenne de la mer.

Soient O le point de station ou sommet de l'angle mesuré AOB, OZ le zénith du lieu. Coupons l'espace par une sphère de rayon quelconque ayant son centre en O ; ses intersections avec les deux plans verticaux, avec le plan des objets, et avec le plan horizontal du lieu, seront A'AC, B'BC, AB, A'B'.



Nous aurons ainsi formé un triangle sphérique ABC dont l'angle dièdre C sera la réduction à l'horizon cherchée, et dont les côtés AB, AC, BC *mesureront* l'angle observé et les distances zénithales δ et δ' des deux points visés, également observées.

Ce triangle est donc défini puisqu'on connaît ses trois côtés, et pour le résoudre, on pourrait employer une des trois formules de trigonométrie sphérique spécialement affectées à ce cas, qui donnerait la moitié de l'angle C, par sa tangente par exemple,

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,C = \sqrt{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(c+b-a)\,\sin.\tfrac{1}{2}(c+a-b)}{\sin.\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\sin.\tfrac{1}{2}(a+b-c)}}$$

Mais ici, comme dans presque tous les cas analogues qui se présentent en géodésie, on préfère chercher la correction qu'il faut faire subir à l'angle observé O, pour avoir sa réduction à l'horizon C, en profitant des circonstances particulières dans

lesquelles on se trouve placé. Ces circonstances proviennent ici de ce que les angles à l'horizon $\alpha = 100^g - \delta$, $\beta = 100^g - \delta'$ sont toujours très-petits.

Nous renvoyons au § 77 (réduction de la base à l'horizon d'un de ses termes), pour l'explication des avantages généraux que présente cette manière de résoudre la plupart des questions géodésiques. Nous ajouterons seulement pour le cas actuel, qu'on y trouve encore la facilité de l'emploi de tables très-succinctes préparées à l'avance, tables qui facilitent beaucoup les calculs de réduction à l'horizon, calculs qui se représentent très-souvent.

Reprenons la formule fondamentale de trigonométrie sphérique

$$\cos. C = \frac{\cos. c - \cos. a . \cos. b}{\sin. a . \sin. b}$$

et cherchons à la résoudre pour le cas particulier dans lequel nous nous trouvons. L'inconnue que nous préférons chercher est

$$x = C - O = C - c$$

Le système de ces deux équations nous permettra d'éliminer C pour ne conserver que x. La seconde donne naissance à $C = c + x$ qui peut fournir une valeur de cos. C que nous égalerons à la première, ce qui donnera

$$\cos. c . \cos. x - \sin. c . \sin. x = \frac{\cos. c - \sin. \alpha \sin. \beta}{\cos. \alpha \cos. \beta}$$

en remarquant que α et β sont les compléments de a et b. L'élimination de C est ainsi obtenue et la formule qui en résulte, théoriquement applicable à tous les cas, ne sera d'un emploi commode que lorsque pour la simplifier, nous y aurons introduit l'hypothèse α et β très-petits. Cette hypothèse conduit naturellement à invoquer les développements en séries des lignes trigonométriques de ces angles, ainsi que de celles de x dont la petitesse est une conséquence de l'hypothèse ; le résultat indiquera même que x est d'un ordre de petitesse bien plus marqué que α et β, en sorte que pour simplifier les résultats et sans commettre d'erreur importante, il sera permis de négliger les

secondes puissances de x tout en conservant les mêmes puissances de α et β. On aura ainsi

$$\cos. c - x \sin. c = \frac{\cos. c - \alpha\beta}{\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)\left(1-\frac{\beta^2}{2}\right)} = (\cos. c - \alpha\beta)\left(1 + \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$$

en employant un artifice de calcul très-fréquemment mis en usage dans les calculs approximatifs, artifice dont l'explication très-simple est donnée au chap. II du liv. IV.

En effectuant les opérations indiquées et en négligeant les puissances supérieures à la seconde, des petites quantités employées, en arrive facilement à

$$x = \frac{\alpha\beta - \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)\cos. c}{\sin. c}$$

Mais on sait que pour un angle quelconque

$$\cos. c = \cos.^2 \tfrac{1}{2} c - \sin.^2 \tfrac{1}{2} c$$
$$\sin c = 2.\sin. \tfrac{1}{2} c \cos. \tfrac{1}{2} c$$
$$1 = \sin.^2 \tfrac{1}{2} c + \cos.^2 \tfrac{1}{2} c$$

on pourra donc écrire

$$x = \frac{\alpha\beta(\sin.^2 \frac{1}{2} c + \cos.^2 \frac{1}{2} c) - \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)(\cos.^2 \frac{1}{2} c - \sin.^2 \frac{1}{2} c)}{2 \sin. \frac{1}{2} c \cos. \frac{1}{2} c}$$

$$= \frac{\left(\alpha\beta + \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)\sin.^2 \frac{1}{2} c - \left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{2} - \alpha\beta\right)\cos.^2 \frac{1}{2} c}{2 \sin. \frac{1}{2} c \cos. \frac{1}{2} c}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2 \sin.^2 \frac{1}{2} c - \frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2 \cos.^2 \frac{1}{2} c}{2 \sin. \frac{1}{2} c \cos. \frac{1}{2} c}$$

$$= \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 \tang. \tfrac{1}{2} c - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 \cot. \tfrac{1}{2} c$$

L'emploi des développements en séries a supposé α, β et x exprimés en rapports ; mais habituellement ils sont donnés par les nombres de secondes qu'ils renferment, en sorte qu'il est nécessaire de passer des seconds aux premiers. On sait que généralement (liv. IV, chap. Ier), α en rapport $=$ α en secondes $\times \sin. 1''$.

Si donc nous désignons maintenant par α et β les angles à l'horizon exprimés en prenant la seconde pour unité, nous devrons

multiplier chacun des termes du second membre par $\sin.^2 1''$, et le résultat nous donnera l'expression de x en rapport, expression qui, multipliée par $\sin. 1''$, fournira la correction exprimée en secondes; ce qui donnera en définitive, par la suppression du facteur commun

$$x'' = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 \text{tang.} \tfrac{1}{2} c \sin. 1'' - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 \cot. \tfrac{1}{2} c \sin. 1''$$

En remplaçant les angles à l'horizon α et β, par $100^g - \delta$ et $100^g - \delta'$, la formule de réduction sera finalement

$$x = \left(\frac{200-(\delta+\delta')}{2}\right)^2 \sin. 1'' \text{ tang.} \tfrac{1}{2} c - \left(\frac{\delta-\delta'}{2}\right)^2 \sin. 1'' \cot. \tfrac{1}{2} c$$

Les deux termes sont toujours de signes contraires, par la raison que c étant plus petit que 200^g, $\frac{1}{2} c$ est moindre qu'un angle droit, et ses tangente et cotangente sont constamment positives: de plus, les quantités renfermées dans les parenthèses étant élevées au carré sont aussi positives.

On peut calculer les deux termes par logarithmes, ou employer des tables qui les donnent plus promptement. Dans la première de ces tables on entre avec l'angle observé, et l'on trouve sur la même ligne horizontale et dans deux colonnes verticales différentes, intitulées *tangente* et *cotangente*, deux nombres de secondes dont l'un est positif et l'autre négatif. Dans la seconde table, entrant avec les arguments $200-(\delta+\delta')$ et $\delta-\delta'$, on trouve successivement deux nouveaux nombres qui, placés sous les premiers et multipliés par eux, donnent deux produits que l'on retranche l'un de l'autre pour avoir x. On a également préparé des tables analogues aux précédentes, qui donnent les logarithmes des mêmes facteurs, ce qui est plus commode.

Cette formule, basée sur l'hypothèse de α et β très-petits, est applicable aux opérations géodésiques seules, pour lesquelles cette condition est satisfaite. Les réductions analogues faites pour les observations astronomiques doivent se faire par la formule qui donne la tangente de $\frac{1}{2}$ C directement.

Observons encore que les facteurs tang. $\frac{1}{2} c$, cot. $\frac{1}{2} c$, devenant très-grands lorsque c est proche de 200^g ou de 0, il y a lieu d'éviter ces deux sortes d'angles, pour lesquels l'approximation ne serait plus suffisante, dans certains cas. Ceci est, du reste, d'accord avec ce que nous avons dit relativement aux formes à donner aux triangles géodésiques.

88. Réduction au centre de la station. — Il est souvent impossible d'observer au centre même, C, de la station ; dans ce cas, l'angle observé en O doit subir une correction. Soient D et G les deux points qui comprennent l'angle ; les triangles IOD, GCI donneront

$$DIG = IDO + IOD \quad \text{et} \quad DIG = IGC + ICG$$

d'où

$$IDO + IOD = IGC + ICG$$

et par suite, en désignant par α et β les angles dont les sommets sont en D et G,

$$\alpha + O = \beta + C \quad \text{ou} \quad C - O = \alpha - \beta.$$

Dans le triangle CDO, on a la proportion

$$\sin. \alpha : \sin. (O + y) :: CO : CD :: r : d.$$

Le triangle CGO donne également

$$\sin. \beta : \sin. y :: CO : CG :: r : g.$$

Des deux proportions on tire les valeurs

$$\sin. \alpha = \frac{r \sin. (O + y)}{d} \quad \text{et} \quad \sin. \beta = \frac{r \sin. y}{g}$$

On voit que nous désignons par d et g, les distances aux objets de droite et de gauche, par r la distance au centre, et par y, l'angle observé entre le centre et l'objet de gauche. Si nous remarquons les valeurs de sin. α et sin. β, nous voyons qu'elles sont de très-petites quantités, puisque le numérateur commun r est divisé par des quantités d et g infiniment plus grandes que lui, et qu'en outre, ces fractions sont multipliées par des sinus qui toujours sont plus petits que l'unité, maximum de grandeur qu'ils puissent atteindre. Nous pourrons donc substituer les sinus aux angles dans la valeur de C—O qui deviendra

$$C - O = \frac{r \sin. (O + y)}{d} - \frac{r \sin. y}{g}$$

Le second nombre de cette équation donne l'angle en rapport ; pour avoir son expression en secondes, il faut le diviser par sin. 1", ce qui donne pour résultat final

$$C - O = \frac{r \sin. (O + y)}{d \sin. 1''} - \frac{r \sin. y}{g \sin. 1''}$$

En faisant varier la position de la station O, on verrait que la formule est encore applicable, pourvu qu'on ait soin de toujours compter l'angle y compris entre l'objet de gauche et le centre de la station, en allant du premier au second de droite à gauche. Pour l'obtenir, il est inutile de remettre le vernier à zéro : les observations multiples de l'angle étant terminées et la lunette supérieure se trouvant sur l'objet de gauche, on la fait mouvoir jusqu'à ce qu'elle soit dans la direction du centre. Le vernier indique alors $n\mathrm{O}+y$; n représentant le nombre de fois que l'angle a été répété.

L'angle y n'a pas, généralement, besoin d'être observé avec une grande rigueur, heureusement, car il est difficile de le prendre avec la lunette, par suite du rapprochement des deux points C et O ; mais r, par suite de la forme sous laquelle il entre dans la formule, demande à être mesuré très-exactement.

Pour obtenir ces deux quantités il faut avoir recours aux procédés qu'enseigne la géométrie plane ; quand l'irrégularité du signal C devient trop grande et par suite la recherche de r et y trop difficile, il vaut mieux abandonner le signal ou le faire modifier.

Les réductions au centre, beaucoup plus importantes, même pour des déplacements assez faibles, que les réductions à l'horizon, sont nulles quand des longueurs de côtés d et g deviennent infinies, c'est-à-dire, pour les observations astronomiques.

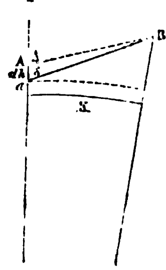
89. **Triangles provisoires.** — Les longueurs des côtés des triangles, d et g, entrent dans la formule de réduction au centre, et cependant le but de cette correction est de faire connaître les angles destinés à résoudre ces triangles ; il y a évidemment cercle vicieux. Mais si on observe que cette correction étant petite, il suffira toujours de la calculer par approximation, on reconnaît qu'on pourra, au lieu de d et g inconnus, mettre des valeurs approchées de ces côtés.

Dans ce but, on fait un calcul des triangles provisoires qu'on regarde comme plans et pour la résolution desquels on prend les angles recueillis sur le terrain, sans aucune correction. Ce calcul ne fait pas perdre beaucoup de temps, d'abord parce qu'on n'y emploie pas les parties proportionnelles fournies par les tables de logarithmes ; on se contente de prendre ceux-ci avec trois décimales ; en second lieu on le dispose comme sera plus tard ordonné le calcul des triangles définitifs qu'il abrégera

d'autant, et en fournissant de suite les deux premières décimales des logarithmes employés il empêchera quelquefois l'introduction d'erreurs grossières dans la transcription de ces deux premiers chiffres.

On se contente quelquefois de prendre ces longueurs de côtés sur un canevas graphique fait avec soin, au moyen des angles observés.

90. **Réduction au sommet du signal.** — En prenant les angles horizontaux on est souvent obligé de placer l'instrument en dehors de la verticale qui précise le signal, ce qui a donné naissance à la réduction au centre; de même, et plus souvent encore, en observant les distances zénithales, on est forcé de se déplacer dans le sens de la hauteur.



Il est nécessaire, dans certains cas du nivellement géodésique, de connaître la distance zénithale telle qu'elle aurait dû être observée du point A qui sera vu lui-même des autres stations telles que B.

Supposons que placé en *a au-dessous* de A d'une quantité $+dh$, on ait obtenu δ par l'observation du point B. La distance zénithale vraie Δ est évidemment liée à δ par la relation

$$\Delta = \delta + B$$

et pour une correction toujours très-petite, B peut être pris

$$\sin. B = B = \frac{dh \sin. \delta}{K}$$

Comme δ est toujours très-peu différent de 100^g, on prend habituellement, après réduction en secondes,

$$\Delta - \delta = \frac{dh}{K \sin. 1''}$$

Cette correction, comme les deux précédentes, est exprimée sous la forme additive. Elle ne peut, comme celles-ci, devenir soustractive que lorsqu'un des termes qui la composent vient lui-même à changer de signe, c'est-à-dire, lorsque dh change de signe dans son expression algébrique, ou lorsqu'il change de sens dans la nature. Ce cas se présente lorsqu'on stationne *au-dessus* du point de mire.

Contrairement à l'hypothèse admise en topographie, on

compte donc positivement les déplacements inférieurs. Cela tient à ce que ce cas est plus général en géodésie, tandis qu'en topographie ce déplacement a presque toujours lieu en sens inverse, c'est-à-dire que le centre de l'instrument est habituellement placé au-dessus du point nivelé. Dans ce cas dT est presque toujours la hauteur du pied même de l'instrument; dans celui qui nous occupe plus spécialement ici, dh est ordinairement une partie de la hauteur d'un édifice. Cette différence de convention tient aussi à la différence qui existe dans l'emploi de dT et dh; avec les signes qu'on leur a donnés, ils apparaissent tous deux sous la forme additive, dans les différences qui sont à calculer.

Quand cela peut se faire, il est bon de mesurer dh directement avec une corde tendue par un poids; mais très-souvent, comme lorsque le signal est le sommet d'une flèche de clocher, ce moyen n'est pas applicable. On a alors recours à un procédé trigonométrique trop simple pour que nous nous y arrêtions.

Dans tous les cas, il ne faut pas employer une valeur de dh qui soit considérable, d'abord parce que sa mesure sera d'autant plus inexacte qu'elle sera grande; et en second lieu parce que la formule de réduction n'est suffisamment approximative qu'autant que cette réduction est très-petite.

CHAPITRE IV

CALCUL DES TRIANGLES

91. Différents moyens de résolution. — Après avoir fait subir aux angles observés les corrections relatives aux réductions au centre et à l'horizon, ils appartiennent aux triangles définitifs que l'on doit calculer pour trouver les côtés; s'ils sont encore affectés d'erreur, elles ne sont dues qu'à l'incertitude du pointé et de la lecture, ainsi qu'à l'imperfection de l'instrument.

Si, plus tard, nous avons le moyen de calculer l'excès sphérique d'un triangle, nous le comparerons à l'excès de la somme des trois angles corrigés sur deux droits, et la différence sera la somme des erreurs dont nous venons d'indiquer les causes.

On a longtemps calculé les triangles géodésiques comme s'ils étaient plans. La terre n'étant pas plane, on commettait des erreurs d'autant plus grandes que les triangles étaient grands. On a eu quelques scrupules à cet égard, et on a cherché des moyens de résolution plus exacts. Nous verrons à la fin de ce chapitre qu'on a fini par revenir à l'assimilation première, mais en connaissant alors l'importance négligeable des erreurs commises.

Si la terre était sphérique, on calculerait les côtés des triangles par les formules de la trigonométrie sphérique, le plus habituellement par la formule des quatre sinus ; mais comme nous savons que ces formules ne donnent que des relations entre des angles, il serait nécessaire de transformer la base b de départ connue en mètres ; son expression en angle serait, en désignant par R le rayon de la sphère, $\frac{b}{R}$ en rapport ou $\frac{b}{R \sin. 1''}$ en secondes ; tous les résultats des calculs subséquents seraient les valeurs en secondes des côtés inconnus des triangles, valeurs dont la forme serait convenable pour le calcul des coordonnées. Il n'y aurait que pour la recherche des altitudes qu'on devrait les transformer inversement, afin de connaître les nombres de mètres renfermés dans les arcs terrestres qui les mesurent.

Mais la surface de la terre n'est pas sphérique ; elle se rapproche de celle d'un ellipsoïde de révolution. Dans cette circonstance, le premier moyen qui se présente à l'esprit est le suivant.

Les côtés géodésiques sont nécessairement toujours très-petits par rapport aux dimensions de la terre, et il en est par suite de même des surfaces des triangles par rapport à la surface terrestre. On peut donc, approximativement, les regarder isolément comme appartenant à une sphère qui se confondrait avec l'ellipsoïde pendant l'étendue de chaque triangle considéré, et les résoudre alors comme triangles sphériques.

Pour agir ainsi, il est d'abord nécessaire de rechercher quel serait le rayon qui conviendrait le mieux à chacune de ces sphères. Nous rappellerons à ce sujet, sommairement, quelques notions de géométrie.

Si en un point d'une courbe on mène la tangente et la normale, tout cercle dont le centre sera situé sur cette dernière sera tangent à la courbe. Ces cercles, en nombre infini, ont des rayons allant de *o* à l'infini, le premier répondant au point et le second à la tangente. Parmi eux, il en est un, dépendant de la forme particulière de la courbe, qui a avec celle-ci un contact plus intime que tous les autres ; on l'appelle *cercle osculateur*, et sa définition analytique est la suivante : il a avec la courbe trois points communs infiniment rapprochés, et par suite son équation a non-seulement même coefficient différentiel que celle de la courbe, propriété qui est commune à toutes les courbes tangentes, mais elle a encore même coefficient différentiel de second ordre. Quoi qu'il en soit de la définition d'un tel cercle, il existe et peut être considéré comme se confondant avec la courbe pendant une étendue assez notable, relativement à son rayon qui reçoit le nom de *rayon de courbure* de celle-ci.

Si de la considération d'une ligne nous passons à celle d'une surface, nous verrons que si en un point quelconque on suppose une suite de sections planes, déterminées par des plans normaux, chacune de celles-ci aura un cercle osculateur dont le rayon pourra être regardé comme celui d'une sphère. Les sphères ainsi obtenues seront plus intimement tangentes à la surface considérée que toutes les autres ayant seulement leurs centres sur la normale, et le contact sera mieux établi, pour chacune d'elles, dans le sens de la section pour laquelle son rayon sera celui du cercle osculateur de cette section.

Si nous appliquons les considérations précédentes à l'ellipsoïde de révolution supposé convenir à la surface terrestre, nous verrons que parmi toutes les sphères osculatrices dans les divers sens, il en existe deux plus importantes que les autres, et dont la recherche analytique est assez simple. Ce sont celles dont les rayons sont ceux des cercles osculateurs au méridien et au perpendiculaire. L'un est le plus petit et l'autre le plus grand des rayons relatifs aux diverses sections planes passant par le point considéré. Si la terre était sphérique, les deux rayons seraient identiques ; il n'en est pas tout à fait ainsi, mais l'ellipsoïde terrestre étant très-peu aplati, on peut dire que chacune de ces sphères se confondant avec la surface de l'ellipsoïde pendant une certaine étendue, pourra être regardée comme contenant la surface d'un triangle géodésique. La sphère osculatrice dans le sens du parallèle, constante pour toute l'étendue de ce parallèle,

ayant dans les autres sens, et généralement, un contact plus intime que celle qui est osculatrice dans le sens du méridien, serait, pour la résolution des triangles, préférée à cette dernière. Son rayon est celui de la grande normale du parallèle.

Si tous les triangles du réseau géodésique se trouvaient sous le même parallèle, c'est-à-dire, s'ils avaient même latitude moyenne, il suffirait pour leur résolution de les considérer comme situés sur la sphère appartenant à cette latitude, et le calcul se ferait simplement comme nous l'avons indiqué pour l'hypothèse de la terre sphérique. Mais il n'en est pas ainsi, et situés sous des latitudes différentes, ils devraient être regardés comme appartenant à des sphères de rayons différents. De là naîtrait une grande complication dans les calculs. Il faudrait, en effet, après avoir réduit un côté en secondes, sur une sphère, calculer un deuxième côté comme appartenant à la même surface, puis rechercher la nouvelle valeur en secondes de l'angle qu'il soustendrait au centre d'une seconde sphère convenable pour la résolution du triangle suivant, c'est-à-dire, multiplier la première valeur par le rapport inverse des rayons. Ceux-ci dépendant des latitudes moyennes des deux triangles, on voit qu'il aurait été nécessaire d'effectuer d'abord un calcul approximatif de ces latitudes, en supposant tous les triangles situés sur la même sphère.

Cette complication de calculs serait encore aggravée par une crainte d'erreur. En effet, un côté a serait fourni par un premier triangle, sous la forme $\frac{a}{r}$, et il devrait être employé pour la résolution d'un nouveau triangle sous la nouvellle forme $\frac{a}{r'}$ ce qui nécessiterait la multiplication du premier résultat par $\frac{r}{r'}$ rapport inverse des rayons des sphères convenables. La forme de ce facteur pouvait en effet faire craindre que des erreurs commises dans l'appréciation des rayons n'eussent une influence notable sur les résultats.

Le théorème de Legendre, dont nous nous occuperons plus tard, fait voir qu'il n'en est pas ainsi, et il autorise même à résoudre les triangles comme plans, mais il n'était pas connu.

Pour éviter cette cause d'erreur illusoire et pour éviter également les complications du calcul résultant de la variation des rayons des sphères, on a proposé deux moyens. Nous dirons

d'abord quelques mots du procédé de Delambre, parce qu'il a été employé dans la mesure de l'arc du méridien de Dunkerque à Perpignan qui a servi à déterminer le mètre.

Ce procédé substitue à la résolution du triangle sphérique celle du triangle rectiligne formé par les cordes des arcs qui déterminent le premier.

Soient a, b, c les longueurs métriques de ces côtés, a', b', c' les cordes correspondantes. Il est évident que si r désigne le rayon de la sphère qui peut être regardée comme contenant le triangle, on a $a = 2r \sin. \frac{1}{2}\frac{a}{r}$ et de même pour b' et c'. L'angle $\frac{a}{r}$ étant toujours très-petit en géodésie, on peut écrire

$$a' = 2r\left(\frac{a}{2r} - \frac{a^3}{2.3.8r^3}\right), \text{ d'où } a - a' = \frac{a^3}{24\, r^2}$$

Le côté du triangle rectiligne substitué variera en réalité avec le rayon de la sphère substituable à l'ellipsoïde, c'est-à-dire, variera suivant qu'on le considérera comme appartenant à un premier triangle ou à un second, mais cela assez peu, en raison de la forme de la fonction, pour qu'on puisse regarder le rayon comme constant, ce qui n'avait pas lieu dans le premier procédé indiqué. On évitera donc ainsi les complications du calcul qui résultaient de cette variation du rayon.

Si A, B, C désignent les angles du triangle sphérique, A', B', C' ceux du triangle des cordes, les premiers seront les réductions à l'horizon, des seconds dont les côtés auront des inclinaisons $\frac{b}{2r}$, $\frac{c}{2r}$, $\frac{a}{2r}$. On pourra donc déterminer A', B', C' par la formule du § 87, formule qui renferme, il est vrai, les angles $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$ dont deux sont inconnus dans la résolution des triangles géodésiques, mais qui, en raison de la petitesse de la correction, n'exige que la connaissance approchée de ces angles. Cette connaissance approchée s'obtiendra par une première résolution du triangle considéré comme plan, et par l'emploi d'une valeur approchée et constante de r. Au moyen des données A, B, C, b, il sera donc possible de trouver A', B', C', b', et par suite de calculer a' et c', qui feront connaître a et c par la formule $a = a' + \frac{a^3}{24.r^3}$ dans laquelle on remplacera, sans erreur sensible, la correction $\frac{a^3}{24.r^3}$ par $\frac{a'^3}{24.r^3}$

La dernière méthode proposée, de beaucoup préférable, et la seule en usage actuellement, substitue au triangle sphérique un triangle rectiligne ayant mêmes longueurs de côtés. Elle a comme la première l'avantage de ne pas exiger la connaissance exacte du rayon de la sphère.

Elle s'appuie sur un théorème dont nous allons donner la démonstration.

92. **Théorème de Legendre.** — Ce théorème, applicable seulement aux triangles sphériques dont les côtés linéaires sont très-petits par rapport au rayon de la sphère, ou dont les angles au centre sont très-petits, a pour but de substituer à la résolution d'un tel triangle, celle d'un triangle plan ayant mêmes longueurs de côtés.

Evidemment les angles du premier devront subir une modification pour pouvoir représenter ceux du second, mais heureusement cette modification est très-simple.

Soient a, b, c les côtés linéaires communs, $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$ seront les côtés trigonométriques du triangle sphérique, ou les angles au centre de la sphère sous-tendus par les côtés linéaires a, b, c.

Soient encore

A, B, C les angles du triangle sphérique, A′, B′, C′ ceux du triangle plan.

La nature même des deux triangles soumet leurs éléments aux deux formules fondamentales des deux trigonométries,

$$\cos. A = \frac{\cos. \frac{a}{r} - \cos. \frac{b}{r} \cos. \frac{c}{r}}{\sin. \frac{b}{r} \sin. \frac{c}{r}}, \qquad \cos. A' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Pour connaître la relation qui existe entre A′ et A, il n'y aurait qu'à éliminer un des trois côtés, et A′ serait fourni en fonction de A et des deux autres côtés. Ainsi fait avec toute rigueur, le calcul conduirait à des résultats applicables à des triangles quelconques, mais ces résultats seraient incompréhensibles, ou tout au moins inapplicables.

Profitons de l'hypothèse que nous avons admise en commençant, pour résoudre la question d'une manière seulement approximative, il est vrai, mais d'une application facile.

Cherchons, au lieu de A′, la différence $A - A' = x$ que l'hy-

pothèse admise rend très-petite. Nous aurons une nouvelle équation

$$\cos. A = \cos. (A' + x) = \cos. A' \cos. x - \sin. A' \sin. x$$

qui, combinée avec les deux premières, permettra l'élimination de A et de A'.

Les angles $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$ sont toujours excessivement petits en géodésie, x est lui-même encore beaucoup plus petit, ainsi que cela ressortira du résultat auquel nous arriverons. Nous pourrons donc invoquer les développements en séries des lignes trigonométriques de ces angles, et négliger les cinquièmes puissances des angles $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$, en omettant les secondes puissances de x beaucoup plus petit.

L'approximation obtenue sera suffisante, et elle ne pourrait être ni plus grande ni plus petite, sans que les résultats perdissent beaucoup de leur clarté.

En égalant les deux valeurs de cos. A, en appliquant ce que nous venons de dire et en négligeant chaque fois qu'elles se présenteront les puissances des termes analogues à $\frac{a}{r}$ supérieures à la quatrième, nous aurons successivement

$$\cos. A' - x \sin. A' = \frac{\left(1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a^4}{24r^4}\right) - \left(1 - \frac{b^2}{2r} + \frac{b^4}{24r^4}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2r} + \frac{c^4}{24r^4}\right)}{\left(\frac{b}{r} - \frac{b^3}{6r^3}\right)\left(\frac{c}{r} - \frac{c^3}{6r^3}\right)}$$

$$= \frac{1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a^4}{24r^4} - 1 + \frac{b^2}{2r^2} + \frac{c^2}{2r^2} - \frac{b^4}{24r^4} - \frac{c^4}{23r^4} - \frac{b^2c^2}{4r^4}}{\frac{bc}{r^2} - \frac{b^3c}{6r^4} - \frac{bc^3}{6r^4}}$$

$$\cos. A' - x \sin. A' = \frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2r^2} - \frac{b^4+c^4-a^4+6b^2c^2}{24r^4}}{\frac{bc}{r^2}\left(1 - \frac{b^2}{6r^2} - \frac{c^2}{6r^2}\right)}$$

En usant de l'artifice de calcul très-simple déjà mentionné (voir chap. II, liv. IV), puis effectuant les multiplications et les simplifications qui se présentent naturellement, on aura

$$\cos. A' - x \sin. A' = \left\{ \frac{b^2+c^2-a^2}{2r^2} - \frac{b^4+c^4-a^4+6b^2c^2}{24r^4} \right\} \frac{r^2}{bc} \left(1 + \frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)$$

$$=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-\frac{b^4+c^4-a^4+6b^2c^2}{24\,bcr^2}+\frac{(b^2+c^2)(b^2+c^2-a^2)}{12\,bcr^2}$$

$$=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-\frac{b^4+c^4-a^4+6b^2c^2}{24\,bcr^2}+\frac{b^4+c^4+2b^2c^2-a^2b^2-a^2c^2}{12\,bcr^2}$$

$$=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}{24\,bcr^2}$$

Exprimons dans ce résultat que le triangle abc A′ est rectiligne, au moyen de l'emploi de la formule que nous n'avons pas encore utilisée,

$$\cos.\ A'=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

et nous aurons

$$x \sin.\ A'=\frac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{24\,bcr^2}$$

Si on cherchait de même $x'=\mathrm{B}-\mathrm{B}'$ $x''=\mathrm{C}-\mathrm{C}'$, la symétrie en a, b, c du numérateur conduirait à

$$\frac{x \sin.\ A'}{a}=\frac{x' \sin.\ B'}{b}=\frac{x'' \sin.\ C'}{c}$$

et comme $\frac{\sin.\ A'}{a}=\frac{\sin.\ B'}{b}=\frac{\sin.\ C'}{c}$, on conclurait que

$$x=x'=x''=\frac{1}{3}\,\varepsilon$$

si ε désigne l'excès sphérique du triangle.

Pour résoudre un triangle géodésique, il suffira donc de le regarder comme plan et de retrancher de chacun de ses angles le tiers de son excès sphérique.

Recherche directe de l'excès sphérique. — La manière générale de trouver l'excès sphérique qui consiste à retrancher 200^g de la somme des trois angles, ne conduirait pas, en géodésie, à un résultat exact, parce que les angles, nécessairement observés, sont très-souvent entachés d'erreurs plus grandes que cet excès sphérique. Il est utile, pour apprécier la somme des trois erreurs commises, de connaître, par un moyen indépendant d'elles, la valeur exacte ou du moins suffisamment approchée de cet élément.

Le théorème de Legendre va encore nous conduire à ce résultat. Reprenons la dernière formule donnant la valeur de x

$$x \sin. A' = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{24\, bcr^2}$$

et cherchons la signification de son second membre, au moyen de l'équation primitive

$$\cos. A' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

qui donne

$$\sin.^2 A' = 1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2 = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4\, b^2c^2}$$

La combinaison de cette équation et de celle que nous avons transcrite conduit enfin à

$$x \sin. A' = \sin.^2 A' \frac{bc}{6r^2} \text{ et par suite } x = \frac{1}{3}\,\frac{bc \sin. A'}{2r^2}$$

et après réduction en secondes, à $\varepsilon = \dfrac{bc \sin. A'}{2r^2 \sin. 1''}$

En outre de l'application dont nous nous occuperons bientôt, cette valeur de l'excès sphérique conduit à la remarque suivante.

Le triangle plan a pour mesure de sa surface $S = \dfrac{bc \sin. A'}{2}$, en sorte que $\varepsilon = \dfrac{S}{r^2 \sin. 1''}$. D'autre part (liv. IV, chap. Ier), la surface du triangle sphérique est mesurée par $T = r^2\, \varepsilon \sin. 1''$; d'où il suit $\varepsilon = \dfrac{T}{r^2 \sin. 1''}$ et comme conséquence $S = T$. Les deux triangles comparés, de même longueur de côtés, ont donc même surface dans les limites d'approximation du théorème de Legendre.

Observons encore que ces limites d'approximation ne sont pas aussi exactes qu'on serait porté à le croire par suite du maintien des quatrièmes puissances des rapports petits $\frac{a}{r}\,\frac{b}{r}\,\frac{c}{r}$. Le résultat obtenu ne contient en effet que le produit $\frac{b}{r}\,\frac{c}{r}$, c'est-à-dire, une seconde puissance de ces rapports; les troisièmes qui n'y figurent pas, y auraient apparu si on avait poussé l'approximation

plus loin. Ce théorème n'est donc exact qu'autant que ces troisièmes puissances sont assez petites pour pouvoir être négligées.

Recherche de la somme des trois erreurs d'observation. — Il n'est pas possible de trouver l'erreur commise sur chaque angle observé, sans quoi on la ferait disparaître ; mais on peut tirer de ce qui précède un moyen de connaître la somme de celles qui sont commises sur les trois angles d'un même triangle du premier ou du deuxième ordre.

Soient en effet $A+\alpha$, $B+\beta$, $C+\gamma$ ces trois angles entachés des erreurs α, β, γ; l'excès sphérique vrai est $\varepsilon = A + B + C - 200^g$, et ε' celui qui résulterait de l'emploi des angles erronés, lui est lié de la manière suivante

$$\varepsilon' = A+\alpha+B+\beta+C+\gamma-200^g = \varepsilon+(\alpha+\beta+\gamma).$$

Si donc on peut connaître la vraie valeur de l'excès sphérique, il suffit de la comparer par différence à celle que fournit directement la somme des trois angles observés, pour en conclure la somme des trois erreurs d'observation.

Ce renseignement ne conduit à une certitude qu'autant qu'il accuse l'inexactitude des observations ; dans le cas contraire, il constate seulement que cette inexactitude n'est pas certaine, car les erreurs commises ont pu avoir des signes opposés qui ont établi des compensations dans leur somme.

Mais pour obtenir cette vérification incomplète, il faut connaître la vraie valeur de l'excès sphérique. Celui-ci est fourni, il est vrai, par la formule précédemment trouvée

$$\varepsilon = \frac{bc \sin. A'}{2r^2 \sin. 1''}$$

Mais presque tout est inconnu dans cette expression ; la résolution du triangle doit être une conséquence de la connaissance d'un côté et des trois angles (ou de deux pour le troisième ordre). Soit b ce côté connu, c et A' sont à trouver, et r le rayon de la sphère qui convient le mieux pour le lieu des opérations est inconnu. Heureusement ici, comme dans beaucoup d'autres circonstances, ε est très-petit, et on peut se contenter de l'obtenir par approximation. Ainsi, on prendra pour c la longueur du côté fournie par les triangles provisoires, on substituera l'angle observé A à l'angle A' du triangle plan, et enfin on adoptera pour r une valeur approchée quelconque.

On pourra donc faire la comparaison dont nous avons parlé et on n'admettra que les triangles pour lesquels la différence des deux résultats ne dépassera pas 15″ à 20″. On dit dans ce cas que le triangle ferme bien.

Le résultat, obtenu pourtant par l'emploi de quatités toutes un peu erronées, sera suffisamment exact ; ainsi un des plus grands triangles géodésiques employés, triangle qui rejoint les îles Baléares à l'Espagne, et dont les côtés ont environ 35 lieues, a un excès sphérique de 39″,08, et le calcul appliqué comme nous venons de l'indiquer a fourni 38″,89 avec une erreur de 0″,19 complétement négligeable.

93. Résolution numérique des triangles. — Pour trouver, d'après la méthode de Legendre, les éléments angulaires du triangle plan substitué au triangle sphérique A.B.C, nous avons vu qu'il fallait retrancher de chacun de ceux du premier le tiers de l'excès sphérique ε calculé directement, ce qui fournissait

$$A' = A - \frac{1}{3}\varepsilon. \qquad B' = B - \frac{1}{2}\varepsilon. \qquad C' = C - \frac{1}{3}\varepsilon$$

Mais les angles vrais A, B, C ne sont pas donnés exactement par l'observation qui les fournit sous la forme erronée $A + \alpha$, $B + \beta$, $C + \gamma$, en sorte qu'en agissant comme il vient d'être dit, on laisserait subsister intégralement sur chacun d'eux l'erreur qui lui est propre.

Premier et deuxième ordres.—On préfère alors, sans que l'avantage en soit bien évident pour tous les cas, faire disparaître l'erreur totale de la somme des trois angles, en la répartissant par tiers sur chacun d'eux, en sorte que les deux modifications se font simultanément en prenant

$$A' = A + \alpha - \frac{1}{2}\varepsilon' = A + \alpha - \frac{1}{3}\varepsilon - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = A - \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{2}{3}\alpha - \frac{\beta+\gamma}{3}$$

et de même pour les deux autres.

Troisième ordre. — Lorsqu'on ne connaît que les deux angles à la base, on ne peut pas opérer ainsi, et il faut laisser subsister les erreurs α et γ telles qu'elles proviennent de l'observation des angles A et C.

On peut se demander si l'une des méthodes est beaucoup plus exacte que l'autre.

Pour le premier ordre l'expression type de l'erreur commise sur la valeur d'un angle du triangle plan, sera $\frac{2}{3}\alpha - \frac{\beta+\gamma}{3}$ qui atteindra son maximum lorsque β et γ seront de signe contraire à celui de α, et lorsque chacun de ceux-ci atteindra le maximum absolu possible dans la mesure d'un angle. Soit α ce maximum absolu ; celui de l'erreur sera $\frac{4}{3}\alpha$.

Dans le troisième ordre les angles A′ et C′ devraient être

$$A' = A - \frac{1}{3}\varepsilon \qquad C' = C' - \frac{1}{3}\varepsilon$$

et on sera forcé de les prendre sous la forme

$$A' = A + \alpha - \frac{1}{3}\varepsilon \qquad C' = C + \gamma - \frac{1}{3}\varepsilon$$

en erreur de α et β seulement. Mais le troisième angle B devrait être conclu par

$B' = 200^g - A - C - \frac{2}{3}\varepsilon$ et on sera forcé de l'obtenir par

$$B' = 200^g - A - C - \alpha - \gamma - \frac{2}{3}\varepsilon$$

avec une erreur $-(\alpha+\gamma)$ dont le maximun pourra atteindre 2α.

Il y a donc effectivement avantage à opérer comme on le fait pour les points du premier et du deuxième ordre, mais cet avantage n'est pas très-important. Observons néanmoins que pour qu'il n'y ait que cette différence de $\frac{4}{3}\alpha$ à 2α dans l'exactitude des résultats, il faut que dans le troisième ordre on ait calculé directement l'excès sphérique. Il est bien vrai que le même calcul a pu être fait, dans les deux autres ordres, mais seulement pour obtenir une vérification qu'on cherche rarement d'une manière complète. En effet, par suite de la petitesse de l'excès sphérique, il suffit, pour savoir si le triangle ferme bien ou, en d'autres termes, si on n'a pas commis de graves erreurs d'observation, de voir si

$$\varepsilon' = A + \alpha + B + \beta + C + \gamma - 200^g = \varepsilon + (\alpha + \beta + \gamma)$$

est lui-même petit.

Le troisième ordre exigerait, au contraire, pour chaque triangle, ce calcul direct de l'excès sphérique. On préfère avec raison laisser subsister le maximum d'erreur sous la forme $2\alpha + \frac{2}{3}\varepsilon$ en prenant simplement $B' = 200^g - A - C - \alpha - \gamma$, ce qui a très-peu d'inconvénient par suite de l'extrême petitesse de ε dans le triangle du troisième ordre dont la surface est très-petite.

En résumé, on traite les triangles des trois ordres comme s'ils étaient plans en ramenant toujours la somme de leurs angles à former 200^g. Ainsi se trouve vérifié ce que nous avons annoncé en commençant ce chapitre.

Le thécrème de Legendre a eu le mérite de prouver qu'on avait raison de traiter les triangles géodésiques comme plans, et il a fourni en plus le moyen de contrôler jusqu'à un certain point, et dans les cas importants, l'exactitude des observations.

Pour le cas qui se présente le plus souvent, celui des points du troisième ordre, ce contrôle fait défaut par suite de l'ignorance du troisième angle. Pour le remplacer et afin d'éviter des erreurs qui pourraient même avoir une très-grande importance, comme, par exemple, cela se présenterait si des deux stations on avait visé deux points différents en croyant viser le même, on n'admet que des points qui, observés de trois stations, ont donné naissance à deux triangles ayant un côté commun dont les deux valeurs calculées sont trouvées à peu près identiques. On tolère souvent une différence de 2^m dans les longueurs de ces côtés de vérification.

CHAPITRE V

FIGURE DE LA TERRE

Les côtés des triangles géodésiques étant déterminés, il y a lieu d'appliquer le canevas qui en résulte à un système de projection ou de développement de la surface terrestre, choisi dans le but de produire le moins de déformation possible. Pour arriver à ce résultat, il est nécessaire de transformer ceux qui ont été obtenus jusqu'ici, en coordonnées applicables à ce système, et auparavant il est indispensable de choisir celui-ci.

Pour satisfaire à ces deux conditions, il faut évidemment savoir quelle est la forme de la surface sur laquelle est placé ce canevas, surface qui devra ensuite être développée suivant des règles qui résulteront de sa connaissance.

Rappelons, avant de nous occuper de ce sujet, ce qu'on entend par figure de la terre. Cette figure est celle de la surface continue qui serait perpendiculaire à toutes les verticales de tous les lieux de la terre; c'est évidemment celles qu'affecterait une surface liquide en repos. Parmi toutes les surfaces satisfaisant à cette condition et situées à des hauteurs diverses, celle qui a été choisie pour surface de projection géodésique et topographique, est celle des eaux moyennes de la mer.

Avant de rechercher par des mesures géodésiques directes quelles sont la forme et les dimensions de la terre, nous passerons en revue, très-succinctement, les divers procédés employés à ce sujet, procédés dont les résultats, quoique différant un peu des résultats géodésiques, corroborent cependant ceux-ci.

Différentes observations, telles que la diminution de la pesanteur à l'équateur, les perturbations du mouvement de la lune, ont porté à croire que la terre n'était pas réellement une sphère. Des essais basés sur des principes divers ont, en conséquence, été tentés pour arriver à la connaissance de la forme réelle.

95. **Figure théorique.** — L'origine ignée de la terre semble aujourd'hui hors de doute. La matière chaotique, d'abord

répandue dans l'univers à une température telle que tous les corps s'y trouvaient à l'état gazeux, s'est condensée, par suite d'un refroidissement dont la cause est inconnue, de manière à former quelques masses liquides qui par leur attraction sur les matières encore gazeuses ont formé des atmosphères hétérogènes. La continuation du refroidissement condensant toujours certaines des parties de ces atmosphères, les masses liquides ont augmenté, et leur attraction suivant la même marche a groupé autour d'elles de nouvelles parties gazeuses qui à leur tour sont venues augmenter les masses liquides. Une nouvelle diminution de température, sensible surtout à la surface rayonnante, a pu amener à l'état solide les parties extérieures de la masse, et produire la couche qui entoure (à l'exception des comètes) tous les corps qui gravitent dans notre système solaire. L'intérieur, mis à l'abri du rayonnement, en grande partie du moins, par la faible conductibilité des matières composant l'enveloppe solide, a pu rester à l'état liquide, et cela en masse d'autant plus grande proportionnellement que la masse totale du corps est plus grande elle-même. Le noyau central a même pu conserver l'état gazeux, mais avec une condensation telle que l'attraction moléculaire détruit la force expansive.

Telle est l'origine tout au moins très-probable des planètes, et en particulier de notre terre.

Au moment où la terre était liquide, il a dû s'établir une forme dépendant des forces appliquées aux différentes parties composant cette planète, et cette forme a persisté lorsque l'enveloppe solide s'est constituée.

Les forces agissant sur chaque molécule étaient la pesanteur et la force centrifuge résultant du mouvement de rotation diurne. Celui-ci s'explique par la différence de vitesses des molécules attirées vers le premier noyau terrestre, différence résultant de celle des distances à un premier centre de rotation ; ces molécules projetées sur ce noyau ont dû y arriver avec leurs vitesses acquises plus grandes à l'extérieur, plus petites à l'intérieur, de façon à imprimer à celui-ci, par effets successifs, une rotation autour de son centre particulier, de même sens que la rotation générale primitive exécutée autour du centre général du système. Si, à l'état liquide, la terre avait conservé la forme d'une sphère, chacun des points de sa surface aurait été soumis à la même force attractive, tandis que la force centrifuge aurait été variable. La composante verticale de cette force, variable elle-

même et dirigée en sens inverse de la pesanteur, aurait diminué celle-ci d'une manière différente suivant la latitude. Pour que l'équilibre existe dans une sphère liquide, il est évident à priori qu'il doit y avoir identité entre les actions exercées sur tous les rayons. Il ne pouvait donc pas y avoir équilibre sur la sphère terrestre; par suite, cette forme n'a pas pu se maintenir, et elle a été remplacée par une autre satisfaisant aux conditions d'équilibre. Les plus éminents géomètres, Huyghens, Newton, Stirling, Clairaut, ont cherché à apprécier ces conditions d'équilibre; Euler, d'Alembert, Lagrange et Laplace ont perfectionné leurs travaux en employant des méthodes de calcul inconnues aux premiers. Ils sont tous arrivés à ce résultat: *la terre est un ellipsoïde de révolution décrit autour de la ligne des pôles qui sert de petit axe à l'ellipse génératrice.* Mais ils ont différé sur la forme de cette ellipse, en lui attribuant des aplatissements dont les valeurs extrêmes sont $\frac{1}{578}$ et $\frac{1}{230}$.

La variété des résultats ainsi obtenus provient du plus ou moins d'exactitude apportée dans l'estimation du mode d'action de la gravité, et dans l'hypothèse relative à la constitution, en densité, du noyau liquide. Les suppositions faites à cet égard ont toutes admis, soit l'homogénéité de la masse, soit tout au moins la similitude de distribution des densités sur tous les méridiens. Rien ne prouvant qu'il en soit ainsi, surtout dans l'enveloppe solide. non-seulement l'aplatissement qui précise la forme de l'ellipse n'est pas exactement déterminé par cette méthode, mais encore la forme même d'une surface de révolution, conséquence de cette similitude de distribution de densité, n'est pas suffisamment reconnue propre à représenter la surface terrestre.

96. **Observations du pendule.** — Un pendule écarté de la verticale redescend vers celle-ci, sollicité à chaque instant par la pesanteur. Arrivé à la verticalité, il continue sa marche en s'en éloignant alors, par suite de la vitesse acquise, vitesse qui est un résultat des actions successives de la gravité exercée pendant la marche descendante. Le mouvement se continue ainsi alternativement jusqu'à ce qu'il soit détruit par les résistances étrangères.

La marche de ce pendule dépend donc de l'intensité de la pesanteur au lieu de l'observation. Celle-ci résultant de la longueur du rayon terrestre correspondant, et de la force centrifuge

qu'on sait estimer au moyen de la vitesse de rotation et de la longueur approximative de ce rayon, la marche du pendule peut servir à déterminer d'abord l'intensité de la gravité, et conséquemment la longueur du rayon.

Le calcul prouve que les temps des oscillations entières très-petites d'un pendule simple sont donnés par l'équation

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

l, étant la longueur du pendule et g l'action de la gravité au lieu de l'observation. Le pendule simple serait celui qui oscillerait dans le vide, au moyen d'un fil inextensible d'un poids nul, et qui serait composé d'un point infiniment dense.

De nombreuses expériences faites sur un pendule composé ou ordinaire, ramenées par le calcul aux résultats qui répondraient au pendule simple, ont donné pour celui-ci des systèmes de valeurs telles que l' et t', jointes par la relation ci-dessus énoncée.

Si on désigne par λ la longueur que devrait avoir le pendule simple pour battre la seconde, au même lieu d'observation, c'est-à-dire avec une même valeur de g, on devra avoir.

$$1'' = \pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}}$$

D'où, en divisant,

$$\lambda = \frac{l'}{t'^2}$$

On a pu ainsi conclure pour les différentes observations réellement faites, les longueurs du pendule simple qui battrait la seconde de temps moyen. C'est ainsi qu'à Paris on a trouvé pour la longueur réduite au niveau de la mer

$$l = 0^m,993855.$$

Remarquons, en passant, que cette connaissance conduit directement à celle de g, qui est, on le sait, le double de l'espace que parcourt un corps abandonné à l'action de la pesanteur, pendant la première seconde de chute ($e = \frac{1}{2} gt^2$). En effet, de l'équation $1'' = \pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}}$ on tire

$$g = \lambda\pi^2,$$

ce qui donne pour Paris, au niveau de la mer,

$$g = 0^m,993855 \times \overline{3,1415...}^2 = 9^m,80896.$$

Supposons maintenant les observations faites en un certain nombre de points différents pour lesquels g, g', g''...., désignent les valeurs particulières de g, répondant aux longueurs $\lambda, \lambda', \lambda''$... du pendule simple battant la seconde, en vertu de l'équation $1'' = \pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}}$, on a évidemment

$$g : g' : g'' : \ldots . :: \lambda : \lambda' : \lambda'' \ldots .$$

La comparaison des longueurs du pendule, répondant à des latitudes connues, a fait voir qu'abstraction faite des erreurs possibles d'observation, l'intensité de la pesanteur croît de l'équateur au pôle d'une quantité proportionnelle au carré du sinus de la latitude. Ce résultat est précisément celui auquel on arrive en supposant la terre un ellipsoïde de révolution, et sa densité croissant de la surface au centre.

On est donc fondé à admettre la forme elliptique pour le méridien terrestre. L'aplatissement de l'ellipse génératrice résultant de la force centrifuge à l'équateur dont l'expression est connue, ainsi que des intensités de la gravité au pôle et à l'équateur, a pu être déterminé. Sa valeur moyenne la plus probable est $\frac{1}{319}$.

97. **Perturbations lunaires.** — Si la terre est renflée à l'équateur, son action sur la lune tendra à rapprocher le plan de l'orbite de cet astre du plan de l'équateur. C'est, en effet, ce qui a lieu. Ce phénomène dépendant de l'aplatissement peut servir à le déterminer.

Dans le cas où l'on supposerait la terre sphérique, on arriverait par le calcul, en partant de données observées à une époque, à certaines valeurs des éléments lunaires pour une autre époque. Ces résultats différeraient de ceux que fournirait une nouvelle observation.

Par l'hypothèse de différents aplatissements, on trouverait des résultats variables dont un seul fournirait des éléments lunaires conformes à ceux de l'observation. Cet aplatissement convenable a été trouvé égal à $\frac{1}{305}$.

On peut de même employer à cette recherche la préces-

sion et la nutation qui dépendent, toutes deux, de l'attraction du soleil et de la lune sur les ménisques terrestres.

Ces différents moyens conduisent au même résultat $\frac{1}{305}$; mais observons cependant qu'ils ne pourraient pas décider seuls la question relative à la figure de la terre ; ils prouvent seulement que si cette figure est celle d'un ellipsoïde de révolution, l'ellipse qui l'engendre à un aplatissement égal à $\frac{1}{305}$. Mais cette forme ellipsoïdale générale étant constatée, approximativement, par d'autres procédés, la valeur numérique fournie par les observations astronomiques en devient très-probable.

Nous verrons plus loin que la figure de la terre n'est pas assez régulière pour pouvoir être assimilée partout à la même surface de révolution ; en sorte qu'un aplatissement convenable pour la représentation de la surface terrestre en un certain lieu ne convient plus également bien pour un autre. Le résultat des observations astronomiques $\frac{1}{305}$ est en quelque sorte la moyenne de toutes ces valeurs, et il doit être choisi pour tout point de la terre, dont l'aplatissement local n'a pas été déterminé par des observations directes.

98. Figure de la terre déduite d'opérations géodésiques. —Le méridien céleste d'un point de la surface terrestre est le plan qui, passant par ce point, contient la ligne des pôles.

Si la terre est un solide de révolution, toutes ses verticales rencontrent cette ligne, et, par conséquent, un méridien céleste coupe sa surface suivant une ligne plane dont il renferme toutes les verticales; cette ligne, qui est la génératrice du solide, est ce qu'on désigne sous le nom de méridien terrestre.

Mais il n'en sera plus de même, si la forme de la terre est irrégulière. Dans ce cas, le méridien terrestre sera le lieu de tous les points de la surface dont les verticales seront parallèles à un même méridien céleste, et la ligne ainsi déterminée sera à double courbure.

C'est en réalité ce qui a lieu; mais en admettant la première hypothèse, on ne s'écarte pas beaucoup de la réalité, et on a l'avantage de pouvoir appliquer le calcul aux lignes tracées sur la surface terrestre, ce qu'on ne pourrait pas faire si on la supposait irrégulière.

On se convaincra que la terre n'est pas un solide de révolution, quand, ayant admis cette hypothèse et cherchant à conclure la forme de la courbe génératrice, on ne pourra pas arriver à une

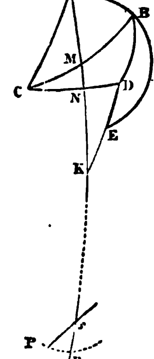
figure unique résultant d'observations multipliées faites avec soin, et en faisant la part des erreurs inévitables. Ce résultat sera du reste d'accord avec ceux obtenus par la comparaison des longueurs du pendule battant la seconde.

Mais cependant on reconnaîtra que toutes les lignes (ellipses plus ou moins allongées) que l'on obtiendra par l'étude des diverses observations géodésiques, s'écartent assez peu les unes des autres pour qu'on puisse en conclure une forme moyenne. Cette forme, probablement inexacte pour représenter chacune des sections de la terre dont les verticales sont parallèles à un méridien céleste, se rapprochera pourtant de chacune d'elles assez pour qu'on puisse l'adopter à priori, pour un lieu quelconque.

Nous partirons donc de cette hypothèse, *la terre est un solide de révolution*, pour rechercher, au moyen d'observations et de calculs géodésiques, la forme et les dimensions de la courbe génératrice.

99. **Mesure d'arcs de méridien.**—La première idée qui se présente à l'esprit est de tracer une base dans la direction du méridien, de la mesurer et de lui faire subir les corrections habituelles. Mais pour être employés à la recherche de la figure de la terre, les arcs de méridien doivent avoir une étendue beaucoup plus considérable que celle des bases ordinaires. Leur mesure directe devient longue et pénible, lors même qu'elle est possible; il est, en effet, très-rare de trouver des plaines assez grandes pour permettre cette opération directe.

On évite cette difficulté de la manière suivante. On établit dans la direction méridienne un réseau de triangles dont on calcule tous les éléments, et l'on en déduit la portion du méridien AMp qui passe par l'un de ses sommets.



Le côté AB est connu en longueur, soit par une mesure directe, soit par sa jonction à une première base. L'azimut, de ce côté, observé astronomiquement, fait connaître l'angle BAM du triangle ABM.

La méthode que l'on suit consiste à rechercher, après avoir calculé tous les côtés des triangles du réseau, les valeurs des éléments AM, MN, NK interceptés sur le méridien, par les côtés de ces triangles, prolongés s'il y a lieu de le faire.

Cela nécessite la résolution des triangles ABM, CMN, DNK qui peuvent être regardés comme appartenant à des sphères de rayons variables. Nous savons que la méthode de Legendre permet le calcul des côtés de ces triangles sans exiger la connaissance des rayons des sphères, rayons qui sont inconnus, puisque le problème qu'on se propose de résoudre a précisément pour but de déterminer la figure terrestre, et, par conséquent, les valeurs des rayons des différentes sphères locales.

Ces triangles doivent être résolus comme ceux du troisième ordre, parce qu'un de leurs angles est inconnu. Par suite de leur importance et de leurs grandes surfaces, il sera bon d'employer la méthode de résolution avec toute sa rigueur, c'est-à-dire, en tenant compte des excès sphériques, ce qu'on ne pouvait pas faire avant la découverte du théorème de Legendre.

Dans le triangle ABM, on connaît le côté AB et les angles A et B. On pourra donc en calculer l'excès sphérique e, et résoudre le triangle plan dont les éléments seraient

$$AB,\ A' = A - \tfrac{1}{3}e,\quad B' = B - \tfrac{1}{3}e \qquad M' = 200^g - A - B + \tfrac{2}{3}e$$

ce qui donnera la longueur du premier élément AM du méridien, ainsi que le côté MB.

Dans le triangle suivant CMN, on connaîtra l'angle C observé, le côté $BM = CB - MB$ calculés précédemment, et l'angle M égal à AMB du premier triangle, lequel est égal à M' du triangle rectiligne $A'M'B' + \frac{1}{3}e$.

Il sera donc possible de trouver l'excès sphérique e' de CMN, et, par suite, de lui substituer un triangle rectiligne $C'M''N'$ dont on connaîtra

$$C' = C - \tfrac{1}{3}e',\ M'' = M' + \tfrac{1}{3}e - \tfrac{1}{3}e' = 200^g - A - B + e - \tfrac{1}{3}e'$$
$$CM = CB - BM,\quad N' = 200^g - C - M' - \tfrac{1}{3}e + \tfrac{2}{3}e'$$

On arrivera ainsi à calculer le second élément MN du méridien, et le côté CN qui, retranché de CD, fournira DN nécessaire pour la résolution du triangle suivant NDK.

Dans celui-ci, on connaîtra, outre ce côté DN, les deux angles en D et N, le premier, par la combinaison des angles CDB, BDE du réseau, le second, comme égal à N du triangle CMN, c'est-à-dire à $N' + \frac{1}{3}e'$.

Opérant ainsi de proche en proche, on arrivera à un dernier sommet P qu'on choisira rapproché du méridien, et qui aura

fourni par l'intersection du dernier côté la longueur totale d'un arc A*s*.

Nous verrons plus loin que, pour arriver à la détermination de la figure de la terre, il faut, outre la longueur de l'arc du méridien, connaître les latitudes de ses deux points extrêmes. Après avoir observé astronomiquement celle du point A de départ, il faudrait pouvoir stationner en *s* pour y faire une opération analogue.

Mais ce point n'est déterminé que par le calcul, et rien ne le précise dans la nature. On prend alors la latitude du dernier sommet P, et on projette ce point en *p*, sur le méridien, par un arc de parallèle. Le triangle P*sp* n'est pas rigoureusement sphérique puisque P*p* n'est pas un arc de grand cercle; mais P et *p* étant très-rapprochés l'un de l'autre, son assimilation à un tel triangle ne produira qu'une faible erreur. La résolution de P*ps*, dont trois éléments sont connus, fournira *ps*, et par suite on connaîtra simultanément A*p* et les latitudes de ses deux extrémités A et *p*.

On peut encore transformer la latitude observée de P et laisser subsister intacte la longueur A*s* de l'arc de méridien mesuré. Nous indiquerons dans un prochain chapitre le moyen de trouver la latitude d'un point *s* séparé d'un point P connu, par un côté P*s* donné de longueur, quand on a également l'azimut de ce côté. La formule qui conduit à ce résultat permettra donc de trouver la différence de latitude de P et de *s* du cas actuel, car les éléments nécessaires pour son calcul auront été fournis par la résolution du dernier petit triangle analogue à ceux dont nous avons parlé précédemment, et on aura encore la connaissance d'une longueur méridienne A*s* et des latitudes de ses deux extrémités.

Il est vrai que la formule des latitudes repose sur la connaissance de la forme du méridien que nous recherchons actuellement. Mais remarquons qu'il n'y a lieu de l'appliquer ici que pour trouver une différence très-petite ; que la faible erreur à laquelle son emploi donnera lieu se trouvera répartie sur la différence totale des latitudes extrêmes, et que par suite elle n'entachera celle-ci que d'une erreur négligeable. Il sera donc permis, dans l'emploi de cette formule, d'attribuer au méridien une forme approchée, la forme circulaire, par exemple.

Au lieu d'opérer comme nous venons de l'indiquer, on peut projeter les sommets des triangles sur le méridien par des arcs



de grands cercles perpendiculaires à celui-ci, et faire la somme des éléments ainsi obtenus.

La suite des calculs à faire a tellement d'analogie avec ceux que nous venons d'indiquer que nous croyons inutile de les préciser davantage.

Utilisons maintenant ce qui précède pour trouver la forme de la méridienne. Si λ et λ' désignent les latitudes extrêmes, l'arc correspondant pourra être regardé comme appartenant au cercle osculateur répondant à la latitude moyenne $L=\frac{\lambda+\lambda'}{2}$; en désignant par ρ ce rayon, et par μ la longueur obtenue, on pourra écrire

$$\rho\ (\lambda-\lambda')=\mu$$

d'où l'on pourra conclure, par une simple proportion, la longueur M de l'arc de 1^g du méridien

$$M=\rho.1^g=\rho\times\frac{\pi}{200}$$

pour la latitude L.

Une nouvelle opération, faite sous une autre latitude moyenne L', du même méridien ou de tout autre, en vertu de la supposition que nous avons faite, que la terre est une surface de révolution, donnera

$$M'=\rho'\frac{\pi}{200}$$

Un grand nombre d'observations ainsi faites a fourni une série de valeurs M, M', M''....., pour lesquelles on a reconnu la loi suivante : *le degré du méridien croît, par rapport à celui relatif à l'équateur, d'une quantité qui est proportionnelle au carré du sinus de la latitude*. Cette loi serait précisément celle que présenterait un méridien elliptique. On est donc fondé à admettre d'abord que la courbe génératrice est une ellipse. Il reste à déterminer les éléments de celle-ci. En désignant par a et e le rayon de l'équateur et l'excentricité de l'ellipse méridienne, le rayon de courbure de celle-ci est

$$\rho=\frac{a\,(1-e^2)}{(1-e^2\ \sin.^2\ L)^{\frac{3}{2}}}$$

Nous aurons donc, pour les deux longueurs connues M et M' d'un grade du méridien, sous les latitudes moyennes L et L'

$$M = \frac{\pi}{200} \frac{a(1-e^2)}{(1-a^2 \sin.^2 L)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi}{200} a(1-e^2)\left(1+\tfrac{3}{2} e^2 \sin.^2 L\right)$$

$$M' = \frac{\pi}{200} a(1-e^2)\left(1+\tfrac{3}{2} e^2 \sin.^2 L'\right)$$

en négligeant la quatrième puissance de e, dont la valeur très-petite, indiquée d'abord par le peu de variation du degré du méridien, sera reconnue telle par le résultat même du calcul.

En divisant M par M', on a,

$$\frac{M}{M'} = \frac{1+\frac{3}{2} e^2 \sin.^2 L}{1+\frac{3}{2} e^2 \sin.^2 L'} = 1+\tfrac{3}{2} e^2 (\sin.^2 L - \sin.^2 L')$$

en négligeant toujours la quatrième puissance de l'excentricité. Cette équation permettra de trouver e, dont la valeur substituée dans l'une des équations primitives donnera celle du rayon de l'équateur a.

Si les deux latitudes L et L' avaient été prises égales, on n'aurait obtenu que $\frac{M}{M'} = 1$, équation vérifiant l'existence d'une surface de révolution.

La marche que nous venons d'indiquer suppose implicitement que l'arc mesuré μ est assez petit pour pouvoir être confondu avec un arc de cercle ; il en est très-approximativement ainsi lorsqu'il répond à une différence de latitude ne dépassant pas 1^g ou $1^g \frac{1}{2}$. Si cette différence est plus grande, ou bien si l'on désire avoir plus d'exactitude, on peut avoir recours à la formule de rectification de l'ellipse qui sera donnée au liv. IV. Dans ce cas on aura

$$\mu = a(1-e^2)\left[\left(1+\tfrac{3}{4} e^2\right)(L-L') - \tfrac{3}{8} e^2 (\sin.2L - \sin.2L')\right]$$

Une deuxième mesure fournira une équation de même forme qui, combinée avec la première, conduira à la connaissance de a et e, qui seront très-sensiblement les mêmes que ceux obtenus par l'emploi des rayons des cercles osculateurs, si l'on a fait usage des mêmes données.

100. **Résultats généraux.** En combinant ainsi deux à deux les diverses mesures d'arcs de méridiens, on devrait, en tenant compte des erreurs inévitables d'observation, arriver toujours aux mêmes valeurs du demi-grand axe de l'ellipse et de son excentricité, si la terre est une surface de révolution. Il n'en est malheureusement pas ainsi ; d'où l'on doit conclure l'irrégularité

de la figure de la terre. Nous avons pourtant reconnu que les observations astronomiques des perturbations lunaires, de la précession et de la nutation, étaient d'accord pour indiquer une forme ellipsoïdale répondant à un aplatissement de $\frac{1}{305}$; nous avons alors observé que ce résultat se rapportait à la forme moyenne, inexacte probablement pour chaque lieu pris isolément. Les mesures géodésiques confirment cette seconde conséquence. Pour avoir connaissance, au moyen des mêmes opérations, de la forme moyenne de l'ellipse qui donnerait naissance à un ellipsoïde de révolution s'écartant le moins possible, généralement, de la surface terrestre, il ne faut plus combiner deux à deux les mesures d'arcs de méridien ; il devient nécessaire de tenir compte de toutes les observations effectuées. On fait alors usage de la méthode des moindres carrés, qui, appliquée aux dix mesures principales exécutées jusqu'à ce jour en Europe, dans l'Inde, au Pérou et au cap de Bonne-Espérance, a conduit aux résultats suivants

$$a = 3272077 \text{ toises}. \qquad e^2 = 0{,}0066744, \; \alpha = \frac{1}{299{,}15}$$

Tels sont, jusqu'à ce jour du moins, en raison des mesures géodésiques, les éléments de l'ellipsoïde moyen qui représente le mieux la surface terrestre.

Lorsqu'il s'agit d'exécuter un canevas géodésique, cette forme moyenne ne doit pas être préférée ; il vaut mieux lui substituer celle qui s'assimile le mieux possible avec la portion de la surface à représenter. On trouve cette forme par la combinaison des mesures exécutées sur cette surface même. Malheureusement, les grandes irrégularités qu'on trouve dans les résultats d'un même pays, de la France particulièrement, conduisent à une figure moyenne locale s'écartant trop sensiblement de la figure vraie, en certaines parties du moins. Ainsi, en France, la combinaison d'arcs de méridien de peu d'étendue a donné, pour les parties Ouest, des aplatissements tantôt positifs, tantôt négatifs, c'est-à-dire, dans ce dernier cas, répondant à des ellipses aplaties vers l'équateur, tels que la sphère semble être la figure moyenne la plus convenable. Les mêmes opérations exécutées dans la partie Est ont donné un aplatissement moyen de $\frac{1}{134}$, plus fort, par conséquent, que la moyenne générale relative au globe entier. Observons pourtant que ces résultats ne sont peut-être pas tout à fait concluants, car, reposant sur des me-

sures d'arcs petits, les erreurs commises dans la détermination astronomique des latitudes peuvent avoir une influence notable.

Pour l'exécution de la carte de France du Dépôt de la guerre, on n'a pas pu tenir compte de ces variations de l'aplatissement, et on a employé uniformément la valeur $\frac{1}{309}$, le rayon polaire égal à 6356364^{m} et le rayon de l'équateur égal à 6376957^{m}, nombres considérés, lors du commencement de cette carte, comme se rapportant à la forme moyenne générale du globe entier.

Il résulte de ce qui précède que, pour la France en particulier, les résultats géodésiques, calculés avec une forme unique du méridien, doivent être en défaut. Il en est certainement ainsi ; la double courbure réelle des méridiens assimilés tous à la même ellipse donne naissance à des différences sensibles entre les coordonnées géographiques calculées en raison de cette hypothèse, et celles qui existent réellement. Mais il ne faut pas s'exagérer l'importance des erreurs ainsi commises ; les triangles qui composent les canevas restent exacts en forme et en surface, par suite de leur petitesse même ; ils sont seulement disposés, par le calcul, sur une surface régulière au lieu d'être placés sur la surface vraie ; leurs relations sont bonnes, mais ils sont quelque peu désorientés.

Les déplacements des sommets, résultant ainsi de l'irrégularité de la figure de la terre, irrégularité provenant de celle du fil à plomb engendrée par des attractions locales dues à des variations notables de densité des couches terrestres, vont en France jusqu'à 50 et 60 mètres. Une expérience récente faite au moyen du télégraphe électrique, qui permet une détermination très-exacte des longitudes, a même donné pour Bourges, comparé à l'observatoire de Paris, un déplacement de 185^{m} dans le sens du parallèle.

Quart du méridien. — Longueur du mètre. Nous avons donné précédemment le moyen d'avoir a et e par la combinaison des principales mesures exécutées jusqu'à ce jour. Nous avons dit, d'après Bessel, que les éléments terrestres les plus probables, s'appliquant à la forme générale, sont

$$a = 3272077 \text{ toises}, \quad e = 0066744, \quad \alpha = \frac{1}{299,15}$$

Pour avoir, en raison de ces données, la longueur du quart

du méridien, il suffit d'introduire la double hypothèse $L = 100^g$, $L' = o$ dans la formule de rectification de l'ellipse ; il est ici nécessaire de conserver la quatrième puissance de l'excentricité, puisqu'il s'agit de la mesure d'un arc très-grand. On a ainsi

$$Q = a(1 - e^2)\left(1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4\right)\frac{\pi}{2} = 5131180 \text{ toises.}$$

La commission des poids et mesures, qui a déterminé la valeur du mètre légal, a déduit cette valeur de deux mesures méridiennes exécutées en France et au Pérou ; l'aplatissement $\frac{1}{334}$ qu'elle a employé est trop faible pour représenter celui de l'ellipsoïde moyen ; la longueur du mètre qui en est résultée est donc entachée d'erreur ; mais heureusement cette erreur est très-faible par suite de la circonstance qui a fait que l'une des mesures, celle de France, se rapporte à peu près à la latitude de 50^g. Soit, en effet, ρ la valeur du rayon de courbure déduit de l'observation d'un arc de méridien mesuré sous cette latitude. Si λ, λ' désignent toujours les latitudes extrêmes, telles que $\frac{\lambda + \lambda}{2} = 50^g$, et si μ est la longueur correspondante, on a

$$\mu = (\lambda - \lambda').\rho$$

ρ est donc déterminé. Mais on a pour ce cas particulier

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{\left(1 - \frac{1}{2}e^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad a(1 - e^2) = \rho\left(1 - \frac{1}{2}e^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

En substituant à la place de $a(1 - e^2)$ sa valeur dans l'expression du quart du méridien, il vient

$$Q = \frac{\pi}{2}\rho\left(1 - \frac{1}{2}e^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4\right) = \frac{\pi}{2}\rho\left(1 + \frac{15}{64}e^4\right)$$

Ce résultat ne renfermant l'excentricité qu'à la quatrième puissance, ou l'aplatissement qu'à la seconde, l'erreur commise en prenant $\frac{1}{334}$ au lieu de $\frac{1}{299,15}$ valeur plus probable de l'aplatissement de l'ellipsoïde moyen, sera excessivement petite.

On trouve en effet ainsi

$$Q = 5130740 \text{ toises, au lieu de } 5131180,$$

avec une différence qui n'est que de 440 toises.

Le mètre légal, égal à la dix-millionième partie du quart du méridien, fixé par cette opération à

$$3^p\ 11^l,296$$

est donc trop faible d'une fraction égale à

$$3^{p}\,41^{l},296 \times \frac{440}{5130740}$$

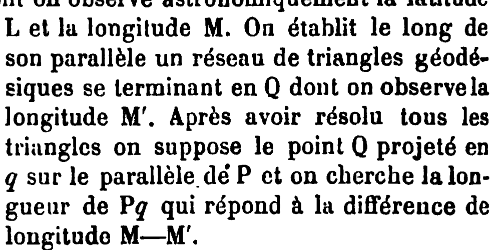
quantité plus petite que $\frac{1}{10000}$ de sa longueur.

La correction qu'il faudrait lui faire subir est donc excessivement petite, et il n'y a pas lieu de s'en occuper, surtout si l'on observe que la mesure qui a servi à la contrôler n'a elle-même rien de définitif, et qu'elle peut ne pas représenter exactement les éléments rigoureux de l'ellipsoïde moyen.

La carte de France ayant été exécutée dans l'hypothèse de $\alpha = \frac{1}{309}$, le quart du méridien employé se trouve plus grand que celui de $\frac{1}{334}$ qui a servi à déterminer le mètre égal à sa dix-millionième partie, en sorte que la valeur qui est attribuée, dans ce travail, au quart du méridien terrestre, est 10000724 mètres légaux au lieu d'être 10000000.

101. Mesure d'arcs de parallèles. — Les mesures d'arcs de parallèles peuvent, comme celles d'arcs de méridiens, conduire à la connaissance de la forme terrestre, mais avec moins de précision, pensons-nous, par suite de l'emploi de longitudes observées astronomiquement, longitudes toujours beaucoup moins exactes que les latitudes employées dans la mesure d'un arc du méridien.

Soit P un point dont on observe astronomiquement la latitude L et la longitude M. On établit le long de son parallèle un réseau de triangles géodésiques se terminant en Q dont on observe la longitude M′. Après avoir résolu tous les triangles on suppose le point Q projeté en q sur le parallèle de P et on cherche la longueur de Pq qui répond à la différence de longitude M—M′.



Pour trouver Pq on le considère comme formé de la somme des projections, faites par des méridiens, des côtés du réseau sur le parallèle, et on cherche isolément chacune de celles-ci qui, étant petite, peut être calculée d'une manière seulement approximative.

On commence par chercher de la même manière les latitudes λ, λ′... des sommets des triangles, dans la supposition de l'existence d'un ellipsoïde approché.

Soit AB=K un des côtés du réseau, Z son azimut au méridien du second point B calculé de la même manière approchée que la latitude λ de ce point. La formule propre au calcul des longitudes, formule qui sera donnée au chap. VII en même temps que celles qui ont dû servir aux déterminations provisoires de λ et Z, donnera pour la différence de longitude des points A et B, en désignant par N' la grande normale de B, $\mu-\mu'=\frac{K \sin. Z}{N' \cos. \lambda}$

L'arc de parallèle considéré compris entre les méridiens de A et B sera

$$mm'=r\ (\mu-\mu')=N \cos. L\ (\mu-\mu')=N. \cos. L\ \frac{K \sin. Z}{N' \cos. \lambda}$$

en se rappelant que L est la latitude du parallèle de A et en appelant N la grande normale de ce parallèle. En mettant pour les grandes normales leurs valeurs algébriques résultant de l'emploi de l'ellipsoïde provisoire dont les éléments approchés sont a rayon de l'équateur et e excentricité de l'ellipse méridienne, on trouve par suite de $N=\frac{a}{(1-e^2 \sin. Z)^{\frac{1}{2}}}$.

$$mm'=K \sin. Z\frac{\cos. L}{\cos. \lambda}\frac{(1-e^2 \sin.^2 \lambda)^{\frac{1}{2}}}{(1-e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}=K \sin. Z\frac{\cos. L}{\cos. \lambda}\cdot\frac{1-\frac{1}{2}e^2 \sin.^2 \lambda}{1-\frac{1}{2}e^2 \sin.^2 L}$$

$$mm'=K \sin. Z\frac{\cos. L}{\cos. \lambda}\left(1+\frac{1}{2}e^2(\sin.^2 L-\sin.^2 \lambda)\right)$$

Les erreurs commises dans l'appréciation de a et e nécessairement provisoires puisque le but final est leur détermination, n'auront eu qu'une assez faible importance dans les calculs de Z et de λ et elles n'en produiront qu'une insignifiante sur les autres termes de mm' puisque a n'y entre pas et que L et λ diffèrent peu l'un de l'autre.

Une série d'opérations semblables donnera par de simples additions la longueur totale de l'arc de parallèle $Pq=p$, comprise entre les méridiens des stations extrêmes.

Si, de plus, on a observé astronomiquement, comme nous l'avons dit, les longitudes du premier et du dernier point, on en connaîtra la différence M.—M', qui sera liée à la longueur trouvée p de l'arc du parallèle, par la relation

$$p=r\ (M.-M')=N \cos. L\ (M.-M')$$

$$p=\frac{a \cos. L}{(1-e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}\ (M.-M')$$

M.—M′ est un angle qui doit être exprimé en rapport ; s'il est donné en prenant la seconde pour unité, l'expression précédente se transforme en la suivante,

$$p = \frac{a \cos. L}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}} (M. - M') \sin. 1''.$$

Les seules inconnues de cette équation sont la longueur a du rayon équatorial, et l'excentricité e de l'ellipse méridienne. Une seconde opération faite sous une autre latitude donnera une deuxième équation qui, combinée avec la première, permettra de trouver a et e par un calcul analogue à celui que nous avons donné pour les mesures méridiennes.

Les résultats obtenus par cette méthode ne conduisent pas plus que ceux qui proviennent des mesures de méridiens, à un système unique de valeurs de a et de e, et ils confirment ainsi ce que nous savions déjà, l'irrégularité de la surface terrestre.

Ellipsoïde osculateur.—La combinaison des deux mesures, d'un arc de méridien et d'un arc de parallèle, peut conduire également à la connaissance de la forme du sphéroïde terrestre. En effet, la première donne la longueur M du grade compté sur le méridien, et la seconde, P du grade du parallèle ; on a donc

$$M = \frac{\pi}{200} \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{3}{2}}}, \quad P = \frac{\pi}{200} \frac{a \cos. L}{(1 - e^2 \sin.^2 L')^{\frac{1}{2}}}$$

équations qui, divisées terme à terme, donneront une relation entre e et des quantités connues, ce qui permettra de déterminer l'excentricité par approximations successives, puis a, par une substitution.

Cette marche serait surtout convenable à suivre en faisant $L = L'$, c'est-à-dire en exécutant les deux mesures au centre d'une surface dont on obtiendrait ainsi l'ellipsoïde osculateur, le plus convenable pour représenter cette surface.

La comparaison des différents ellipsoïdes locaux ainsi obtenus avec l'ellipsoïde moyen serait propre à faire apprécier les irrégularités de la surface terrestre.

CHAPITRE VI

PROJECTIONS

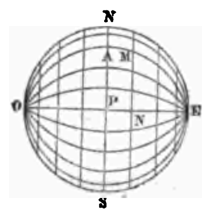
102. L'ellipsoïde de révolution que nous avons supposé représenter assez bien la figure de la terre doit être développé sur un plan, en entraînant avec lui le canevas géodésique. Cette opération ne pourra pas se faire sans produire des déformations; les différents systèmes de projection qui ont été proposés, ont été imaginés en vue de rendre ces déformations le plus petites possibles. Parmi tous ceux qui sont en usage, spécialement pour les cartes géographiques, nous choisirons seulement les deux principaux affectés à la représentation topographique d'une petite partie de la surface terrestre.

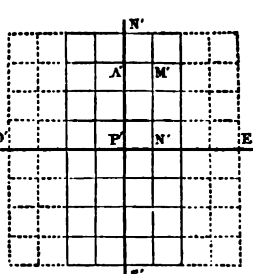
Le premier, celui que Cassini avait adopté pour sa carte de France, et dans lequel il a assimilé la surface à celle d'une sphère, n'est plus en usage; mais nous le décrirons néanmoins parce qu'il a été la base d'un grand travail, et parce qu'il pourrait encore être avantageusement utilisé si on avait à représenter une portion très-petite d'un pays.

Le second, celui de Flamstead modifié, employé pour la confection de la nouvelle carte du Dépôt de la guerre, tient compte de la forme ellipsoïdale de la terre.

103. Projection de Cassini. — Dans la projection de Cassini, on imagine le méridien principal SN, partagé en parties égales: par chaque point de division et par le diamètre OE perpendiculaire au plan du méridien principal, on fait passer des plans également perpendiculaires à celui-ci. On divise de même le grand cercle OE qui passe par le point P milieu de la surface à représenter, et par chaque point on mène des plans parallèles à celui de SN. Alors tous les points d'intersection tels que M peuvent être déterminés par les deux coordonnées MA, AP, que l'on désigne sous le nom de *distances à la méridienne* et *à la perpendiculaire*. La première de ces distances MA est réellement la distance à la méridienne; mais la seconde AP a été improprement

appelée distance à la perpendiculaire; cette dernière devrait, en effet, être mesurée sur un arc de grand cercle passant par M et perpendiculaire à OPE, et nous savons qu'elle serait plus petite que l'arc de petit cercle MN qui est lui-même plus petit que l'ordonnée employée AP.





Dans la projection, on développe la méridienne SN et la perpendiculaire OE en lignes droites, suivant S'N',O'E'. Sur chacune de ces lignes, on porte des degrés respectivement égaux à ceux du globe, et par les points de division on trace des parallèles aux projections de la méridienne et de la perpendiculaire : ces parallèles sont considérées comme projections des arcs de cercle.

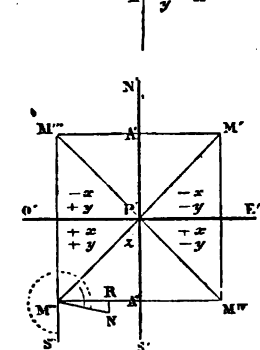
Le point M' correspondant à M, a pour coordonnées rectangulaires A'M', A'P'. Si, par exemple, le méridien principal et sa perpendiculaire sont divisés de grade en grade, c'est-à-dire si les divisions ont 100 mille mètres, les coordonnées de M' seront 100000^m et 300000^m.

Les quadrilatères curvilignes de la terre, dont les dimensions E^tO^t sont constantes, mais dont les côtés N^dS^d vont en diminuant à mesure qu'on s'éloigne du méridien principal, sont représentés, sur la projection, par des carrés ; de sorte que les longueurs E.O, toujours exactes, répondent à des longueurs N.S trop grandes. Il en résulte que la déformation a lieu dans le sens du nord au sud, d'une manière d'autant plus sensible qu'on s'éloigne davantage du méridien principal. Ce système de projection sera donc avantageux pour la représentation des pays qui s'étendent dans le sens du méridien plus que dans celui du parallèle. C'est cette raison qui a décidé Cassini à l'employer pour sa carte de France.

Observons, à l'avantage de ce système de projection, que les angles des figures développées sont droits comme ceux des figures qu'ils représentent.

Pour utiliser les observations géodésiques et les calculs qui en sont la conséquence, il faut savoir trouver les distances à la

méridienne et à sa perpendiculaire ou fonction des angles et des côtés des triangles.



Soient, O l'origine des coordonnées, A un point séparé de cette origine par un arc de cercle b. Menant par ce point un grand cercle perpendiculaire au méridien principal OH, les deux coordonnées cherchées seront AH et OH. La résolution du triangle rectangle OHA sera possible si l'on connaît l'angle z supplément à 400^g de l'azimut du côté OA sur le méridien du point O. En opérant par la méthode de Legendre, il faudra d'abord chercher l'excès sphérique donné ici très-approximativement par

$$\varepsilon'' = \frac{1}{2} \frac{b^2}{r^2 \sin. 1''} \sin. z \cos. z.$$

Le triangle plan substitué au triangle sphérique rectangle aura alors pour éléments connus

$$OA = b, \quad H' = 100^g - \tfrac{1}{3}\varepsilon, \quad O' = z - \tfrac{1}{3}\varepsilon, \quad A' = 100 - z + \tfrac{2}{3}\varepsilon.$$

Les deux coordonnées, que nous désignerons par x et y, seront données par les formules

$$OH = x = b\frac{\cos. (z - \frac{2}{3}\varepsilon)}{\cos. \frac{1}{3}\varepsilon}, \quad AH = y = b\frac{\sin. (z - \frac{1}{3}\varepsilon)}{\cos. \frac{1}{3}\varepsilon}$$

Nous indiquerons au § 112, comment on peut déterminer ensuite successivement les distances à la méridienne et à la perpendiculaire de tous les autres sommets du canevas.

Cette méthode serait fort longue à employer : aussi les géographes la simplifient-ils, en opérant de la manière suivante. L'excès sphérique e est toujours très-petit ; si on en néglige la valeur, les expressions de x et y deviennent

$$x = b \cos. z \qquad y = b \sin. z$$

ou en introduisant l'azimut $Z = 400 - z$ compté toujours de 0 à 400^g en partant du sud du méridien et se dirigeant vers l'ouest,

$$x = b \cos. Z, \qquad y = -b \sin. Z.$$

Le signe des seconds membres se rapportent à la figure qui a supposé les coordonnées positives au sud et à l'est. L'usage est de laisser les signes + en évidence et de prendre

$$x = b \cos. Z, \qquad y = b \sin. Z$$

auquel cas, l'x restant positif au sud, l'y positif passera à l'ouest.

Il s'agit ensuite de trouver les coordonnées x', y' d'un second point N séparé du premier par une longueur de côté b' incliné sur le premier P'M''' d'un angle observé P'M''N. Il est évident qu'on a

$$x' = x + RN, \qquad y' = y - M''R.$$

Mais en désignant par Z' l'azimut du nouveau côté M''N au méridien du point connu M''

$$RN = b' \sin. NM''R = b' \sin. (Z' - 300^g) = b'. \cos. Z'$$

$$RM'' = b' \cos. NM''R = b' \cos. (Z' - 300^g) = - b'. \sin. Z'$$

par suite

$$x' = x + b' \cos. Z', \qquad y' = y + b \sin. Z'$$

expressions de même forme que celles qui ont donné les premières coordonnées.

Il ne reste plus qu'à former l'azimut Z'. L'inspection de la figure fait voir que

$$Z' = 400^g - S''M''N = 400^g - (S''M''P' - NM''P')$$

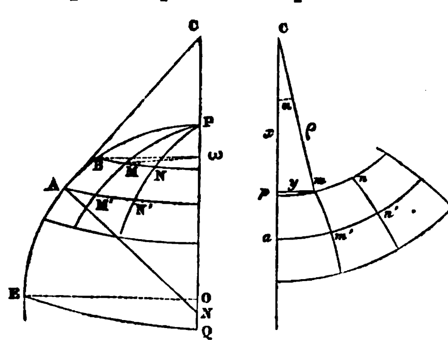
mais $S''M''P' = 200 - Z$, et $NM''P'$ est l'angle observé M''; on peut donc écrire

$$Z' = 200 + Z + M''.$$

Remarquons en terminant ce qui a trait à la projection de Cassini, que par suite de la formation des azimuts tels que Z', formation qui suppose égale les inclinaisons des côtés sur le méridien principal et sur ses parallèles, on arrive à considérer la terre comme plane, ce qui supprime les hypothèses mêmes sur lesquelles est basé ce système de projection. Observons en effet que les résultats seraient identiquement les mêmes si la terre était plane, car nous n'avons pas invoqué l'existence de son rayon ou de sa courbure, pour appliquer le canevas terrestre sur le plan de développement; ceci ressortira mieux, du reste, des considérations qui seront exposées au § 112.

104. Projection de Flamstead modifiée. — Pour la nou-

velle carte de France, on s'est servi d'une projection plus exacte : celle de Flamstead modifiée. On suppose l'équateur et le méridien principal divisés en parties égales; on imagine des méridiens passant par tous les points de division de l'équateur, et des parallèles à l'équateur par toutes les divisions du méridien principal. Pour en avoir la projection, on trace sur le papier, le grand axe cX qui représente le méridien principal rectifié. D'un point c de cette droite comme centre et d'un rayon égal à la partie CA de la tangente au parallèle moyen de la portion du globe que l'on veut représenter, comprise entre celui-ci et la ligne des pôles on décrit une portion de circonférence *am'n'* qu'on prend pour le développement du parallèle moyen. Tous les autres parallèles sont représentés par des arcs concentriques décrits du même point c, à une distance l'un de l'autre égale à la partie rectifiée du méridien comprise entre ces parallèles sur la terre : on prend ensuite, sur chacun des parallèles, les degrés de longitude, tels que les donne la loi de décroissement de l'équateur aux pôles, c'est-à-dire proportionnels aux rayons de ces parallèles. Enfin, on fait passer, par chaque série de points correspondants, une ligne courbe qui représente un méridien, et tous les autres s'obtiennent de la même manière.



Dans ce système de développement les longueurs d'arcs de parallèles sont conservées telles que sur la terre; quant à celles des méridiens, elles vont en augmentant à mesure qu'on s'écarte du méridien principal. Les déformations moins sensibles que celles de la projection de Cassini, sont donc de même nature que celles-ci, c'est-à-dire qu'elles ont lieu dans les parties est-ouest et qu'elles affectent les dimensions nord-sud.

Dans ces mêmes parties, les angles droits de la terre formés par des méridiens et des parallèles deviennent de plus en plus aigus. D'autre part, ce mode de projection est homolographique, c'est-à-dire, qu'il conserve le rapport exact des surfaces; si on considère, en effet, deux quadrilatères MNM'N', *mnm'n'* homologues

comme infiniment petits, ils deviennent égaux en surface (abstraction faite de l'échelle), comme pouvant être assimilés à des trapèzes plans dont les bases et les hauteurs sont les mêmes par suite du système adopté. Si on regarde ensuite ces surfaces MN′, *mn′* comme finies, on voit que composées d'un même nombre de trapèzes élémentaires égaux, elles doivent elles-mêmes être égales.

Le tracé des arcs de cercle destinés à représenter les parallèles ne peut pas être fait lorsque l'on emploie une échelle topographique ; ainsi même au $\frac{1}{100000}$, sous la latitude de 50^g, le rayon du parallèle moyen devrait être de 63^m,662 beaucoup trop grand pour pouvoir être employé.

On détermine alors les points de rencontre des méridiens et des parallèles également espacés angulairement, au moyen d'un système de coordonnées rectilignes rapportées au méridien principal développé, et à sa perpendiculaire supposée menée par le centre commun des cercles des parallèles. Ces deux coordonnées $x = cp$, $y = mp$ sont elles-mêmes déterminées, en vertu des conditions du développement, au moyen de deux inconnues auxiliaires α et ρ indiquées sur la figure.

Nous supposerons de suite que la terre est un ellipsoïde de révolution, et nous indiquerons comment on pourrait trouver $x = cp$, $y = mp$ relatifs à un point m connu par sa latitude λ et sa longitude μ comptée à partir du méridien principal. Nous désignerons par L la latitude du parallèle moyen, par r le rayon de celui du point M,*m* et par R et N le rayon de courbure et la grande normale à l'ellipse méridienne.

La seconde figure donne immédiatement

$$x = \rho \cos. \alpha, \qquad y = \rho \sin. \alpha$$

et il ne s'agit que de trouver les deux inconnues auxiliaires ρ et α en exprimant algébriquement les conditions du système de projection adopté.

L'hypothèse relative au tracé des parallèles donne

$$\rho = cb = \text{CA} - \text{AB} = \text{N}_\text{L} \cot. \text{L} - (\text{L} - \lambda)\, \text{R}_\text{L}$$

N_L et R_L se rapportant à la latitude L.

D'autre part, la supposition relative au tracé des méridiens donne $bm = \text{BM}$ et par suite

$$\alpha = \frac{bm}{\rho} = \frac{\text{BM}}{\rho} = \frac{\omega . r}{\rho} = \frac{\mu . r}{\rho} = \frac{\mu . \text{N}_\lambda \cos. \lambda}{\rho}$$

Substituant

$$x = \left(N_L \cot. L - (L - \lambda) L_L \right) \cos. \frac{\mu N_\lambda \cos. \lambda}{N_L \cot. L - (L - \lambda) R_L}$$

$$y = \left(N_L \cot. L - (L - \lambda) R_L \right) \sin. \frac{\rho N_\lambda \cos. \lambda}{N_L \cot. L - (L - \lambda) R_L}$$

Les valeurs des coordonnées x et y des points d'intersection de tous les méridiens et parallèles de décigrades en décigrades ont été calculées et mises sous forme de table par *Plessis*. Elle fournit donc le moyen de passer des latitudes et longitudes aux distances à la méridienne et à la perpendiculaire, et cela en tenant compte de l'aplatissement $\frac{1}{309}$.

Remarquons que ces distances, quoique portant ici les mêmes noms, ne sont pas les mêmes que celles de Cassini.

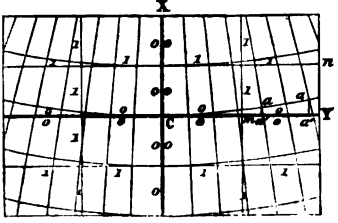
La projection de Flamstead modifiée qui s'appuie sur les développements de parallèles et de méridiens, exigera la transformation du canevas géodésique en latitudes et longitudes.

105. Construction d'une carte. — On la divise en un certain nombre de rectangles égaux dont les côtés sont respectivement parallèles aux lignes qui ont été prises pour axes des coordonnées : ce sont le méridien principal développé et la perpendiculaire passant par le centre commun des parallèles. Quelquefois, au lieu de celle-ci, on emploie sa parallèle tangente au parallèle moyen, pour compter les abscisses des points à représenter ; on agit ainsi simplement dans le but d'avoir à employer des nombres moins grands. On voit que, quant à la difficulté d'exécution, il importe peu que l'on emploie l'une ou l'autre de ces méthodes.

Si la latitude du point est plus grande que la latitude moyenne, la somme des abscisses comptées suivant les deux systèmes est égale au rayon du parallèle moyen développé : si cette latitude est, au contraire, plus faible, il y a entre les deux abscisses une différence toujours égale à ce même rayon.

Pour continuer à expliquer les opérations à faire, et parce qu'on agit ainsi au Dépôt de la guerre, adoptons pour axe des y la tangente au parallèle moyen de la carte. Le rapport des côtés de rectangles est évidemment arbitraire : cependant, comme il a fallu s'arrêter à quelque chose, le Dépôt de la guerre a choisi le rapport du 5 à 8 comme présentant une figure agréable

à l'œil, et commode lorsqu'on veut faire usage de la carte. Les feuilles ont 0^m,5 de hauteur, et 0^m,8 de largeur.



Pour reconnaître dans laquelle des quatre régions formées par les axes sont placées les feuilles, et leurs positions dans ces régions, on est convenu de numéroter les feuilles comme l'indique la figure, les chiffres placés sur deux côtés d'un rectangle indiquant les distances de ces côtés aux axes qui leur sont respectivement parallèles. De plus, la position de ces chiffres exprime aussi la région à laquelle appartient la feuille. Si ces chiffres sont inscrits près des côtés *sud* et *est*, la feuille dépend de la région du nord-ouest. Placés sur les côtés *nord* et *ouest*, ils indiquent que la feuille appartient à la région sud-est : il en est de même pour les deux autres positions que peut occuper la feuille.

Si l'échelle est celle de $\frac{1}{20000}$, chaque côté *est* ou *ouest* représente 10000^m, et les côtés *nord* et *sud* représentent 16000^m.

A l'échelle de $\frac{1}{50000}$, les côtés valent 25000^m et 40000^m, à l'échelle de $\frac{1}{80000}$, ils correspondent à 40000 et 64000^m.

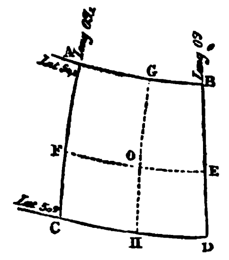
Les coordonnées des angles de tous les rectangles sont donc immédiatement connues, ainsi que celles des subdivisions de décimètre en décimètre, et il est facile de placer les points qui sont à la rencontre des méridiens et des parallèles qu'on veut représenter.

On reconnaît dans quel rectangle se trouve placé le point qui, connu d'abord par sa latitude et sa longitude, a fourni avec le secours des tables de Plessis, les coordonnées rectangulaires, à rapporter ; soit *myn* ce rectangle. Pour trouver la position cherchée *a* il suffit de prendre, à l'échelle, *ma'* et *aa'* égaux aux différences de coordonnées du point en question et de celui d'un des angles du rectangle, *m*, dont les valeurs sont inscrites sur la feuille.

On obtiendra ainsi une suite de points appartenant à des méridiens et à des parallèles choisis convenablement, et pour avoir ceux-ci, il n'y aura plus qu'à tracer des courbes continues passant par ces divers points.

Pour placer ensuite un point O du canevas géodésique, donné par sa latitude et sa longitude, il faudra chercher d'abord celui

des quadrilatères qui doit le renfermer, ce qui sera facile, puisque ceux-ci sont précisés par les coordonnées géographiques de leurs côtés. On exécutera ensuite une double interpolation graphique suffisamment exacte si les quadrilatères sont petits ; ainsi, par exemple, soient pour le point O, latitude$=50^g,0536''$; longitude $=0^g,0520$: on prendra sur AC et BD, considérés comme unités, des parties DE, CF, proportionnelles à 0,520, on joindra les points F et E ; on agira de même pour les points G et H, et l'intersection O donnera la position du point d'une manière très-approchée.



106. Projection polyédrique. — Il est un autre mode de développement plus simple, et qui, dans certains cas, pourrait être avantageusement employé. Un système de méridiens et de parallèles également espacés divise la terre en une série de quadrilatères curvilignes égaux pour la même latitude, mais variant avec celle-ci de forme et de dimension. Cette variation, considérable si l'on compare deux figures près du pôle et de l'équateur, devient beaucoup moins sensible si l'on se borne à considérer celles qui se rapportent à un pays de dimension moyenne. Remarquons encore que, si les méridiens et les parallèles sont suffisamment rapprochés, les figures qu'ils déterminent sont près d'être planes.

Ceci posé, supposons cette division pour la France, par exemple, effectuée par des méridiens différant de 1^g en longitude et par des parallèles différant de 40′ en latitude, et remplaçons les quadrilatères qui en résulteront par des trapèzes dont les bases soient égales à la longueur du grade sous les deux latitudes successives, et dont la hauteur soit l'arc du méridien compris entre ces deux latitudes. Nous aurons ainsi, pour la série des trapèzes, compris entre les latitudes 54^g et 55^g, des bases de 66366^m et de 65174^m, et une hauteur de 40030^m en nombres entiers. Ces dimensions sont à peu près celles du terrain représenté sur chaque feuille de la carte de France. Divisant ensuite ces lignes en parties proportionnelles, on aura la représentation des méridiens et des parallèles compris dans chaque feuille.

L'inconvénient de ce mode de développement résulterait de la variation des angles qui tous également droits sur la terre seraient rendus d'autant plus aigus qu'on se rapprocherait du

pôle. Cette déformation variable des angles ne permettrait pas de rassembler toutes les feuilles sur un même plan sans intervales vides; aussi, ce système n'est-il applicable qu'aux cartes topographiques, que leur étendue force à fractionner en feuilles séparées.

Ses avantages résulteraient de son extrême simplicité qui s'applique aussi facilement à la forme ellipsoïdale qu'à la forme sphérique et de l'uniformité existant dans l'exactitude de toutes ses parties. Enfin, il serait homalographique comme les projections, topographique de Flamstead modifiée, géographique de M. Babinet, et stéréographique.

Canevas d'un levé isolé. — Lorsqu'il s'agit du canevas géodésique destiné à un levé isolé, on doit tracer les méridiens et les parallèles comme nous venons de l'indiquer, mais on peut même, dans la plupart des cas, se contenter de calculer la minute du méridien moyen et celle du parallèle moyen, et s'en servir pour décrire une suite de rectangles destinés à remplacer les petits trapèzes courbes dont nous avons parlé. Les latitudes et les longitudes des sommets de triangles servent ensuite à rapporter ceux-ci par interpolation, ainsi qu'il a été expliqué à la fin du paragraphe précédent.

Il peut être utile de préciser ici la manière de trouver les longueurs d'un arc de méridien et d'un arc de parallèle répondant sous une latitude donnée L, à une différence de latitude ou de longitude, de 1′ centésimale.

Supposons que les données de l'ellipsoïde soient celles de la carte du Dépôt de la guerre.

Rayon de l'équateur $A = 6{,}376957^{m}$.

Aplatissement $\alpha = \frac{1}{309}$.

Excentricité $e = 0{,}0804$, $e^2 = 0{,}006462$.

Longueur de la minute du méridien. — En désignant par ρ le rayon de courbure de l'ellipse méridienne, on sait que

$$\rho = \frac{A\,(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{3}{2}}}$$

Par conséquent

$$1' \text{ du méridien} = 1'.\rho = 0{,}0001571\ \frac{A\,(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= 0{,}0001571 \, \frac{6376957^{m} (1 - 0{,}006462)}{(1 - 0{,}006462 \, \sin.^{2} L)^{\frac{3}{2}}}$$

Sous les latitudes moyennes, cette longueur diffère très-peu de 1000^{m}.

Longueur de la minute d'un parallèle.—Si r désigne le rayon du parallèle de latitude L, on a, en représentant par N la grande normale de l'ellipse méridienne relative à cette même latitude,

$$r = \text{N}.\cos.\,\text{L} = \frac{\text{A}}{(1 - e^{2} \sin.^{2} \text{L})^{\frac{1}{2}}} \cos.\,\text{L}$$

et il s'ensuit

$$1' \text{ du parallèle} = 1'.r = 0{,}0001571 \, \frac{\text{A} \cos.\,\text{L}}{(1 - e^{2} \sin.^{2} \text{L})^{\frac{1}{2}}}$$

$$= 0{,}0001571 \, \frac{6376957^{m}.\cos.\,\text{L}}{(1 - 0{,}006462 \, \sin.^{2} \text{L})^{\frac{1}{2}}}$$

CHAPITRE VII

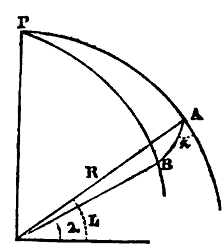
COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES

107. Nous avons vu que pour utiliser la projection de Flamstead modifiée, ou celle du paragraphe précédent, il fallait connaître les coordonnées géographiques des points à rapporter. Cherchons donc ces éléments en fonction de ceux qui sont fournis par le canevas géodésique.

Il sera indispensable, pour arriver à ce résultat, de connaître, en outre, la latitude et la longitude d'un premier point, ainsi que l'azimut d'un premier côté pris au méridien de ce point. Ces éléments devront être obtenus par des observations astronomiques; ils serviront à déterminer les éléments correspondants d'un second point, qui en fera connaître un troisième, et ainsi de suite, de proche en proche, de manière que l'on pourra déterminer ainsi tous ceux de tous les points du canevas.

Si on supposait la terre sphérique, ce que nous commence-

rons par faire, on aurait, en admettant que A et B soient les deux points à comparer, un triangle sphérique qui serait formé par le côté géodésique connu $AB = K$ et par les deux arcs de méridiens PA et PB. Dans ce triangle on connaîtrait trois éléments, savoir, L étant la latitude de A, et R le rayon de la terre,



$$A = 200^g - Z, \quad \frac{PA}{R} = 100^g - Z, \quad \frac{AB}{R} = \frac{K}{R} = \varphi$$

Remarquons que l'azimut Z est compté, comme il est d'habitude de le faire en géodésie, en partant de la partie sud du méridien et en se dirigeant vers l'ouest jusqu'à la rencontre du côté. Observons encore que nous avons rétabli dans les données, les côtés tels qu'ils doivent être considérés dans l'emploi des formules de trigonométrie sphérique, c'est-à-dire sous la forme d'angles au centre de la sphère sous-tendus par les longueurs des côtés réels.

Ce triangle PAB est défini par les trois éléments connus, et sa résolution faite par les méthodes ordinaires pourrait conduire successivement à la connaissance de ses trois autres éléments qui sont $\frac{PB}{R} = 100^g - \lambda$, $P = M - M'$ différence de longitudes, et $B = Z' - 200^g$, nouvel azimut du côté AB au méridien du second point B. Ces quantités sont précisément celles que nous avons en vue de trouver.

Mais on préfère ici, comme dans presque tous les cas que présente la géodésie, chercher un mode de résolution détournée provenant des circonstances particulières dans lesquelles on se trouve, circonstances qui résultent de la petitesse forcée de P, de $AB = K$ et de $L - L'$.

Les avantages que l'on trouve à calculer des différences petites ont déjà été exposés au § 79; il faut leur en ajouter un autre, dans le cas actuel, provenant de la seconde partie de la question. La résolution du triangle sphérique ne conduirait en effet qu'à la connaissance d'éléments géographiques hypothétiques; pour rentrer dans la réalité, ou du moins pour s'en rapprocher d'une manière générale, il faudra passer des résultats obtenus, à ceux qui conviendraient au cas de la terre ellipsoïdale, et cette seconde opération présenterait de bien grandes difficultés d'analyse si on agissait sur les quantités elles-mêmes au lieu d'agir sur les différences petites.

108. Latitude. — On doit toujours commencer la recherche des coordonnées géographiques par celle de la latitude.

Terre sphérique. — Le triangle PAB supposé sphérique, est soumis à la relation fondamentale de trigonométrie sphérique

$$\cos.\frac{PB}{R} = \cos.\frac{PA}{R}\cos.\frac{AB}{R} + \sin.\frac{PA}{R}\sin.\frac{AB}{R}\cos.PAB$$

qu'on peut écrire, en reprenant les notations indiquées précédemment

$$\sin.\lambda = \sin.L\cos.\varphi - \cos.L\sin.\varphi\cos.Z.$$

Nous avons dit qu'on cherchait la différence de latitude des deux points comparés ; prenons cette différence comme inconnue

$$x = L - \lambda \quad \text{ou} \quad \lambda = L - x$$

et éliminons λ entre les deux équations, en égalant les deux valeurs de son sinus,

$$\sin.\lambda = \sin.(L-x) = \sin.L\cos.x - \cos.L\sin.x = \sin.L\cos.\varphi - \cos.L\sin.\varphi\cos.Z$$

équation rigoureuse qui présente l'inconnu x sous deux formes différentes, ce qui la rendrait difficile à dégager dans un cas général. Mais nous agissons ici dans le cas particulier de la géodésie, où les points A et B appartenant à un même triangle, ont dû être visibles l'un de l'autre, et par conséquent très-rapprochés ; cette circonstance rend φ et x très-petits, et nous pouvons en profiter pour développer en séries leurs lignes trigonométriques, en conservant les mêmes puissances pour chacun d'eux, car ils sont de même ordre de grandeur.

Dans les opérations très-importantes on conserve les troisièmes puissances, et l'on a

$$\sin.L\left(1-\frac{x^2}{2}\right) - \cos.L\left(x-\frac{x^3}{6}\right) = \sin.L\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right)$$
$$-\cos.L.\cos.Z\left(\varphi-\frac{\varphi^3}{6}\right)$$

$$\frac{x^3}{6}\cos.L - \frac{x^2}{2}\sin.L - x\cos.L = \frac{\varphi^3}{6}\cos.L\cos.Z - \frac{\varphi^2}{2}\sin.L - \varphi\cos.L\cos.Z$$

Cette équation serait difficile à résoudre comme équation du troisième degré, et on se contente de chercher par approximation la seule de ses racines qui convienne au problème que nous résolvons. On emploie pour cela un procédé qui est appli-

cable à toute équation, d'un degré quelconque, dans laquelle on sait qu'une racine est très-petite.

Soit $Mx^m + Nx^{m-1} + \ldots.. + Px + Q = 0$ une telle équation.

Si on se bornait à prendre $Px' + Q = 0$ ou $x' = -\frac{Q}{P}$ on aurait une valeur x' d'autant plus rapprochée de la vraie valeur de x que celui-ci serait petit, car cette petitesse tendrait à annuler tous les termes renfermant l'inconnue à des puissances supérieures à la première. Mais cette annulation n'étant pas complète, il y a lieu de perfectionner x' qui en serait résultée. Au lieu de supposer $x = o$ dans tous les termes supérieurs à la première puissance, on lui prête alors la valeur x' déjà quelque peu approchée, en sorte qu'on a

$$M\left(-\frac{Q}{P}\right)^m + N\left(-\frac{Q}{P}\right)^{m-1} + \ldots.. + Px + Q = 0$$

qu'on peut résoudre comme une équation du premier degré

$$x'' = -\frac{1}{P}\left(Q + M\left[-\frac{Q}{P}\right]^m + \ldots..\right)$$

La nouvelle valeur de x ainsi obtenue sera plus exacte que la précédente, et en employant successivement la même méthode, on arrivera à des résultats de plus en plus exacts.

Revenons au cas particulier qui nous occupe ; nous simplifierons d'abord la formule que nous avons trouvée en ne conservant que les secondes puissances, ce qui est suffisant pour presque tous les cas ; nous indiquerons du reste, à la fin, ce qu'il y aurait à faire pour rendre le résultat plus complet.

Appliquons à la formule simplifiée,

$$\frac{x^2}{2}\sin.\,L + x\cos.\,L = \frac{\varphi^2}{2}\sin.\,L + \varphi\cos.\,L\cos.\,z$$

le procédé que nous avons indiqué. Nous aurons d'abord,

$$x' = \varphi\cos.\,z + \frac{\varphi^2}{2}\operatorname{tang.} L$$

mais φ étant de même ordre de grandeur que x, il y a lieu de supprimer φ^2 en même temps que x^2, ce qui, du reste, rendra la première valeur x' plus exacte, car les termes supprimés alors, tendent à se détruire dans l'équation qui est à résoudre. La nouvelle valeur $x' = \varphi\cos.\,z$, substituée conduit à

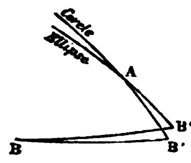
$$\frac{\varphi^2}{2}\cos.^2 z \sin. L + x \cos. L = \frac{\varphi^2}{2}\sin. L + \varphi \cos. L \cos. z$$

$$x = L - \lambda = \varphi \cos. z + \frac{\varphi^2}{2} \text{tang. } L \sin.^2 z$$

Telle serait, dans le cas de la terre sphérique et dans les limites d'approximation admises, la valeur de la différence des latitudes de deux points du canevas géodésique, appartenant au même triangle observé.

Terre ellipsoïdale. — Mais la terre est supposée ellipsoïdale, en sorte qu'il y a lieu de corriger le résultat obtenu qui, déjà très-petit, devra subir une modification plus petite encore ; cette modification pourra donc être recherchée par un calcul seulement approximatif.

Menons par le point B un plan parallèle à l'équateur, qui coupera la terre supposée sphérique suivant le petit cercle BB', et la terre supposée ellipsoïdale suivant BB''. Par le point A imaginons les deux méridiens AB'' elliptique et AB' sphérique ; ils couperont le parallèle en deux points B'' et B'.



L'arc d'ellipse AB'' pourra être regardé comme appartenant au cercle osculateur de cette ellipse, sous la latitude L, de A ; l'arc de cercle AB' pourra être quelconque, puisque rien n'a précisé la sphère de convention que nous avons admise précédemment ; choisissons cette sphère d'un rayon égal à la grande normale de A ; cette sphère, nous l'avons dit précédemment, pourra être regardée comme renfermant le point B nécessairement peu éloigné de A.

Les deux points B' et B'' auront donc les mêmes latitudes que B considéré comme appartenant successivement à la sphère hypothétique de rayon N, grande normale de A, et à l'ellipsoïde soi-disant réel. En sorte que si, conservant à λ sa signification précédente, on désigne par L la latitude vraie de B, on pourra écrire

$$AB'' = N.\,(L - \lambda) \quad \text{et} \quad AB' = \rho.\,(L - L')$$

Mais les points B' et B'' se trouveront extrêmement rapprochés l'un de l'autre, et par suite du faible aplatissement de l'ellipse méridienne, on pourra supposer AB' = AB'', ce qui ne serait rigoureusement vrai qu'à la limite à laquelle ρ et N seraient

égaux, c'est-à-dire que dans le cas où la terre serait réellement une sphère.

Il suivra, de cette égalité de AB'' et AB' en longueur et non pas en courbure

$$\rho\,(L - L') = N\,(L - \lambda)$$

En mettant pour ρ et N leurs valeurs algébriques (chap. III, liv. IV), on aura,

$$(L - L')\,\frac{A\,(1 - e^2)}{(1 - e^2\,\sin.^2 L)^{\frac{3}{2}}} = (L - \lambda)\,\frac{A}{(1 - e^2\,\sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}$$

$$L - L' = (L - \lambda)\,\frac{1 - e^2\,\sin.^2 L}{1 - e^2} = (L - \lambda)\,(1 - e^2\,\sin.^2 L)\,(1 + e^2)$$

$$L - L' = (L - \lambda)\,(1 + e^2\,\cos.^2 L)$$

par suite de la suppression de la quatrième puissance de l'excentricité qui est déjà petite elle-même.

En substituant à $(L - \lambda)$ la valeur trouvée précédemment, on a

$$L - L' = \left(\varphi\,\cos.\,z + \frac{\varphi^2}{2}\,\sin.^2 z\,\tang.\,L\right)(1 + e^2\,\cos.^2 L)$$

Mais $\varphi = \frac{K}{R} = \frac{K}{N}$ puisque le rayon choisi est égal à la grande normale; on peut donc écrire en secondes, la différence de latitude qui, jusqu'ici, avait été exprimée en rapport, sous la forme

$$L - L' = K\,\frac{(1 - e^2\,\sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}{A\,\sin.\,1''}\,(1 + e^2\,\cos.^2 L)\,\cos.\,z +$$

$$K^2\,\frac{1 - e^2\,\sin.^2 L}{2\,A^2\,\sin.\,1''}\,(1 + e^2\,\cos.^2 L)\,\tang.\,L.\sin.^2 z$$

On fait pour abréger la transcription, dans tous les tableaux destinés aux calculs géodésiques,

$$\frac{(1 - e^2\,\sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}{A\,\sin.\,1''}\,(1 + e^2\,\cos.^2 L) = P,\quad \frac{(1 - e^2\,\sin.^2 L)}{2A^2\,\sin.\,1''}\,(1 + e^2\,\cos.^2 L)\,\tang.\,L = Q.$$

La formule s'écrit alors

$$L' = L - P.K\,\cos.\,z - Q.K^2\,\sin.^2 z.$$

On a calculé et mis en table les différentes valeurs de P et Q en fonction de L.

Cette formule est celle qui a été employée pour les opérations les plus délicates relatives à l'exécution de la carte de France. Il

résulte cependant d'une note insérée par M. Hossard, dans le troisième volume de la *Description géométrique de la France*, qu'elle est insuffisante lorsque les côtés employés deviennent très-grands. Ainsi, en partant d'un point connu, si l'on calcule la latitude d'un second point situé au sud, à 100000^m sur le méridien, et si l'on fait ensuite l'opération inverse, en partant du second point, on retrouve la latitude du premier avec une erreur en plus d'environ 1',5, ce qui correspond à 15^m. Un calcul semblable effectué sur un côté de 40000^m donne lieu à un déplacement d'environ 2^m,5. Cette erreur doit être corrigée lorsqu'il s'agit de côtés très-grands et d'opérations importantes. Elle provient de ce qu'en posant l'équation qui conduirait à la connaissance de la seconde latitude si la terre était spérique, nous nous sommes bornés à prendre, dans les developpements en séries, les deux premières puissances de l'angle φ sous-tendu par le côté géodésique sur un cercle dont le centre serait au pied de la grande normale du point connu ; lorsque cet angle devient grand, relativement, il faut introduire dans les développements, sa troisième puissance ainsi que celle de x qui, dans les cas d'azimuts rapprochés de o ou de 200^g. est de même ordre de grandeur que φ. La résolution de la formule, qui résulterait de cette introduction, se ferait par la même méthode et sans plus de difficulté que celle de l'équation que nous avons employée. Cette erreur provient encore de ce que dans le second calcul relatif à la forme ellipsoïde de la terre, nous avons négligé la quatrième puissance de l'excentricité.

Le troisième volume de la *Description géométrique de la France* (Mémorial du Dépôt de la guerre) contient les détails du calcul provenant des rectifications que nous venons d'indiquer. La formule définitive qui en résulte est

$$L'-L = \left(-\frac{K \cos. z}{N \sin. 1''} - \frac{K^2 \sin.^2 z. \operatorname{tang}. L}{2N^2 \sin. 1''} + \frac{K^3 \sin.^2 z. \cos. z}{6N^3 \sin. 1''}(1 + \operatorname{tang}.^2 L)\right) \times$$
$$\times \left(1 + e^2 \cos.^2 L + e^4 \cos.^2 L + \frac{3\, e^2 K}{2N} \cos. z. \sin. L. \cos. L\right)$$

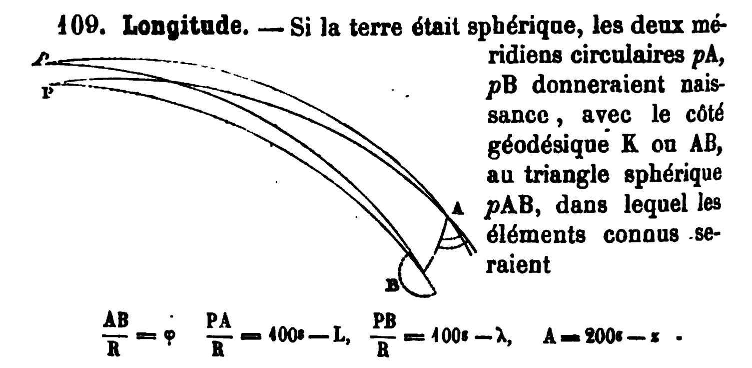
formule qui rentre dans celle que nous avons donnée, lorsqu'on néglige les troisièmes puissances de $\frac{K}{N}$ et de l'excentricité. Des tables insérées dans le volume précité et calculées par M. Hossard permettent de corriger les latitudes obtenues par les for-

mules usitées, au moyen des termes supplémentaires de la formule transcrite ci-dessus.

Il est bon d'avoir à chaque instant des vérifications des calculs effectués ; aussi, calcule-t-on la latitude d'un point au moyen de celles des deux autres points appartenant au même triangle, en suivant un ordre qui sera indiqué plus tard. Les deux résultats obtenus jusqu'aux centièmes de seconde qui, répondant à 0m,1 moyennement, doivent être calculés pour qu'on ait la certitude de position au dixième de seconde ou au mètre, devront être identiques à une unité près du dernier ordre, si le *calcul* n'a pas renfermé d'erreur de chiffres.

Cette vérification ne s'applique en effet qu'au calcul lui-même, calcul qui ne fait que résoudre indirectement le triangle géodésique, sans rien faire préjuger sur l'exactitude de ce triangle. Cette exactitude ne peut ressortir que des vérifications d'ensemble obtenues par le secours de bases de vérification ou accessoirement par celui de coordonnées géographiques observées astronomiquement, comme cela a été expliqué au premier chapitre du présent livre II.

109. Longitude. — Si la terre était sphérique, les deux méridiens circulaires pA, pB donneraient naissance, avec le côté géodésique K ou AB, au triangle sphérique pAB, dans lequel les éléments connus seraient



$$\frac{AB}{R} = \varphi \quad \frac{PA}{R} = 400^g - L, \quad \frac{PB}{R} = 400^g - \lambda, \quad A = 200^g - z$$

en conservant les mêmes désignations que ci-dessus.

Dans ces circonstances, en supposant que M et M′ soient les longitudes rapportées à un méridien quelconque de départ, et comptées positivement à l'ouest, ainsi qu'il est d'usage de le faire, la différence des longitudes sera donnée par la formule des quatre sinus,

$$\sin. p = \sin. (M' - M) = \sin. \varphi \frac{\sin. z}{\cos. \lambda} .$$

p et φ étant très-petits, on peut employer les développements en séries, de leurs lignes trigonométriques, et prendre en conservant les troisièmes puissances

$$p-\frac{p^3}{6}=\varphi\frac{\sin. z}{\cos. \lambda}-\frac{\varphi^3}{6}\frac{\sin. z}{\cos. \lambda}$$

Cette équation serait résolue de la même manière que l'équation correspondante des latitudes, c'est-à-dire, par approximations; dans les circonstances ordinaires, on néglige les troisièmes puissances comme dans le cas précédent et on se borne à prendre

$$p=\mathrm{M}'-\mathrm{M}=\varphi\frac{\sin. z}{\cos. \lambda}$$

Si au lieu de considérer la terre comme sphérique, nous la regardons comme ellipsoïdale, quelles seront les modifications qu'il faudra introduire dans la formule?

Menons les deux méridiens elliptiques PA, PB ; ils formeront en P un angle égal à p, en sorte que le premier membre de la formule ne devra pas être modifié. Quant au second membre $\varphi\frac{\sin. z}{\cos. \lambda}$, ses éléments devraient être légèrement altérés si on conserve à φ, z et λ leur signification antérieure.

Le rayon de la sphère hypothétique que nous avons choisie peut être pris arbitrairement; supposons-le égal à la grande normale N' du point inconnu B, dont la latitude vraie L', déterminée précédemment, sera égale à λ, puisque alors l'ellipse PB et l'arc de cercle pB seront tangents l'un à l'autre.

Le côté géodésique K, situé en réalité sur l'ellipsoïde, n'appartiendra pas rigoureusement à la sphère de rayon N'; mais l'erreur commise, en le supposant situé sur cette sphère, sera d'autant plus petite que nous avons annoncé que parmi toutes les sphères tangentes à l'ellipsoïde celle dont le rayon est égal à la grande normale se rapproche le plus de lui, moyennement dans tous les sens; le faible aplatissement de l'ellipse génératrice indique alors qu'on ne commettra qu'une bien faible erreur en prenant $\varphi=\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{N}'}$.

Il reste encore à apprécier la modification que devrait subir l'azimut z appartenant à la terre ellipsoïdale pour pouvoir appartenir à la terre sphérique de rayon N' et être employé dans la

formule qui a résolu le triangle sphérique pAB. L'angle à employer à la place de z devrait être celui qui est formé par le côté géodésique et par l'arc de cercle pA, tandis que z est celui que forme ce même côté avec l'arc de l'ellipse PA. Mais remarquons que le second de ces angles est simplement la réduction à l'horizon du premier, réduction qui devrait être effectuée au moyen d'angles de hauteur qui seraient zéro pour les deux côtés AB communs, et l'inclinaison des méridiens réel et hypothétique PA et pA l'un sur l'autre, inclinaison nécessairement très-petite par suite du rapprochement des points comparés A et B, et par suite également du petit aplatissement de la terre. On pourra alors, en se rappelant combien est petite la réduction habituelle des angles à l'horizon, pour des inclinaisons sensibles, considérer l'azimut vrai z comme exprimant assez exactement l'angle A du triangle sphérique pAB.

La formule des longitudes pourra donc être écrite, après réduction en secondes, sous la forme

$$M' - M = \frac{K}{N'} \frac{\sin. z}{\cos L'} = \frac{K (1 - e^2 \sin.^2 L')^{\frac{1}{2}}}{A \sin. 1''} \sin. z. \sec. L'$$

On écrit habituellement ce résultat, sous la forme

$$M' = M + RK \sin. z \sec. L'$$

dans laquelle $R = \frac{(1 - e^2 \sin.^2 L')^{\frac{1}{2}}}{A \sin. 1''}$ est calculé facilement au moyen de tables très-succinctes dont l'argument est la latitude L'.

La vérification de calcul dont nous avons parlé à la fin du paragraphe précédent s'applique également à la recherche des longitudes.

Pour les grands côtés géodésiques, cette formule est affectée d'une erreur de sphéricité analogue à celle relative aux latitudes; elle provient de ce que nous avons développé en séries les sinus des petits angles p et φ en négligeant les troisièmes puissances de ces angles. Leur rétablissement et la résolution de l'équation qui en résulte, par la méthode indiquée précédemment conduit à la formule

$$M' - M = \frac{K \sin. z}{N' \sin. 1'' \cos. L'} + \frac{K^3}{6 N'^3 \sin. 1''} \left(\frac{\sin.^3 z}{\cos.^3 L'} - \frac{\sin. z}{\cos. L'}\right);$$

le terme de la correction, applicable seulement aux très-grands

côtés géodésiques, c'est-à-dire aux très-grandes valeurs de $\frac{K}{N}$, a d'autant plus d'influence que l'azimut est proche de 100^g, et que les observations se font à des latitudes élevées.

110. Azimut. — Les latitude et longitude d'un second point étant déterminées au moyen des éléments correspondants d'un premier point, de la longueur du côté géodésique qui les joint et de l'azimut de ce côté au méridien du premier point, il est encore nécessaire, en vue des opérations suivantes, de calculer l'azimut de ce même côté au méridien du second point.

Considérons la même sphère de rayon N′ que nous avons employée pour le calcul de la longitude. Nous aurons le même triangle sphérique A*p*B de la figure précédente, dans lequel tous les éléments seront actuellement connus, à l'exception de l'angle B qui est lié à l'azimut cherché par la relation $B = z' - 200^g$.

Le moyen de résolution qui conduit au résultat le plus commode, quoiqu'il ne paraisse pas le plus simple à priori, est celui qui résulte de l'emploi d'une des analogies de Néper, dont la forme générale est

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A+B) = \text{cot.}\ \tfrac{1}{2}C\ \frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}(a-b)}{\cos.\ \tfrac{1}{2}(a+b)}$$

Dans le cas actuel on a, en supposant que la terrre soit réellement sphérique

$$a = 100^g - L,\quad b = 100^g - L',\quad A = 200^g - z,\quad B = z' - 200^g,$$
$$C = p = M' - M.$$

en sorte que la formule devient

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(z'-z) = \text{cot.}\ \tfrac{1}{2}(M'-M)\ \frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}(L-L')}{\sin.\ \tfrac{1}{2}(L+L')}$$

renversant chaque membre de cette équation

$$\text{cot.}\ \tfrac{1}{2}(z'-z) = \text{tang.}\left(100^g - \tfrac{1}{2}(z'-z)\right) = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(M'-M)\ \frac{\sin.\ \tfrac{1}{2}(L+L')}{\cos.\ \tfrac{1}{2}(L-L')}$$

Remarquons que si les méridiens considérés avaient leurs deux éléments situés en A et B parallèles, les azimuts z' et z différeraient de 200^g ; il n'en sera pas rigoureusement ainsi, mais l'extrême rapprochement des points comparés rendra la différence $100^g - \frac{1}{2}(z'-z)$ très-petite, en sorte qu'on pourra la

confondre avec sa tangente. Il en sera de même de $\frac{1}{2}$ (M′ — M), et la formule des azimuts pourra s'écrire, en supprimant le dénominateur cos. $\frac{1}{2}$ (L — L′) toujours très-proche de l'unité,

$$100^g - \frac{1}{2}(z' - z) = \frac{1}{2}(M' - M) \sin. \frac{1}{2}(L + L')$$

$$z' = z + 200^g - (M' - M) \sin. \frac{1}{2}(L + L').$$

Cette formule dans laquelle on conserve quelquefois le dénominateur cos. $\frac{1}{2}$ (L — L′) est suffisamment exacte pour les opérations les plus délicates de la géodésie. Comme elle a été établie dans l'hypothèse de la terre sphérique, la forme ellipsoïdale devrait bien à la rigueur donner lieu à une correction, mais elle est insignifiante. L'azimut vrai serait celui formé par le côté K avec l'ellipse méridienne passant par le point B, tandis que l'azimut obtenu est l'angle formé par ce même côté avec l'arc de cercle appartenant à la sphère. Ces angles seront égaux si nous supposons que le rayon de cette sphère soit celui de la grande normale au point B ; l'arc *p*B mesurera toujours le complément de la latitude L′, mais il n'en sera plus rigoureusement de même de l'arc *p*A qui différera de 100^g — L ; cette différence sera du genre de celle que nous avons désignée par λ — L′ dans le calcul de la latitude, différence qui, petite en elle-même, produirait sur sin. $\frac{1}{2}$ (L + L′) une variation encore plus petite qui devrait être multipliée par le petit angle $\frac{1}{2}$ (M′ — M) ; en assimilant à L, l'angle mesuré par *p*A on ne commettra donc pas d'erreur appréciable. Il en sera de même en confondant les azimuts de AB aux deux méridiens elliptique et sphérique passant par le point A, comme cela a déjà été fait dans le calcul des longitudes.

La résolution du triangle sphérique ABC considéré comme appartenant à la sphère osculatrice dans le sens du parallèle, au point B, a donc conduit à des conséquences exactes, même pour les cas les plus délicats.

Mais l'équation finale a été déduite de cette résolution par l'emploi des développements en séries des petits angles 100^g — $\frac{1}{2}$ (*z*′ — *z*) et $\frac{1}{2}$ (M′ — M), développements dans lesquels on a supprimé les troisièmes puissances. Il semblerait donc y avoir lieu d'introduire une correction analogue à celles introduites dans les formules de latitude et longitude lorsque les côtés employés sont très-grands. Mais à l'inspection de la formule finale on peut voir que les variations d'azimuts sont proportionnelles à celles des longitudes, et que le coefficient de la proportionnalité sin. $\frac{1}{2}$ (L + L′) est toujours plus petit que un. La recherche des varia-

tions d'azimuts peut donc être faite avec un peu moins d'exactitude que celle des longitudes. Aussi se contente-t-on dans tous les cas de la formule que nous avons donnée plus haut.

Formation des azimuts. — Nous avons dit qu'afin d'avoir des vérifications de calcul toujours indispensables dans les opérations longues et délicates, il fallait obtenir les coordonnées géographiques d'un troisième sommet de triangle au moyen de celles des deux sommets à la base.

Pour exécuter ce double calcul, il est nécessaire de connaître les deux azimuts des côtés K et K′ par rapport aux méridiens des points connus A et B ; l'inspection de la figure fait voir que le premier est égal à z augmenté de l'angle A du triangle ABC, et que le second est égal à z' diminué de l'angle B du même triangle. Pour ne pas être obligé de faire une figure dans chaque circonstance, l'habitude est d'exécuter le calcul double en commençant par le point de droite, et de former l'azimut correspondant en retranchant l'angle dont le sommet est à ce point de droite, de l'azimut du côté connu par rapport au méridien de ce point ; la seconde opération relative au point de gauche forme l'azimut nécessaire à son calcul, en ajoutant l'angle du triangle dont le sommet est à ce point, à l'azimut du côté connu, par rapport à son méridien.

La droite et la gauche sont comptées pour un observateur qui sarait au point à déterminer. Il est presque superflu d'ajouter que les trois points A,B,C, ne sont pas pris arbitrairement ; ils doivent appartenir à un triangle observé.

C'est dans le but d'arriver à la formation de ces azimuts nécessaires aux opérations subséquentes, qu'on a dû calculer l'azimut du côté AB par rapport au méridien de B, après avoir obtenu les latitude et longitude de celui-ci. Les points du troisième ordre ne pouvant pas, à leur tour, être employés à en déterminer d'autres, il n'y a pas lieu, pour eux, d'effectuer ce calcul.

La vérification des azimuts calculés est indiquée par la figure qui fait voir que pour un même point C, la différence de ces angles relatifs aux deux côtés AC, CB est égale au troisième angle du triangle employé.

Quand l'azimut de droite est plus petit que celui de gauche, il faut, pour rendre la soustraction possible, lui ajouter 400ᵍ, et la différence est toujours, comme l'indique la figure, l'angle C du triangle. La même observation s'applique à la formation des azimuts pour laquelle il est quelquefois nécessaire d'ajouter ou de retrancher 400ᵍ à l'un des angles, pour rendre l'opération possible.

111. Imperfection des coordonnées géographiques calculées. — Les formules précédentes reposent toutes sur l'hypothèse que la terre est un ellipsoïde de révolution, et les résultats numériques qui seront fournis par elles dépendront encore des dimensions et de l'aplatissement de celui-ci. Ces résultats seront donc inexacts si l'hypothèse l'est elle-même. Nous avons dit au chap. V, que la dissemblance des figures de la terre déduites d'opérations différentes portait à croire que cette figure avait quelques irrégularités.

Ces irrégularités, qui proviennent ou qui se traduisent plutôt par des déviations de la verticale, déviations qui devraient être estimées par rapport aux normales à l'ellipsoïde fictif, n'affectent pas les latitudes et longitudes réelles qui ne sont plus représentées alors par celles qui proviennent du calcul basé sur l'existence hypothétique de cet ellipsoïde.

On a recherché quelle était l'importance de ces déviations de la verticale, dans le but de rétablir les latitudes et longitudes calculées telles qu'elles devraient être. Nous n'approuvons pas le but dans lequel ces recherches ont été faites. Nous traiterons avec détail cette recherche des déviations de la verticale dans le chapitre V du livre III ; mais comme les matières qui y seront traitées ne font pas partie de la géodésie usuelle et que quelques lecteurs ne les étudieront probablement pas, nous dirons ici quelques mots de ce qu'il importe le plus de connaître.

Les latitudes et longitudes géodésiques sont certes souvent inexactes, par suite de ce qui vient d'être dit plus haut. Peut-on estimer les corrections qu'elles devraient subir, et il y a-t-il lieu de faire ces corrections quand on les connaîtra ?

Depuis plusieurs années, quelques savants allemands et anglais ont proposé de résoudre la première question en supposant qu'en un lieu quelconque la déviation de la verticale provenait de l'augmentation locale de masse apportée à l'ellipsoïde terrestre par le relief du terrain environnant. On comprend,

qu'après l'exécution d'une carte, toutefois, on puisse estimer approximativement cette masse, et en la comparant à la masse terrestre totale, trouver la déviation qu'elle doit produire sur le fil à plomb. Le procédé est-il bien exact? tient-il bien compte des densités du volume ajouté? tient-il compte des augmentations de densités de quelques parties de la croûte solide situées au-dessous du relief? tient-il compte enfin des cavités qui peuvent se trouver dans le sol? Nous ne le pensons pas.

Le chapitre V du livre suivant indique un moyen de trouver les déviations de la verticale indépendamment de toutes ces hypothèses sur la nature de la cause qui les produit, mais cela dans un but plutôt scientifique que pratique, car nous nions l'utilité de corrections à faire subir aux coordonnées géographiques obtenues par le calcul géodésique.

Il serait certes à désirer que la concordance fût rétablie dans les tableaux destinés à l'inscription des latitudes et longitudes des points remarquables. Mais ce n'est pas là qu'est le but pratique de la géodésie, et nous ne nous occupons actuellement que de celui-ci, la confection d'une carte topographique; pour l'exécution de cette carte, il faut conserver les latitudes données par le calcul, c'est-à-dire se rapportant à l'ellipsoïde adopté.

En effet, admettons qu'en un lieu on ait pu trouver la déformation réelle subie par cet ellipsoïde, comment pourra-t-on l'utiliser pour la confection de la carte, pour le développement sur un plan? Il aura fallu admettre comme toujours un système de projection, système à grand'peine établi pour représenter une surface géométrique régulière, comme l'ellipsoïde; que fera-t-on sur ce système, de la déformation locale reconnue?

En conservant au contraire les latitudes géodésiques, on pourra continuer à se servir d'un mode de projection possible, et y aura-t-il un grand inconvénient à ce qu'il en soit ainsi? Non, car où était la nécessité absolue de projeter les sommets de triangles sur une surface rigoureusement horizontale? Quand celle-ci devient irrégulière, impossible à développer même approximativement, pourquoi ne pas admettre que la surface de projection sera celle de l'ellipsoïde qui convient assez bien à l'ensemble de la terre, et que les points y seront projetés par des *normales* à cette surface?

Pour le nivellement, la même hypothèse ne serait plus admissible; mais nous verrons au chap. IX que la forme terrestre lui est indifférente et que forcément les altitudes qui proviennent

d'observations qui invoquent l'existence réelle de la verticale sont comptées sur les verticales de tous les lieux.

112. Distances à la méridienne et à sa perpendiculaire.—Ces distances, utilisées seulement dans la projection de Cassini, ne sont plus employées actuellement par suite de l'adoption du système de développement plus avantageux utilisé pour l'exécution de la carte de France de l'État-major; aussi, n'indiquerons-nous que succinctement le moyen qu'on pourrait employer pour les déterminer, s'il y avait lieu de le faire.

Nous avons expliqué au § 103 comment on obtient ces distances pour un premier point du canevas joint à l'origine des coordonnées qui est située à la rencontre du méridien principal et de son perpendiculaire passant par le milieu du terrain à représenter. Nous avons dit ensuite comment les géographes apportaient au système de Cassini une modification qui simplifiait excessivement les calculs, mais en annulant complétement ce système et en traitant la surface terrestre comme si elle était plane. Il nous reste à expliquer comment on pourrait agir pour avoir les distances à la méridienne et à la perpendiculaire avec exactitude.

Les formules qui donnent les différences de latitude et de longitude de deux points consécutifs du canevas, formules trouvées aux §§ 108 et 109, sont pour le cas où la terre est supposée sphérique.

$$L - L' = \varphi \cos. z + \frac{\varphi^2}{2} \operatorname{tang.} L \sin.^2 z \quad \text{et} \quad M' - M = \varphi \frac{\sin. z}{\cos. L}.$$

Traduisons les angles φ, $L - L'$, $M' - M$ et L en longueurs d'arcs de cercle du rayon terrestre R; désignons à cet effet, par y et y' les arcs de méridiens qui séparent de l'équateur les points dont les latitudes sont L et L', et appelons x et x' les longueurs des arcs de l'équateur compris entre les méridiens des points comparés et un méridien quelconque pris pour origine. Nous aurons

$$L = \frac{y}{R}, \quad L - L' = \frac{y - y'}{R} \quad M' - M = \frac{x' - x}{R} \quad \varphi = \frac{K}{R}$$

expressions qui, transportées dans les équations précédentes, fournissent

$$y' = y - \mathrm{K}\cos. z - \frac{\mathrm{K}^2}{2\mathrm{R}}\,\mathrm{tang.}\,\frac{y}{\mathrm{R}}\,\sin.^2 z, \qquad x' = x + \mathrm{K}\,\frac{\sin. z}{\cos.\frac{y}{\mathrm{R}}}$$

Si on fait subir à tout le système des méridiens et parallèles terrestres un quart de révolution exécuté autour du diamètre équatorial appartenant à un méridien principal choisi, on donne naissance à la projection de Cassini, et les longueurs méridiennes et équatoriales que nous avons désignées par y et x deviennent les distances à la méridienne et à sa perpendiculaire mesurées, directement pour les premières, et par leurs projections sur le méridien principal pour les secondes. On pourra donc successivement, au moyen de ces formules, avoir toutes les distances des points du canevas aux deux axes de coordonnées, en partant de $x = o$, $y = o$ pour le point d'origine. L'élément essentiel du calcul, z, ne sera plus ici l'azimut habituellement employé en géodésie ; il devra exprimer l'angle compris entre le côté géodésique et l'arc du grand cercle qui passe par le pôle géométrique du méridien principal, et il se calculera également de proche en proche au moyen de la formule du § 110, qui devra s'écrire, dans le cas actuel, sous la forme

$$z' = z + 200^g - \frac{x' - x}{\mathrm{R}}\,\sin.\,\frac{y + y'}{2\mathrm{R}}$$

Il n'est pas nécessaire, dans l'emploi de ce système de projection, d'observer une première latitude ni une première longitude, mais il y a nécessité de faire à l'origine des coordonnées l'observation astronomique d'un premier azimut qui sera lié à l'azimut ordinaire qui exprime l'inclinaison sur le méridien, par la relation très-simple qui dit que leur différence devra être de 100^g.

Nous avons dit au § 103 et nous l'avons répété ci-dessus, que la simplification apportée par les géographes à la projection de Cassini, simplification qui a conduit aux formules

$$x' = x + \mathrm{K}\cos. \mathrm{Z}, \quad y' = y + \mathrm{K}\sin. \mathrm{Z}$$

revenait à supposer la terre plane. En effet, ces formules ne sont qu'un cas particulier de celles que nous avons données plus haut, dans lesquelles on supposerait $\mathrm{R} = \infty$, c'est-à-dire la terre plane, et $z = \mathrm{Z} + 100^g$, par suite de la différence de signification des azimuts introduits dans ces formules.

CHAPITRE VIII

NIVELLEMENT GÉODÉSIQUE

L'emploi combiné des bases obtenues par le calcul du réseau géodésique et des distances zénithales observées, permet d'exécuter un nivellement géodésique analogue au nivellement topographique; le premier, plus exact que le second par suite de l'usage de renseignements plus exacts eux-mêmes, sert d'appui à celui-ci, comme le canevas géodésique a servi pour le canevas topographique.

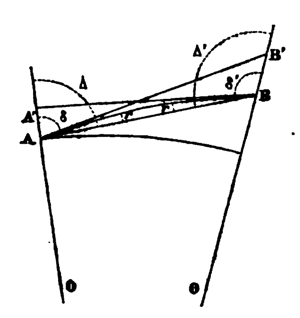
Nous avons indiqué comment on effectue la *réduction des distances zénithales aux sommets des signuax* (§ 90), réduction qui sert dans un des deux cas qui se présentent dans le nivellement géodésique. Il existe une seconde correction des distances zénithales que nous allons étudier.

113. Erreur de réfraction. — L'atmosphère n'a pas une densité uniforme, en sorte qu'un rayon lumineux qui la traverse ne suit pas une ligne droite. On sait que par suite des lois de la réfraction, ce rayon doit toujours rester dans le plan normal à la surface de séparation de deux corps transparents à travers lesquels il passe, en se rapprochant davantage de la normale, dans celui des deux corps qui est le plus dense. L'atmosphère peut être considérée, dans les circonstances ordinaires, comme composée d'une suite infinie de couches infiniment minces disposées horizontalement, dont la densité diminue quand la hauteur augmente.

Il résulte de la première condition à laquelle est assujetti le rayon lumineux, qu'il ne sortira pas d'un même plan vertical et que par conséquent la réfraction n'aura pas d'influence sur les angles horizontaux.

Mais il résulte aussi de la seconde qu'un rayon lumineux parti de B n'arrivera en A qu'après avoir parcouru une trajectoire BA dont la concavité sera tournée vers le sol ; les lois de

la réfraction indiquent également que la marche inverse serait suivie par le rayon qui, parti de A, arriverait en B. Les points B et A seront donc vus en B′ et A′ dans les prolongements des tangentes aux derniers éléments de cette trajectoire commune, en produisant sur les distances zénithales observées des erreurs angulaires égales aux angles formés par la corde AB avec les tangentes à la trajectoire, menées par ses points extrêmes.



Dans les opérations géodésiques, les points observés sont toujours peu éloignés et peu élevés les uns au-dessus des autres ; ils sont situés dans des couches d'air de densités peu différentes ; les trajectoires lumineuses ont par conséquent une petite courbure et une petite étendue. Dans ces circonstances, on peut donc les considérer comme se confondant avec leurs cercles osculateurs pendant tout leur parcours. On sera alors en droit de prendre $r = r'$, en désignant par r et r' les angles d'erreur commis sur les distances zénithales, et chacun d'eux aura pour mesure $\frac{A}{2R'}$, A étant la longueur de la courbe, R′ son rayon de courbure. Nous savons, d'un autre côté, que l'angle au centre O sous-tendu sur la terre de rayon R, par le côté géodésique K, a pour expression $O = \frac{K}{R}$; il en résultera donc assez approximativement

$$r = \frac{A}{K}\,\frac{R}{2R'}\,.\,O$$

Dans le cas de la terre plane et d'une atmosphère composée de couches horizontales de densités uniformes, K et A seraient rigoureusement égaux si les points considérés étaient à égale hauteur.

En réalité, ces trois circonstances n'existent pas ; mais, par suite des conditions particulières aux observations géodésiques, elles ne sont pas loin d'exister; on pourra donc approximativement écrire $K = A$, et la mesure de l'erreur de réfraction sera

$$r = \frac{R}{2R'}\,.\,O$$

Le même raisonnement ne peut pas être appliqué à R et R′, qui deviendraient également égaux, dans les mêmes hypothèses, parce qu'alors ils seraient l'un et l'autre infinis. On peut, en effet, regarder comme égales deux quantités qui tendent vers une limite très-rapprochée de leurs valeurs réelles, comme cela a lieu pour K et A, mais il n'est plus permis d'agir ainsi quand cette limite se trouve très-différente des valeurs qu'on veut assimiler, comme cela a lieu pour R et R′ qui, finis, sont très-loin de la limite ∞.

Pour un même angle au centre O, r ne variera donc qu'en raison de R′, rayon de courbure de la trajectoire ; on sera donc en droit d'écrire

$$r = nO$$

n étant un coefficient constant pour le même état atmosphérique, mais variable avec celui-ci, heureusement dans des limites assez rapprochées.

On est naturellement porté à se demander comment il se fait que deux points situés sur la même verticale, à des hauteurs différentes, donnent lieu à la même erreur de réfraction, quand on remarque que le plus élevé, situé dans une couche atmosphérique moins dense, envoie des rayons qui éprouveront un plus grand nombre de réfractions avant d'arriver à l'observateur. Pour lever cette objection, il suffit d'observer que le rayon parti du point le moins élevé rencontrera, il est vrai, un plus petit nombre de couches atmosphériques, mais qu'il les rencontrera sous des angles d'incidence plus grands, en sorte que si $\frac{\sin. i}{\sin. r} = C$ représente l'indice de réfraction relatif à deux couches successives communes aux deux trajectoires, on aura

$$\frac{\sin. i}{\sin. r} = \frac{\sin. i'}{\sin. r'} = C$$

d'où

$$\frac{\sin. i - \sin. r}{\sin. i} = \frac{\sin. i' - \sin. r'}{\sin. i'}$$

$$\frac{\sin. i' - \sin. r'}{\sin. i - \sin. r} = \frac{\sin. i'}{\sin. i}$$

Si $i' > i$, il s'ensuit $\sin. i' - \sin. r' > \sin. i - \sin. r$, et quoique dans un rapport différent

$$i' - r' > i - r.$$



Les déviations produites par les couches communes aux deux trajectoires seront donc plus grandes pour le rayon lumineux parti du point le moins élevé, et elles pourront par leur intensité compenser la multiplicité de celles éprouvées par l'autre rayon.

On sera donc toujours en droit d'écrire

$$r = n.O.$$

Coefficient de la réfraction.—La recherche théorique du coefficient, *n*, de la réfraction est très-délicate et de peu d'importance pratique pour les opérations géodésiques. Aussi dirons-nous seulement en quelques mots qu'elle consiste à prendre la valeur théorique de l'indice de réfraction qui est égal au rapport inverse des vitesses de la lumière dans les deux milieux

$$\frac{\sin. i}{\sin. r} = \frac{\sqrt{1 + P\rho'}}{\sqrt{1 + P\rho}} \qquad (1)$$

P étant le pouvoir réfringent de l'air, sensiblement le même, que l'atmosphère soit sèche ou humide, ρ et ρ' les densités des deux milieux. On suppose alors que les couches sont infiniment rapprochées, et on exprime les densités ρ et ρ' en fonction des pressions marquées par le baromètre et des températures indiquées par le thermomètre aux stations extrêmes de la trajectoire. On est obligé pour cela d'admettre une constitution atmosphérique particulière, dans laquelle la température suit, en raison de l'élévation des couches, une loi toujours entachée d'arbitraire. La loi des variations de ρ transportée alors dans l'équation (1), traitée comme une différentielle, donne l'accroissement infiniment petit de l'inclinaison sur la normale, et, par une intégration, donne la déviation totale du rayon lumineux entre les limites de l'observation.

Le procédé pratique suivant, beaucoup plus simple, suffit dans tous les cas.

On observe, de deux points A et B (fig. précédente), les distances zénithales *conjuguées* et *simultanées*, δ et δ' qui sont entachées de la même erreur de réfraction *r*, de sorte que les angles vrais auraient dû être

$$\Delta = \delta + r = \delta + n.O, \qquad \Delta' = \delta' + r = \delta' + n.O$$

Le triangle ABO de la précédente figure donne

$$\Delta + \Delta' = O + 200^g$$

par suite,

$$\delta + \delta' + 2 . n \theta = \theta + 200^g$$

$$n = \frac{1}{2} - \frac{\frac{\delta + \delta'}{2} - 100^g}{\theta}$$

les angles δ, δ', 100^g et θ doivent être exprimés avec la même unité, quelconque du reste.

Mais on sait que

$$\theta = \frac{K}{R} \text{ en rapport} = \frac{K}{R \sin. 1''} \text{ en secondes.}$$

L'expression finale du coefficient de la réfraction sera donc, en supposant δ, δ', 100^g exprimés par les nombres de secondes qu'ils renferment

$$n = \frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{\delta + \delta'}{2} - 100\right) R \sin. 1''}{K}$$

La valeur de n trouvée par le procédé que nous venons d'indiquer ne se rapportera qu'à l'état atmosphérique existant lors des observations *simultanées* qui ont fourni δ et δ'; sa valeur changera avec cet état, en sorte que dans un cas quelconque, à moins de recommencer toujours cette recherche, on ne saura pas au juste quelle est sa valeur réelle.

Heureusement cette connaissance exacte est peu importante, et il suffit de prendre une valeur approximative, par suite du peu d'influence de l'effet produit par la réfraction, sur les cotes d'un nivellement.

En faisant la recherche indiquée, dans des circonstances diverses, on a trouvé en France, pour le coefficient de la réfraction des valeurs variant entre les limites 0,06 et 0,1 ; on prend alors habituellement la valeur moyenne 0,08. C'est celle que nous avons indiquée lorsque nous nous sommes occupés du nivellement topographique. En Angleterre, les limites extrêmes ont été trouvées beaucoup plus écartées, et elles ont atteint quelquefois les valeurs 0,00 et 0,5.

Il serait inexact de dire que les limites 0,06 et 0,1 que nous admettons, sont très-rapprochées, mais leur grand écartement a peu d'influence sur les différences de niveau, parce que le terme affecté ne se rapporte qu'à une correction petite. Ce n'est

pas le coefficient n qui importe en réalité, mais bien son produit par l'angle au centre ; l'erreur angulaire

$$r = n.0 = n. \frac{K}{R \sin. 1''}$$

subira, il est vrai, des variations relatives assez fortes quand n variera, mais ses valeurs absolues seront toujours très-faibles.

Ainsi, on trouve facilement qu'en admettant la valeur $n =$ 0,08, et en raisonnant dans le cas de la terre sphérique, l'influence de la réfraction n'est que de 80″ pour un côté de 10000^m ; elle serait de 60″ et 1′ avec l'emploi des coefficients 0,06 et 0,1, produisant dans ces deux cas des erreurs de 20″. Ces erreurs ne sont certes pas complétement négligeables, et elles deviendraient proportionnellement plus fortes pour des côtés plus grands que 10000^m ; mais elles ne sont pas aussi grandes qu'on aurait pu le craindre, et on ne peut, du reste, pas les éviter.

Pour les atténuer autant que possible, il faut se rapprocher des circonstances auxquelles convient le mieux le coefficient 0,08, c'est-à-dire qu'il ne faut pas opérer par de grands vents, ni trop matin, ni trop tard, et faire en sorte que les rayons lumineux ne rasent pas un sol trop échauffé par un soleil ardent.

L'hypothèse que nous avons admise de l'horizontalité des couches d'air de même densité ne se réaliserait peut-être pas dans les circonstances que nous venons de mentionner, en sorte que non-seulement la réfraction n'aurait plus la mesure qu'on lui attribue, mais encore les rayons lumineux restant toujours dans les plans normaux aux surfaces de séparation, sortiraient des plans verticaux qui les contenaient, et donneraient naissance à des déviations latérales qui entacheraient d'erreur les angles horizontaux.

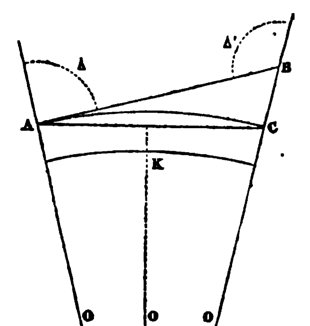
La correction des distances zénithales due à la réfraction ne s'effectue pas dans tous les cas ; on la réserve seulement pour celles des points du troisième ordre ; dans les deux autres ordres son influence paraît annulée par suite de la forme de l'expression algébrique employée, mais elle n'en existe pas moins à l'état latent dans la plupart des cas, ainsi que nous l'expliquerons plus tard.

Remarquons en terminant, que contrairement à ce qui a lieu pour le nivellement géodésique, il est bon de déterminer le coefficient n, au moyen de longs côtés qui donnent à K, δ, δ' des

valeurs importantes sur lesquelles les petites erreurs d'appréciation de ces éléments, auront moins d'influence que si elles portaient sur des quantités petites.

114. Calcul des différences de niveau. — Deux cas se présentent dans la recherche des différences de niveau. Pour le premier et le second ordre, on connaît les deux distances zénithales réciproques; pour le troisième, on ne connaît que celle qui a été observée au point de station.

Distances zénithales réciproques. — Soient Δ et Δ' les distances zénithales réciproques des deux points A et B qui sont à comparer. Si AC est un arc de cercle de la sphère qui se confond le mieux avec la surface terrestre dans le sens du côté géodésique K, la différence de niveau dN sera donnée par



$$dN = BC = \frac{AC \sin. BAC}{\sin. ABC}$$

dans laquelle les angles BAC, ABC devront être déterminés en fonction de Δ et Δ', ce que nous allons faire successivement.

On a d'abord

$$BAC = 200^g - \Delta - CAB = 200^g - \Delta - 100^g + \tfrac{1}{2}\,O = 100^g - \Delta + \tfrac{1}{2}\,O.$$

Mais le triangle ABO donne, comme nous l'avons déjà trouvé une première fois dans la recherche du coefficient de la réfraction,

$$\Delta + \Delta' = 200^g + O \quad \text{ou} \quad 100^g + \tfrac{1}{2}\,O = \frac{\Delta + \Delta'}{2}$$

Donc

$$BAC = \frac{\Delta + \Delta'}{2} - \Delta = \frac{\Delta' - \Delta}{2}$$

Le second angle à connaître ABC sera fourni par le triangle ABO,

$$ABC = 200^g - O - BAO = 200^g - O - (BAC + CAO)$$

$$= 200^g - O - \left(\frac{\Delta' - \Delta}{2} + 100^g - \frac{O}{2}\right) = 100^g - \frac{O}{2} - \frac{\Delta' - \Delta}{2}$$

Par suite
$$dN = AC.\frac{\sin.\frac{\Delta'-\Delta}{2}}{\cos.\left(\frac{O}{2}+\frac{\Delta-\Delta'}{2}\right)}$$

$$dN = AC.\frac{\sin.\frac{\Delta'-\Delta}{2}}{\cos.\frac{O}{2}\cos.\frac{\Delta'-\Delta}{2}-\sin.\frac{O}{2}\sin.\frac{\Delta'-\Delta}{2}}$$

$$= AC\frac{\sin.\frac{\Delta'-\Delta}{2}}{\cos.\frac{O}{2}\cos.\frac{\Delta'-\Delta}{2}\left(1-\text{tang.}\frac{O}{2}\text{ tang.}\frac{\Delta'-\Delta}{2}\right)}$$

Cette formule est jusqu'à présent rigoureuse, mais on peut la simplifier, en lui faisant perdre un peu de sa rigueur, ce qui est permis par suite de la petitesse de dN, en observant 1° que la corde AC peut être confondue avec l'arc de cercle qu'elle soustend, et celui-ci avec le côté géodésique K qui en est la projection sur les eaux moyennes de la mer; ce dont on s'assurerait facilement en prenant quelques exemples numériques se rapportant aux circonstances habituellement possibles; 2° que le second terme de la parenthèse du dénominateur, composé du produit de deux facteurs petits, peut être négligé par rapport à l'unité.

On pourra alors employer la formule,

$$dN = K \text{ tang. } \tfrac{1}{2}(\Delta'-\Delta)\text{ sec. }\frac{O}{2}$$

qu'on se contente d'écrire habituellement

$$dN = K \text{ tang. } \tfrac{1}{2}(\Delta'-\Delta)$$

par suite de la petitesse de l'angle au centre O, qui donne à sec. $\frac{O}{2}$ une valeur très-proche de l'unité.

Nous avons supposé que Δ et Δ' représentaient les distances zénithales réciproques des deux points de station; en désignant par δ et δ' celles qui ont été réellement observées, on devrait prendre

$$dN = K \text{ tang. } \tfrac{1}{2}(\delta'-\delta+r'-r)$$

r et r' étant les deux erreurs dues à la réfraction.

Mais si on suppose que les observations ont été faites avec un

même état atmosphérique, c'est-à-dire *simultanément,* ces erreurs r et r' deviennent égales et la différence de niveau se réduit à

$$dN = K \text{ tang. } \tfrac{1}{2} (\delta' - \delta)$$

formule qui *semble* indépendante de la réfraction. L'annulation de celle-ci n'est qu'apparente, dans la plupart des cas du moins, car la supposition de simultanéité est très-rarement satisfaite et elle ne peut pas, du reste, être obtenue sans une grande incommodité pratique, en sorte que l'assimilation de r à r' revient à supposer égaux entre eux les coefficients de la réfraction relatifs aux deux états de l'atmosphère, ce qui produit la même erreur que l'assimilation d'une valeur particulière de ces coefficients à la moyenne 0,08 que nous avons admise.

Pour obvier en partie à l'erreur résultant de la différence des états atmosphériques, il est bon de n'opérer que lorsque ceux-ci sont dans une sorte d'état moyen répondant alors au même coefficient, c'est-à-dire par un temps tel que nous l'avons indiqué précédemment, et de se rapprocher encore de cet état, en multipliant les observations pendant différentes journées et à différentes heures. Il est presque inutile de dire que ces précautions ne peuvent être réellement prises que pour des opérations excessivement importantes, et que dans presque tous les cas, on laisse subsister l'influence de l'erreur qu'on ne pourrait pas corriger sans de trop grands soins.

Les distances zénithales observées δ et δ' ont été supposées *réciproques* ou *conjuguées*, c'est assez dire qu'elles ont dû être réduites aux sommets des signaux.

Distances zénithales simples. — Lorsqu'il s'agit de déterminer la cote d'un point du troisième ordre, on ne dispose plus que d'une seule distance zénithale. On opère alors comme en topographie.

Reprenons la formule primitive du cas précédent,

$$dN = K \frac{\text{sin. BAC}}{\text{sin. ABC}}$$

Nous avons, dans ce même cas, trouvé, $\text{BAC} = 100^g + \tfrac{1}{2} O - \Delta$ et le triangle BAO donne immédiatement $\text{ABC} = \Delta - O$.

Par suite

$$dN = K \frac{\text{cos. } (\Delta - \tfrac{1}{2} O)}{\text{sin. } (\Delta - O)}$$

Cette formule très-simple peut encore être simplifiée, si l'on observe que $\Delta - 0$ étant toujours très-près de 100^g, le sinus de $\Delta - 0$ différera très-peu de celui de $\delta - \frac{1}{2} 0$, ce qui permettra d'écrire

$$dN = K \cot. (\Delta - \tfrac{1}{2} 0).$$

Le même raisonnement ne pouvait pas se faire pour transformer le numérateur, car on aurait fait subir à l'angle la même variation $\frac{1}{2} 0$, il est vrai, mais cet angle entre dans la formule par son cosinus qui varie rapidement près de 100^g.

La distance zénithale réellement observée étant δ, il y a lieu de la corriger de la réfraction pour avoir $\Delta = \delta + n0$, en attribuant au coefficient de la réfraction, la valeur moyenne 0,08, et l'on a

$$dN = K \cot. (\delta + n0 - \tfrac{1}{2} 0) = K \cot. (\delta - 0{,}42.0)$$

formule qu'on ramène ensuite, en sacrifiant un peu de sa rigueur à celle qui est employée pour le nivellement topographique. Si on applique la formule qui donne la cotangente de la somme de deux angles au cas actuel, on aura

$$\cot. (\delta - 0{,}42\, 0) = \frac{\cot. \delta + \text{tang. } 0{,}42.0}{1 - \cot. \delta \text{ tang. } 0{,}42.0}$$

Le produit des deux facteurs très-petits du dénominateur est négligeable par rapport à l'unité, et la tangente de l'angle 0,42.0 toujours petit, surtout pour les points conclus, est sensiblement égale à cet angle, en sorte qu'on peut écrire

$$dN = K \cot. (\delta - 0{,}42.0) = K \cot. \delta + 0{,}42. \frac{K^2}{R}$$

Il n'y a pas lieu de faire ici la réduction des distances zénithales aux sommets des signaux ; il suffit de retrancher avec son signe de *dh* du § 90, c'est-à-dire, qu'il suffit d'ajouter cette quantité à la cote obtenue quand on stationne au-dessus du point, et de la retrancher quand on stationne au-dessous, ce qu'exprime la formule

$$dN = K \cot. \delta + 0{,}42 \frac{K^2}{R} - dh$$

115. Remarques relatives au nivellement. — Les bons nivellements géodésiques doivent être faits en employant des petits côtés. Soit, en effet, une longue base $K = K' + K'' + K'''$...

Si, stationnant seulement à une extrémité de cette base, on a obtenu une distance zénithale Δ, la différence de niveau sera $dN = K \cot. \Delta + QK^2$, Q étant le coefficient de la correction relative à la différence du niveau vrai au niveau apparent, et à la réfraction. Si, au contraire, on a opéré sur les petites bases successives K', K'', K'''....., on a obtenu, pour la différence de niveau totale,

$$K' \cot. \Delta' + K'' \cot. \Delta'' + ... + QK'^2 + QK''^2 + ...$$

Mais les distances zénithales seront entachées d'erreurs telles que $\Delta = \delta + e$, $\Delta' = \delta' + e'$, $\Delta'' = \delta'' + e''$....., δ, δ', δ''..... étant les valeurs vraies de ces angles : le résultat de l'opération exécutée sur la grande base, sera, en admettant de plus une erreur q sur le coefficient Q.....,

$$K \cot. \delta - Ke + (Q + q) K^2 \qquad (1)$$

L'opération exécutée sur les bases partielles conduirait à

$$K' \cot. \delta' + K'' \cot. \delta'' + ... - K'e' - K''e''..... + (Q + q)\ (K'^2 + K''^2 + ...) \quad (2)$$

La vraie valeur de la différence de niveau est

$$K \cot. \delta + QK^2 \quad \text{ou} \quad K' \cot. \delta + K'' \cot. \delta'' + ... + Q\ (K'^2 + K''^2.....) \quad (3)$$

L'erreur commise dans le premier cas sera donc

$$(1)-(3) = Ke - qK^2 = (K' + K'' + ...)\ e - (K' + K''.....)^2.q$$

Dans le second, elle sera

$$(2)-(3) = K'e' + K''e'' + ... - q\ (K'^2 + K''^2 + ...)$$

Il n'y a aucune raison pour supposer que e', e''..... soient toujours de même signe ; par conséquent il y aura compensation entre certains des termes $K'e'$, $K''e''$.....; le cas le plus défavorable serait celui où des erreurs seraient de même signe et égales à l'erreur maximum possible ; soit e ce maximum. Dans ce cas, on n'aurait jamais que

$$(K' + K'' + ...)\ e = Ke$$

Dans tout autre cas $K'e' + K''e'' + ... < Ke$.

Il est de même évident que $(K'^2 + K''^2 + ...)\ q < K' + K''...)^2$ q ou $q\ K^2$.

Comme il n'y a pas lieu de s'occuper des signes relatifs des deux termes qui composent l'erreur totale, ces signes pouvant être quelconques, il résulte de ce qui précède cette conséquence

qu'il y a avantage à exécuter un nivellement géodésique en opérant sur de petits côtés successifs.

Cet avantage résulte encore de la diversité des erreurs commises sur le coefficient de la réfraction, erreur que nous avons supposée la même pour simplifier la question, mais qui, en réalité, pourra être affectée de signes contraires provenant d'états atmosphériques différents.

Nullité de l'influence de la figure de la terre. — La figure de la terre n'a pas d'influence sensible sur la détermination du canevas géodésique; elle n'apparaît, mais alors avec une certaine gravité, que dans la transformation de ce canevas en coordonnées géographiques. Elle perd encore toute influence sensible sur le nivellement; en effet, dans l'une des deux formules de ce nivellement $dN = K \cot. \frac{1}{2} (\delta' - \delta)$, le rayon de la sphère locale qui représenterait le mieux la terre au lieu de l'observation, n'apparaît pas du tout, et dans l'autre, $dN = K \cot. \delta + 0{,}42 \frac{K^2}{R}$, il ne figure que dans le terme correctif toujours très-petit $0{,}42 \frac{K^2}{R}$. On peut se demander comment il se fait que son influence soit ainsi annulée complétement dans un cas et pas dans l'autre ; cela tient à la suppression un peu inexacte du facteur sec. $\frac{O}{2}$ faite dans la première équation. L'effet produit par cette suppression est du reste très-peu important ; en le rétablissant on aurait

$$dN = K \frac{\cot. \frac{1}{2} (\delta' - \delta)}{\cos. \frac{1}{2} O} = K \frac{\cot. \frac{1}{2} (\delta' - \delta)}{1 - \frac{O^2}{4}} = K \cot. \frac{1}{2} (\delta' - \delta) \left(1 + \frac{O^2}{4}\right)$$

le terme correctif négligé serait donc simplement

$$K \cot. \frac{1}{2} (\delta' - \delta) \frac{O^2}{4} = K \cot. \frac{1}{2} (\delta' - \delta) \frac{K^2}{4 R^2}$$

dont le rapport à la valeur conservée $K \cot. \frac{1}{2} (\delta' - \delta)$ serait exprimé par $\frac{K^2}{4 R^2}$, rapport excessivement petit qui indique que le terme lui-même étant toujours petit, il n'y a aucun inconvénient à établir cette suppression.

Il n'y a pas lieu de s'étonner de la très-faible influence de la courbure de la terre, dans le nivellement, si on observe que par suite du changement successif de stations, les observations

tiennent compte elles-mêmes des inflexions successives des verticales.

Point de départ des cotes. — Les cotes doivent toutes être rapportées à la même surface horizontale, c'est-à-dire, à la surface continue qui est perpendiculaire à toutes les verticales qu'elle rencontre; cette surface est en effet celle que décrivent les parallèles au niveau, par rapport auxquelles on calcule successivement les différences de niveau qui s'ajoutent avec leurs signes; les cotes dépendront donc de la hauteur à laquelle on aura choisi cette surface horizontale et par suite de la hauteur d'un premier point lui appartenant. Anciennement, certains services publics changeaient la surface de comparaison en la supposant toujours au-dessus de l'ensemble du terrain, ce qui présentait une certaine anomalie avec l'idée de hauteurs dont les valeurs numériques devenaient plus petites quand l'altitude augmentait, et ce qui de plus donnait naissance à un isolement de travaux qui, pour être reliés, exigeaient un travail de comparaison des surfaces de départ.

Depuis quelques années tous les services publics doivent exprimer les cotes par rapport à la même surface horizontale, qui a été choisie celle des eaux moyennes de la mer, déterminée au moyen d'échelles placées dans les ports, échelles sur lesquelles on trace avec beaucoup de soins les traces des hautes et basses mers, pendant un grand nombre de journées calmes. Pour le calcul des altitudes géodésiques, il suffit alors de partir d'un de ces points, auquel on attribue la cote zéro, ou plutôt de le relier par un nivellement à un sommet géodésique voisin. On pourrait également, si on n'avait pas de renseignement préalable, commencer le calcul des cotes en un point quelconque coté arbitrairement et le conduire jusqu'au bord de la mer, où il fournirait un résultat qui serait une collimation à ajouter ou à retrancher de toutes les altitudes calculées.

Malheureusement les eaux moyennes de la mer n'appartiennent pas toujours à la même surface horizontale continue, par suite des influences de vents régnants, et surtout de la forme et de la nature du fond de la mer. M. Chazallon a reconnu que sur les côtes de Normandie, le niveau était moins élevé de $0^m,25$ du côté de l'embouchure de l'Orne, et plus élevé de la même quantité du côté de Dieppe, que celui de la surface d'équilibre qui, parfaitement horizontale et continue, proviendrait d'un repos

absolu de la mer, repos dû à l'absence supposée des actions lunaires et solaires. En sorte qu'un même travail de nivellement qui partirait de ces deux côtes normandes, produirait au point de rencontre une discordance de 0m,50.

Il serait bon qu'on pût rapporter tout nivellement géodésique à cette surface d'équilibre, pour établir plus de concordance dans les résultats partiellement obtenus ; mais cette surface est moins facile à obtenir, en un de ces points, que celle des eaux moyennes. M. Chazallon y est arrivé pour quelques ports, au moyen de marégraphes qui donnent une courbe dont les différents points appartiennent aux différentes hauteurs de la mer. En prenant ces hauteurs pour abscisses répondant à des ordonnées proportionnelles aux temps, on peut déterminer celles de ces hauteurs qui donneraient des surfaces supérieures et inférieures égales entre elles, surfaces limitées par une parallèle à la ligne des ordonnées, parallèle appartenant au niveau d'équilibre.

Calcul de la côte d'un point duquel on aperçoit l'horizon de la mer. — Soit A ce point, h sa hauteur au-dessus de la mer, Δ la distance zénithale ZAD qui répond au rayon visuel mené tangentiellement à l'horizon de la mer, et R le rayon terrestre.

Le triangle AOD fournit immédiatement

$$\cos. O = \sin. \Delta = \frac{R}{R+h} \qquad h = \frac{R(1-\sin. \Delta)}{\sin. \Delta}$$

$$h = R\frac{1-\cos. O}{\cos. O} = \frac{2R \sin.^2 \frac{1}{2} O}{\cos. O}$$

formule qui serait calculable par logarithme, mais qu'on préfère remplacer dans la manière suivante

$$h = \frac{2R. \sin. \frac{1}{2} O \times \sin. \frac{1}{2} O}{\cos. O}$$

dans laquelle on substitue à l'un des facteurs sin. $\frac{1}{2}$ O sa valeur tirée de l'équation 2 sin. $\frac{1}{2}$ O. cos. $\frac{1}{2}$ O $=$ sin. O, ce qui donne

$$h = 2R\frac{\sin. \frac{1}{2} O}{\cos. O} \times \frac{1}{2}\frac{\sin. O}{\cos. \frac{1}{2} O} = R \text{ tang. } O . \text{tang.} \frac{1}{2} O$$

L'angle au centre O est assez petit pour qu'on puisse admettre que tang. $\frac{1}{2}$ O $= \frac{1}{2}$ tang. O et alors $h = \frac{1}{2}$ R tang.^{2} O.

La distance zénithale vraie Δ est liée à celle de l'observation par la relation $\Delta = \delta + n\,O$, n étant le coefficient de la réfraction, et $O = \Delta - 100 = \delta + n\,O - 100^g$ ce qui donne $O = \frac{\delta - 100^g}{1 - n}$ et enfin

$$h = \frac{1}{2}\,R\,\text{tang.}^2\,\frac{\delta - 100^g}{1 - n}$$

Les résultats obtenus par ce procédé sont généralement peu exacts par suite de l'incertitude du pointé et de l'importance de la réfraction.

CHAPITRE IX

NIVELLEMENT BAROMÉTRIQUE

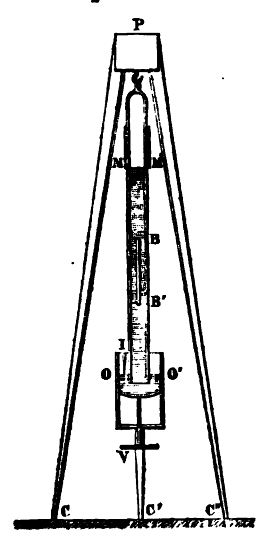
Le nivellement barométrique est surtout employé par les voyageurs, parce qu'il n'exige pas la connaissance d'un canevas. Quand on dispose de celui-ci, il vaut mieux employer le nivellement géodésique.

La colonne barométrique faisant équilibre à la pression atmosphérique, et celle-ci diminuant avec l'altitude, la première est une fonction de la dernière et pourra servir à sa détermination lorsqu'on connaîtra la loi qui unit les hauteurs et les pressions de l'atmosphère.

Avant de rechercher cette loi nous décrirons succinctement les instruments qui peuvent servir à mesurer ces pressions.

116. Baromètre. — *Baromètre de Fortin.* — Le premier se compose d'un tube de verre cylindrique, bien calibré, fermé par l'une de ses extrémités, et d'une cuvette contenant du mercure. On remplit le tube de la même matière, et on le retourne de manière que son ouverture plonge dans la cuvette. Le

mercure, en s'abaissant dans le tube, jusqu'à ce que son poids fasse équilibre à celui de la colonne d'air qui pèse sur la cuvette,



laisse vide la partie supérieure du tube. Si donc, par une cause quelconque, la pression de l'air vient à augmenter, la hauteur correspondante de la colonne de mercure ne sera altérée par aucune résistance. Il n'en serait pas ainsi, s'il s'y était introduit quelque peu d'air.

Le tube de verre est renfermé presque entièrement dans une enveloppe de cuivre qui sert à le protéger. Le long de ce tube est appliquée une échelle graduée de bas en haut, et portant à sa partie inférieure une petite pointe d'ivoire I, dont l'extrémité indique le zéro, et à l'affleurement de laquelle on amène la surface OO′ du mercure, au moyen d'une vis V qui pousse le fond de la cuvette formé d'une bande de cuir. On est assuré que la pointe touche cette surface en examinant sa réflexion dans le mercure. Un anneau de cuivre MM′ nommé *curseur* embrasse le baromètre : au bas est adapté un vernier devant donner au moins le dixième de la plus petite division de l'échelle, qui est ordinairement un millimètre. Enfin, un thermomètre très-sensible BB′ est appliqué immédiatement au tube de verre.

Tout l'appareil est suspendu par un crochet à une tête P supportée par trois pieds PC, PC′, PC″, qui sont construits de manière à ne former, étant rapprochés, qu'une très-forte canne, dans laquelle est enfermé le baromètre.

Baromètre de Gay-Lussac. — Celui de Gay-Lussac, du genre des baromètres à syphons, est formé de deux tubes de verre de même calibre, disposés dans le même axe, l'un au-dessus de l'autre, et réunis par un tube capillaire dont les deux extrémités sont recourbées de manière à présenter la forme indiquée par la figure, et dont le but est d'empêcher l'introduction, pendant le transport, de bulles d'air qui iraient se loger dans la partie supérieure du baromètre.

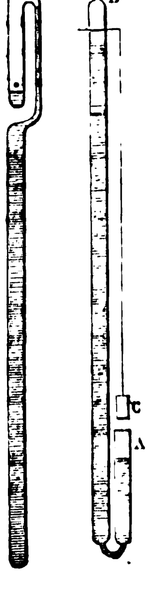
Les deux extrémités sont fermées, mais on pratique un petit

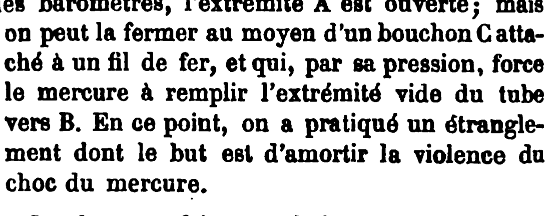


trou T à $0^m,02$ ou $0^m,03$, du haut du tube inférieur. La hauteur OO′ de la colonne barométrique est appréciée au moyen d'une échelle mobile ou fixe. Si elle est mobile, on amène son zéro sur l'horizontale *Om* et l'on a la hauteur comptée à partir de ce point au moyen d'un vernier curseur attaché à l'échelle. Si elle est immobile, on se sert de deux verniers, dont l'un indique le niveau inférieur, et l'autre le niveau supérieur. La différence des deux nombres qu'ils donnent fournit la hauteur de la colonne, dans le cas où le zéro de l'échelle est au-dessous du niveau inférieur : c'est la somme dans le cas contraire.

L'appareil est encore enfermé dans une canne, pour le rendre portatif, lorsqu'on le change de station. On a soin alors de le renverser bout pour bout, avec beaucoup de précaution, afin que le choc du mercure ne brise pas le tube. Dans cette position le mercure remplit le grand tube et le tube capillaire ; et il en tombe un peu dans le fond du troisième.

Dans quelques baromètres, l'extrémité A est ouverte; mais




on peut la fermer au moyen d'un bouchon C attaché à un fil de fer, et qui, par sa pression, force le mercure à remplir l'extrémité vide du tube vers B. En ce point, on a pratiqué un étranglement dont le but est d'amortir la violence du choc du mercure.

Les lectures faites sur le baromètre de Fortin doivent être augmentées d'une correction due à l'effet de la capillarité, correction qui dépend du diamètre intérieur du tube. Le baromètre de Gay-Lussac n'exige pas le calcul de cette petite quantité lorsque les deux branches ont le même diamètre.

Pour trouver cette correction, il faut remarquer que par suite de sa constance il suffira de l'observer une fois pour toutes, dans une circonstance particulière. Pour y arriver il suffira de comparer, à un instant quelconque, les indications fournies par le baromètre à étalonner et

par un autre baromètre pour lequel la constante sera déjà connue.

Les baromètres sont les instruments les plus précis propres à donner les pressions atmosphériques; les indications fournies par les hauteurs du mercure doivent, il est vrai, subir des corrections assez délicates, mais leur principe et son application sont tellement simples qu'ils nous semblent devoir toujours donner plus de précision que d'autres instruments qui atteignent le même but, mais par des moyens plus détournés.

Malheureusement ils sont très-fragiles, et leur transport est très-incommode en voyage par suite de leur poids et de leur grande longueur. Pour obvier à ces inconvénients on a imaginé d'autres instruments, *l'hypso-thermomètre* et les *baromètres anéroïdes*, dont nous nous occuperons après avoir indiqué l'utilisation des renseignements fournis par les baromètres à mercure.

117. Loi qui lie les pressions atmosphériques aux altitudes. — Supposons que sur une même verticale, l'atmosphère soit divisée en couches horizontales d'une épaisseur assez petite pour qu'on puisse considérer la densité comme uniforme dans chacune d'elles; soit m cette hauteur commune.



A partir d'une quelconque des surfaces de séparation, les hauteurs des autres faces seront liées par la progression arithmétique croissante

$$\div\ 0 \,.\, m \,.\, 2m \,.\, 3m \,.\, \ldots\ldots$$

Désignons par p le poids de l'atmosphère sur la surface d'origine, pour une base d'une étendue quelconque; par p' celui de l'atmosphère moins la couche inférieure; par p'' le poids de l'atmosphère diminué des deux premières couches, etc., $p-p'$, $p'-p''$, etc., représenteront évidemment les poids de la première, de la seconde, etc., couches. Appelons d, d', d'', d''', etc., les densités de ces mêmes couches.

Les quantités qu'il faut relier entre elles sont les termes de la progression arithmétique qui représentent les altitudes et les pressions atmosphériques p, p', p''..... Nous y arriverons en invoquant deux principes se rapportant tous deux aux densités des gaz.

Le premier, rigoureux et général pour tous les corps matériels, dit que les poids sont proportionnels aux densités, ce qui, dans le cas actuel, fournit la proportion

$$p - p' : p' - p'' :: d : d'$$

Le second principe, *la loi de Mariotte*, n'est exact qu'entre certaines limites, mais celles-ci sont assez étendues pour comprendre toutes les opérations qui seront faites sur les pressions atmosphériques, en vue du but que nous voulons atteindre. Cette loi dit que les volumes d'un gaz à la même température sont en raison inverse des pressions qu'il supporte ; mais, d'un autre côté, les volumes étant en raison inverse des densités, il s'ensuit un rapport direct entre celles-ci et les poids comprimants, rapport qui, dans les circonstances actuelles, doit s'écrire

$$d : d' :: p' : p''$$

Les deux proportions trouvées ayant un rapport commun, donnent naissance aux suivantes

$$p - p' : p' - p'' :: p' : p'' \quad \text{ou} \quad p : p' :: p' : p''$$

On aurait de même la suite de proportions $p' : p'' :: p'' : p'''$, etc., dont l'ensemble constituera la progression géométrique

$$\div\!\div\; p : p' : p'' : p''' : \ldots\ldots$$

qui, mise en regard de la progression arithmétique précédemment trouvée pour les altitudes

$$\div\; 0 \,.\, m \,.\, 2m \,.\, 3m \ldots\ldots$$

fait de suite naître l'idée d'un système de logarithmes. Il faudrait néanmoins, pour que les termes de la seconde fussent les logarithmes des termes de la première, que celle-ci fût croissante et qu'elle commençât par l'unité. Il suffit, pour qu'il en soit ainsi, de l'écrire sous la forme

$$\div\!\div\; \frac{1}{p} : \frac{1}{p'} : \frac{1}{p''} \ldots\ldots \quad \text{ou} \quad \div\!\div\; 1 : \frac{p}{p'} : \frac{p}{p''} : \frac{p}{p'''} \ldots\ldots$$

et on sera alors en droit de poser

$$\mu = \log.\, \frac{p}{\pi} \qquad \mu' = \log.\, \frac{p}{\pi'}$$

si μ et μ' sont les termes de la progression arithmétique qui cor-

respondent à $\frac{p}{\pi}$ et $\frac{p}{\pi'}$, de la progression géométrique, ou autrement dit si π et π' sont les pressions atmosphériques exercées aux altitudes μ et μ' comptées à partir de la couche facultative de départ. L'altitude finale cherchée sera donc donnée par

$$x = \mu' - \mu = \log. \frac{\pi}{\pi'}$$

Rien ne précise la base du système de ces logarithmes, et malheureusement cette base n'est pas constante. Il faut la déterminer pour un cas particulier, puis il y aura lieu de rechercher les modifications qu'il faudra lui faire subir pour l'adapter aux différents cas qui se présenteront ensuite.

Détermination de la constante. — Au lieu de chercher directement la base, nous allons chercher le coefficient par lequel il faudrait multiplier les logarithmes tabulaires pris dans la base 10, pour avoir ceux de la formule. Il nous sera permis d'écrire, en désignant cette constante, par C, et les pressions atmosphériques inférieure et supérieure, par les notations plus commodes P et p,

$$x = \text{C}. \log. \frac{\text{P}}{p}$$

Nous n'avons pas encore ramené la mesure des pressions aux indications fournies par le baromètre, et nous ne ferons cette opération que plus tard, mais nous allons invoquer son emploi hypothétique.

On a reconnu que le thermomètre étant à zéro, le baromètre marquant $0^{m},76$, sous la latitude de 50^{g}, au bord de la mer et l'air étant parfaitement sec, le mercure était 10467 fois plus dense que l'air. Supposons que dans ces circonstances on adopte pour l'épaisseur constante des tranches, $m = 0^{m},10467$ quantité assez petite pour qu'on puisse regarder l'hypothèse de l'uniformité de densité dans chaque couche, comme satisfaite.

Si nous faisons descendre le lieu de l'observation, d'une épaisseur de tranche, la différence de niveau sera

$$x = 0^{m},10467.$$

Que sera devenue la première pression atmosphérique p mesurée par une colonne mercurielle de $0^{m},76$? Le mercure supportera alors la même pression p à laquelle il faisait équilibre,

augmentée du poids de la tranche d'air de $0^m,10467$, lequel poids est égal à celui d'une colonne de mercure 10467 fois moins haute; par conséquent l'augmentation de pression étant la même que celle que produirait une hauteur de mercure égale à $\frac{0^m,10467}{10467} = 0^m,00001$, la colonne mercurielle devra devenir, à la seconde station, $0^m,76001$.

Mais dans les circonstances du problème, le rapport des colonnes barométriques est le même que celui des pressions atmosphériques, puisque les actions de la gravité et de la température sont les mêmes. On devra donc avoir

$$\frac{P}{p} = \frac{0,76001}{0,76}$$

et nous serons en droit d'écrire

$$x = C \cdot \log. \frac{P}{p}, \qquad 0,10467^m = C \cdot \log. \frac{0,76001}{0,76}$$

ce qui fournirait, par le secours d'un calcul numérique très-simple, $C = 18312$, et par suite

$$x^m = 18312^m \log. \frac{P}{p}$$

118. Corrections de la constante.—Les circonstances ne seront pas toujours les mêmes que celles qui existaient lors de l'expérience qui a servi à déterminer le coefficient 18312.

Nous avons supposé l'air parfaitement sec ; si au contraire on l'avait supposé saturé de vapeur d'eau, toutes les autres circonstances restant d'ailleurs les mêmes, on aurait trouvé pour la densité du mercure un nombre plus fort, par suite de la légèreté de la vapeur d'eau plus grande que celle de l'air; cela aurait conduit à une valeur du coefficient égale à 18360.

L'état hygrométrique de la colonne atmosphérique comprise entre les deux stations sera évidemment variable et impossible à mesurer dans toute l'étendue de cette colonne. On suppose alors que cet état sera généralement une sorte d'état moyen répondant à la moyenne des deux coefficients, et on prend

$$x = 18336 \log. \frac{P}{p}$$

En calculant l'altitude par cette formule, on trouverait la

valeur de cette altitude correspondant aux circonstances de l'expérience ; on aurait ainsi la hauteur d'une colonne d'air à zéro de température et soumise à l'intensité de la gravité, telle qu'elle existait alors, c'est-à-dire, au bord de la mer, sous la latitude de 50°, hauteur faisant équilibre à la différence des pressions P et p.

En réalité, ces circonstances auront changé, en sorte que si dans la circonstance hypothétique la densité et l'intensité de la gravité étaient représentées par D et G, elles seront généralement D' et G' différentes des premières, et la colonne d'air x' qui fait toujours équilibre à la différence des pressions P et p devra être telle que

$$x' D' G' = x \,.\, D \,.\, G$$

puisque les poids doivent être égaux tous deux à $P-p$ et qu'on sait que ces poids sont proportionnels aux volumes (qui sont représentés ici par les hauteurs x et x'), aux densités et aux intensités de la gravité. Ces dernières étant en raison inverse des carrés des distances au centre de la terre, on aura, en désignant par R et R' ces distances répondant au lieu de l'expérience de départ et à celui de l'observation,

$$x' = x \,.\, \frac{D}{D'} \frac{G}{G'} = 18336 \frac{D}{D'} \frac{R'^2}{R^2} \log. \frac{P}{p}$$

Correction relative à la température. — La densité D' devrait correspondre à la température de la colonne d'air ; mais celle-ci n'ayant pas une température uniforme, cette densité unique n'existe pas. On lui prête alors approximativement celle qui correspondrait à la moyenne des températures extrêmes observées aux deux stations toujours, jusqu'à présent, supposées sur la même verticale. Soient t et t' ces températures, la température moyenne sera $\frac{t+t'}{2}$.

Mais on sait que le coefficient de dilatation des gaz $= 0{,}00375$ pour chaque degré de thermomètre centigrade, en sorte que,

Un volume 1 d'air à 0°, devient $1 + 0{,}00375 \frac{t+t'}{2}$ à $\frac{t+t'}{2}$ degrés.

Le rapport des volumes étant inverse de celui des densités, on aura

$$\frac{D}{D'} = \frac{1 + 0,00375\,\frac{t+t'}{2}}{1}$$

En admettant que l'air soit toujours moyennement saturé de vapeur d'eau, la quantité de celle-ci augmentera, comme on le sait, avec la température, ce qui tendra à diminuer encore la densité D′ quand $\frac{t+t'}{2} > 0$. On agit dans le même sens, mais seulement d'une manière approximative, en substituant 0,002 à $\frac{0,00375}{2}$, et le rapport des densités transporté dans la valeur de l'altitude devient

$$x' = 18336\left(1 + 0,002\,(t+t')\right)\frac{R'^2}{R^2}\log.\frac{P}{p}$$

Correction relative à la gravité. — La gravité a varié en raison de l'altitude et de la latitude ; soit r le rayon local relatif à la surface de la mer, on peut écrire

$$\frac{R'^2}{R^2} = \frac{R'^2}{r^2}\,\frac{r^2}{R^2}$$

et on doit chercher successivement les rapports $\frac{R'^2}{r^2}$ et $\frac{r^2}{R^2}$

Rappelons-nous que R′ représente le rayon terrestre exprimant la distance de la colonne atmosphérique, au centre de la terre et R le rayon relatif au bord de la mer à la latitude de 50^g. Le premier R′ n'est pas unique, mais on peut approximativement le prendre égal à celui qui se rapporte au milieu de cette colonne, c'est-à-dire égal à $r + a + \frac{x}{2}$, en appelant a la hauteur de la station inférieure au-dessus de la mer. Par suite,

$$\frac{R'^2}{r^2} = \frac{\left(r + a + \frac{x}{2}\right)^2}{r^2} = \left(1 + \frac{a + \frac{x}{2}}{r}\right)^2 = \left(1 + \frac{2a + x}{r}\right)$$

en négligeant la seconde puissance de $a + \frac{x}{2}$ qui est toujours très-petite par rapport à r^2.

Le second facteur correctif, relatif à la latitude, c'est-à-dire dépendant de l'ellipse méridienne, est donné par la géométrie analytique sous la forme

$$\frac{r^2}{R'^2} = 1 + \frac{e^2}{2}\cos.2\,L$$

dans laquelle e représente l'excentricité et L la latitude. En sorte qu'on a

$$\frac{R'^2}{R^2} = \left(1+\frac{2a+x}{r}\right)\left(1+\frac{e^2}{2}\cos.2L\right) = \left(1+\frac{2a+x}{r}\right)\left(1+0{,}00323.\cos.2L\right)$$

La formule corrigée des deux causes qui agissent sur l'air, sera donc

$$x' = 18336\left(1+0{,}002\,(t+t')\right)\left(1+\frac{2a+x}{r}\right)\left(1+0{,}00323.\cos.2L\right)\text{Log.}\frac{P}{p}$$

119. Mesure des pressions. — Si on connaissait exactement les pressions P et p ou simplement leur rapport $\frac{P}{p}$ il suffirait de mettre celui-ci dans la formule trouvée ci-dessus pour avoir la différence de niveau cherchée. Pour apprécier ces pressions, on n'a pas d'autre ressource que la connaissance directe des colonnes barométriques qui leur font équilibre, ou d'autres éléments dont nous parlerons un peu plus loin, qui ne sont que des conséquences de ces colonnes barométriques.

Supposons d'abord que celles-ci H et h sont les renseignements directement obtenus. Les poids des colonnes d'air ou les pressions P et p, sont alors mesurés par H et h, de telle sorte que

$$P = H.D.G \qquad p = h.d.g$$

ou que du moins il y a proportionnalité entre les deux membres de chacune de ces équations, dans lesquelles H et h représentent les volumes, D et d les densités du mercure, G et g les intensités de la gravité aux deux stations.

Pour trouver $\frac{P}{p}$, il suffit de rechercher successivement les rapports $\frac{D}{d}$ et $\frac{G}{g}$ puisque H et h sont lus directement, et que

$$\frac{P}{p} = \frac{H}{h}\cdot\frac{D}{d}\cdot\frac{G}{g}.$$

Correction relative à la température. — Le coefficient de dilatation du mercure est $\frac{1}{5550}$ pour chaque degré du thermomètre centigrade, en sorte que si on designe par T et T' les températures du mercure des baromètres aux stations qui ont donné les hauteurs H et h, on pourra dire que,

un volume 1 de mercure à 0° devenant $1 + a \frac{1}{5550}$ à $a°$

un volume 1... à T′ degrés, deviendra $1 + \frac{1}{5550}(T - T')$ à T degrés, en sorte que les densités d à T′ degrés et D à T degrés devant être en raison inverse des volumes, seront dans le rapport $\frac{D}{d} = \frac{1}{1 + \frac{T - T'}{5550}}$, d'où il s'ensuivra

$$\frac{P}{p} = \frac{H}{h} \frac{1}{1 + \frac{T - T'}{5550}} \frac{G}{g}$$

Correction relative à la gravité. — En conservant les désignations employées précédemment, c'est-à-dire r représentant le rayon de l'ellipsoïde terrestre sous la latitude des deux stations, et a la hauteur au-dessus de la mer, de la station inférieure, on aura

$$G : g :: \frac{1}{(r + a)^2} : \frac{1}{(r + a + x)^2}$$

d'où, par approximation, $\frac{G}{g} = \left(\frac{r + a + x}{r + a}\right)^2 = 1 + \frac{2x}{r + a} = 1 + \frac{2x}{r}$

En combinant les deux corrections, on a

$$\frac{P}{p} = \frac{H}{h} \frac{1 + \frac{2x}{r}}{1 + \frac{T - T'}{5550}}$$

et par suite la différence de niveau cherchée, exprimée en fonction des lectures barométriques H et h, des températures t, t' de l'air et T, T′ des baromètres, se trouve représentée par la formule

$$dN = 18336 \left(1 + 0{,}002\,(t + t')\right) \left(1 + \frac{2a + x}{r}\right) \left(1 + 0{,}00323 \,.\, \cos.\, 2 \,.\, L\right)$$

$$\times \text{Log.} \left(\frac{H}{h} \frac{1 + \frac{2x}{r}}{1 + \frac{T - T'}{5550}}\right)$$

120. Calcul des altitudes. — L'emploi de cette formule exigerait le calcul de la valeur approchée de x au moyen d'un

artifice qui consisterait à le négliger dans le second membre, où du reste, il a peu d'influence. Cette valeur substituée ensuite dans les termes précédemment négligés conduirait à un second résultat plus exact.

Mais on remarque qu'en négligeant les facteurs qui renferment a, x et r, on diminuerait le résultat qui pourrait être rétabli exact au moyen d'un coefficient variable, ou à peu près exact au moyen d'un coefficient constant. On a trouvé ainsi, par des expérimentations faites avec la formule complète et avec la formule approchée renfermant un coefficient constant, que par suite du peu d'importance des facteurs supprimés, on pouvait se contenter de prendre

$$dN = 18393\left(1 + 0{,}002\,(t+t')\right)\left(1 + 0{,}00323\,.\,\cos.\,2\,.\,L\right)$$
$$\times\left(\text{Log. } H - \text{Log. } h\left[1 + \frac{T - T'}{5550}\right]\right)$$

et encore négligera-t-on souvent le facteur relatif à la latitude qui, sous les latitudes moyennes, est en effet très-près d'être égal à l'unité.

Cette formule peut se calculer par logarithmes ; mais il existe des tables insérées dans l'*Annuaire du bureau des longitudes* et qui abrégent le calcul. Elles sont au nombre de quatre. La table première, dans laquelle on entre avec l'argument H en millimètres, donne un nombre de mètres que nous désignerons par a ; on y cherche également le nombre b correspondant à h.

Avec $T - T'$ comme argument, on trouve c dans la table deuxième.

$a - b - c$ sera la hauteur approchée, si $T - T' > 0$. Ce sera $a - b + c$ quand $T - T'$ sera négatif.

Pour avoir la correction dépendant de la différence de température des couches de l'atmosphère, il faudra multiplier la millième partie de la hauteur approchée par $2\,(t + t')$. La correction sera du même signe que $t + t'$, qui est la somme des indications fournies par les thermomètres libres.

La correction due à la latitude et à la diminution de pesanteur dans le sens de la verticale, sera fournie par la table 3, à double entrée.

Le nombre qui correspond verticalement à la latitude et horizontalement à la hauteur approchée est cette correction toujours additive.

Enfin, la table 4 donne la correction qu'il faudrait faire, si la

station inférieure était très-élevée au-dessus du niveau de la mer. Cette correction, qui est toujours additive, s'obtient avec l'argument H.

Formule approximative de M. Babinet. — Pour éviter l'emploi des logarithmes ou celui des tables, on peut transformer la formule barométrique assez simplement. Pour abréger les écritures, supposons que H et h représentent les hauteurs de mercure ramenées à la même température. La formule abrégée sera

$$x = 18393\,(1 + 0{,}002\,[t + t'])\ \log. \frac{H}{h}$$

Mais le développement en série du logarithme népérien d'un nombre $1 + x$ est donné par

$$\text{Log.}\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots$$

Celui du logarithme tabulaire du même nombre sera

$$\text{Log.}\,(1+x) = \text{M}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots\right)$$

M étant le module $= \dfrac{1}{\text{Log. népérien de } 10} = 0{,}4342945\ldots\ldots$

Mettons $\frac{H}{h}$ sous la forme $1 + \frac{H-h}{h}$, et nous aurons

$$\text{Log.}\,\frac{H}{h} = \log.\left(1 + \frac{H-h}{h}\right) = \text{M}\left[\left(\frac{H-h}{h}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{H}{h} - 1\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{H}{h} - 1\right)^3 - \ldots\right]$$

H et h diffèrent toujours assez peu l'un de l'autre ; conservons seulement les secondes puissances de $\frac{H}{h} - 1$, et nous pourrons écrire

$$\text{Log.}\,\frac{H}{g} = \text{M}\left(\frac{H}{h} - 1\right)\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{H}{h} - 1\right)\right] = \text{M}\frac{\frac{H}{h} - 1}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{H}{h} - 1\right)}$$

$$= 2\text{M}\,\frac{\frac{H}{h} - 1}{\frac{H}{h} + 1} = 2\text{M}\,\frac{H-h}{H+h}$$

Substituant cette expression dans la formule barométrique

$$x = 18393.\,2\mathrm{M}\,\frac{\mathrm{H}-h}{\mathrm{H}+h}\left(1+0{,}002\ (t+t')\right)$$

$$= 18393 \times 2 \times 0{,}4342945 \times \frac{\mathrm{H}-h}{\mathrm{H}+h}\left(1+0{,}002\,(t+t')\right)$$

$$= 15976\,\frac{\mathrm{H}-h}{\mathrm{H}+h}\left(1+0.002\ (t+t')\right)$$

ou en nombre rond

$$x = 16000\,\frac{\mathrm{H}-h}{\mathrm{H}+h}\left(1+0{,}002\,(t+t')\right)$$

Cette formule approximative, due à M. Babinet, est suffisamment exacte pour le calcul des hauteurs moindres que 1000^m, et elle peut servir à trouver des hauteurs plus grandes, d'une manière approchée.

Ainsi, des observations faites, par M. de Humboldt, au Pérou et sur le bord de l'Océan, ont fourni

$$\mathrm{H} = 763^m{,}^m15, \quad \mathrm{H} = 600{,}95, \quad \mathrm{T} = t = 25^\circ{,}3, \quad \mathrm{T}' = t' = 21^\circ{,}3$$

La hauteur conclue de la formule complète est 2084^m,5.

Celle fournie par la formule approximative est 2079^m; il en résulte donc une erreur de 5^m,5, sur une différence de niveau de plus de 2000^m, erreur qui diminuerait rapidement pour des hauteurs moins grandes, mais qui par contre augmenterait beaucoup avec celle-ci. Ainsi une hauteur du Chimborazo calculée des deux manières a donné les deux résultats 5868 et 5700, avec une erreur de 168^m.

Marche des opérations. — Nous avons jusqu'à présent supposé les deux stations situées sur la même verticale. Il ne peut pas en être ainsi dans la réalité, mais on suppose que l'état atmosphérique est assez calme pour être le même sur les deux verticales comparées.

Pour avoir des résultats exacts, il faut opérer avec beaucoup de précautions afin de mettre les instruments à l'abri des courants d'air qui influeraient sur les températures des baromètres, qui pourraient être différentes de celles que fourniraient les thermomètres qui leur sont adaptés. Les thermomètres libres destinés à fournir les températures de l'air ambiant, doivent être, comme les baromètres, mis à l'abri des courants d'air et des rayons du soleil.

Disons actuellement comment on opère sur le terrain et les

précautions que l'on doit prendre. Les observations sont recueillies par deux observateurs placés chacun à l'une des stations. Ils ont des montres bien d'accord, et des baromètres et thermomètres qui sont comparés à l'avance et bien réglés. Ils font des opérations simultanées qu'ils répètent de quart d'heure en quart d'heure, et dont le nombre dépend de la régularité de leur marche. On note la hauteur du baromètre, sa température et celle de l'air fournies par les instruments que l'on a soin de consulter aux heures convenues.

Après dix ou douze observations, on se réunit, on s'assure que les instruments sont encore bien réglés ; puis chacun prend une moyenne entre tous ses résultats.

Quand un observateur doit opérer seul, il faut qu'il obtienne, par un très-grand nombre d'observations, la hauteur moyenne du baromètre et la température moyenne pour chacune de ses deux stations : après quoi, il calcule avec ces données, comme si elles résultaient d'observations simultanées.

On a trouvé que la hauteur moyenne du baromètre est $0^{m},7629$ au niveau de l'Océan, sous la latitude de $55^{g},555$, et à la température moyenne de $12^{g},8$. On sait également qu'au niveau des eaux moyennes de la Seine sous le Pont-National, la hauteur moyenne du baromètre est de $0^{m},76$ à la température de 12^{g}. On peut, à l'aide de ces données, conclure la hauteur verticale au-dessus de la mer ou de la Seine, de tel point qu'on voudra en y faisant un grand nombre d'observations. Les résultats seront d'autant plus exacts que les distances horizontales des points comparés seront plus petites.

Le milieu de la journée par un temps calme est le moment le plus favorable aux opérations, parce qu'alors les changements de température sont les moins brusques et qu'il y a moins d'irrégularité dans la distribution des températures aux différentes hauteurs de la couche d'air comprise entre les stations.

121. Instruments portatifs. — Nous avons dit que pour obvier à la fragilité des baromètres et à leur volume embarrassant, on avait imaginé d'autres instruments plus portatifs destinés à mesurer les pressions atmosphériques. En première ligne nous placerons le suivant.

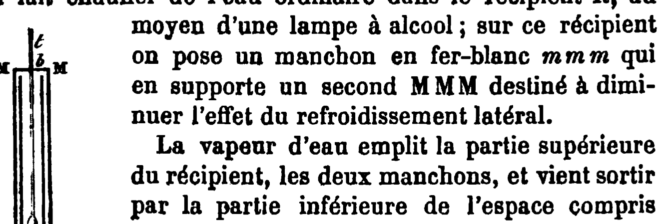
Hypso-thermomètre. — La température de l'ébullition de l'eau est celle à laquelle la vapeur d'eau a une tension égale à celle

de l'air ambiant. Les diverses pressions atmosphériques peuvent donc être connues quand on sait à quelles températures bout l'eau qui leur est soumise, ou mieux quand on connaît celles des vapeurs formées.

Deux choses sont essentielles pour arriver à ce résultat, 1° une table des tensions de la vapeur et des températures correspondantes ; cette table existe, et les résultats donnés par celles de M. Regnault, paraissent exacts ; 2° un thermomètre très-sensible et très-rigoureusement gradué. Son existence constitue la partie délicate de l'appareil.

L'instrument très-portatif peut être renfermé dans une boîte de bois d'environ $0^m,3$ de hauteur, boîte dont les différentes faces peuvent s'ouvrir pour la commodité de la manœuvre.

On fait chauffer de l'eau ordinaire dans le récipient R, au moyen d'une lampe à alcool ; sur ce récipient on pose un manchon en fer-blanc *mmm* qui en supporte un second MMM destiné à diminuer l'effet du refroidissement latéral.



La vapeur d'eau emplit la partie supérieure du récipient, les deux manchons, et vient sortir par la partie inférieure de l'espace compris entre eux. Enfin, un thermomètre maintenu en *b* au moyen d'un bouchon, à la hauteur convenable pour la lecture, baigne dans la vapeur, sans toucher l'eau de laquelle il doit être éloigné de quelques centimètres afin d'éviter l'action du bouillonnement. Il doit en effet donner la température de la vapeur qui est constante avec la pression, et non celle de l'eau qui dépend, non-seulement de cette pression, mais encore de l'existence de sels en dissolution, et même, paraît-il, de la forme et de la nature du vase.

Nous avons dit que le thermomètre devait être très-sensible et très-exactement gradué. En effet, les variations de température exprimées en degrés sont très-faibles par rapport aux variations de pressions exprimées en millimètres de mercure à zéro, ou approximativement en dixièmes de mètres d'altitude. Ainsi, comme renseignement général sur les rapports de grandeur des degrés thermométriques et des altitudes, on saura que deux observations faites sur une colonne d'air supposée à la température zéro dans toute sa hauteur, donneront des indications thermométriques de 100° et 96°,53, si les deux extrémités de cette

colonne sont distantes l'une de l'autre de 1000^{m}, et si la pression répondant à la station inférieure est de 0,76. Ainsi donc, dans ce cas, il y aura 3°,47 de variation de température pour exprimer 1000^{m} de variation d'altitude, c'est-à-dire que moyennement l'estimation du mètre en hauteur exigera la lecture du tiers d'un centième de degré du thermomètre.

Pour que l'estimation soit la même que sur le baromètre, il faudra que les mêmes longueurs, le millimètre, par exemple, répondent à la même variation moyenne d'altitude. Sur le baromètre cette moyenne approchée est de 10^{m}; sur le thermomètre. dans les circonstances citées ci-dessus, elle est de 0°,0347. Il faut donc que sur celui-ci le degré centigrade soit représenté par une longueur approximative de 29^{mm}.

Si l'amplitude du degré augmente, la *lecture* du thermomètre est plus exacte que celle du baromètre, mais il n'en faut pas conclure qu'il en sera de même de l'exactitude du résultat, car celle-ci est subordonnée à l'exactitude même du thermomètre, tandis que l'indication barométrique est rigoureuse en elle-même, si l'instrument est bien purgé d'air.

Il est évident à priori que le thermomètre demande des précautions infinies dans sa construction pour pouvoir arriver au point de précision indiqué. Si on lui laissait toute la longueur qu'il serait nécessaire de lui donner, pour que le degré centigrade occupât 30^{mm}, dans une étendue dépassant l'intervalle compris entre 0° et 100°, sa longueur plus grande de 3^{m} le rendrait plus embarrassant que le baromètre. Il n'est pas nécessaire qu'il fournisse des indications éloignées de 100°, et on pourrait noyer toutes les indications inférieures à 80° (température qui répond à une altitude plus grande que celles qu'on peut être appelé à étudier) dans le récipient, qui doit être volumineux par rapport au tube capillaire que doit parcourir l'extrémité libre du mercure.

Mais il est nécessaire, pour la graduation du thermomètre ou plutôt pour sa vérification journalière, qu'il porte l'indication du zéro, le seul point qu'il soit facile de contrôler dans la nature. On apporte alors à sa construction une modification due à M. Walferdin, modification qui consiste à établir au-dessus du zéro une petite chambre dans laquelle vient se loger une grande partie du mercure, de telle façon que toutes les divisions supérieures sont baissées d'une quantité qui dépend du volume de cette chambre. On fait celle-ci par tâtonnements, telle qu'elle

absorbe toutes les divisions comprises entre zéro, plus une petite fraction et 80° environ. En haussant encore cette seconde limite, ce qui ne permettrait que des mesures d'altitudes plus petites, on pourra avec une même longueur du thermomètre obtenir des *lectures* plus précises.

Au lieu de mettre sur l'échelle placée le long du tube des divisions donnant des indications thermométriques, on peut leur en substituer d'autres qui ne seraient que leur traduction en pressions atmosphériques exprimées par des millimètres de mercure à zéro, ce qui se ferait, par les soins du constructeur, au moyen de la table de M. Regnault, et ce qui éviterait à l'opérateur cette traduction répétée dans chaque opération.

Les pressions atmosphériques seront ainsi fournies soit directement, soit par l'intermédiaire de la table des tensions, en hauteurs H et h du baromètre à zéro et soumis à la même intensité de la gravité, en sorte que dans la formule destinée au calcul des différences de niveau, il n'y aura pas lieu de faire subir de corrections au terme logarithmique, et cette formule sera réduite en faisant abstraction du facteur relatif à la latitude, à

$$dN = 18393\left(1 + 0{,}002\ (t + t')\right) \text{Log.}\ \frac{P}{p} = 18393\left(1 + 0{,}002\ (t + t')\right) \text{Log.}\ \frac{H}{h}$$

Le calcul à effectuer n'est pas très-compliqué, mais on peut encore le simplifier considérablement, par une modification apportée à l'échelle des lectures, en supposant l'existence d'une station fictive variable.

Supposons que $H = 0{,}76$ se rapporte à une station virtuelle qui sera située à une altitude quelconque dépendant de l'état atmosphérique. La hauteur au-dessus de celle-ci, d'une station réelle, donnant une indication h, sera fournie par

$$dN = 18393\left(1 + 0{,}002\ (t + t')\right) \text{Log.}\ \frac{0{,}76}{h}$$

que la connaissance de h, t, t' suffira à faire connaître. Si en regard de h donné par l'échelle, le constructeur pouvait écrire le dN correspondant résultant du calcul de la formule, la hauteur fictive serait trouvée instantanément par la seule lecture. Il n'est pas possible d'agir ainsi par suite de la variation du coefficient $1 + 0{,}002\ (t + t')$, qui exigerait un nombre infini d'indications d'altitudes fictives répondant à une seule indication h de pression atmosphérique.

Mais si $t + t'$ était constamment zéro, une indication unique pourrait provenir de la résolution de

$$dN = 18393 \log. \frac{0,76}{h}$$

et le constructeur indiquant une fois pour toutes ce résultat, l'observateur n'aurait plus qu'à faire la multiplication

$$dN = dN' \left(1 + 0,002 \ (t + t')\right)$$

pour avoir la hauteur réelle du lieu de l'observation au-dessus de la surface fictive répondant à $H = 0,76$ et $t + t' = 0$.

Une seconde observation h_1 répondant à des températures $t_1 + t'_1$ donnerait de même

$$dN_1 = dN'_1 \left(1 + 0,002 \ (t_1 + t'_1)\right)$$

et la différence d'altitude des deux observations supposées faites avec le même état atmosphérique, c'est-à-dire rapportées à la même surface fictive $H = 0,76$ et $t + t' = 0$, serait fournie par la différence des indications dN' et dN'_1 employées de la manière suivante

$$dN' \left(1 + 0,002 \ (t + t')\right) - dN'_1 \left(1 + 0,002 \ (t_1 + t'_1)\right)$$

Il suffira donc ainsi que le constructeur, au lieu d'indiquer sur le thermomètre les degrés de température ou les pressions correspondantes exprimées en hauteurs de colonnes barométriques à zéro et à la même distance du centre de la terre, indique les résultats du calcul ou les altitudes répondant à ces hauteurs, rapportés à une surface fictive et variable pour laquelle la pression serait constamment 0,76, et en admettant une moyenne des températures égales à zéro.

Il y a une grande difficulté d'exécution dans la graduation effectuée d'une manière ou d'une autre, mais il y en a une plus grande encore provenant de la non-fixité de ces graduations.

On sait en effet que par suite de modifications apportées dans l'état moléculaire par l'action du temps et du changement de température, surtout quand ceux-ci sont considérables et brusques, comme cela se présente dans le cas qui nous occupe, la position du zéro d'un thermomètre n'est pas invariable ; en sorte qu'on devra souvent contrôler cette position en se servant de glace fondante, rarement facile à se procurer.

Des variations du zéro ainsi reconnues, pourront être supposées transmises régulièrement sur toutes les autres divisions, en sorte qu'il sera possible, sinon toujours facile, de corriger les lectures faites. Mais lorsque la vérification du zéro ne pourra pas être effectuée, l'erreur entière se transportera sur le résultat. Un déplacement de $0^{o},3$ n'a rien d'anormal et il correspondra, dans le cas des chiffres cités plus haut, à une moyenne de 100^{m} de variation en altitude.

La constatation d'une telle variation du zéro est facile dans un laboratoire; mais en plein champ, mais pendant un long voyage, il n'en est plus de même : aussi certains voyageurs se louent-ils des résultats obtenus avec l'hypso-thermomètre, tandis que d'autres ne lui donnent pas les mêmes louanges.

La constatation d'un déplacement des graduations peut se faire encore de la manière suivante. Supposons le cas dans lequel l'échelle indique les pressions exprimées en hauteurs mercurielles supposées à zéro et placées à une distance R du centre de la terre ; on pourra constater que les indications sont restées les mêmes que lors de la graduation, en vérifiant l'une d'elles au moyen du baromètre, car, rappelons-le, le déplacement ne provient en très-grande partie que d'une modification du volume de la chambre; le tube capillaire aura subi, il est vrai, les mêmes influences, mais en produisant des effets insensibles. Cette vérification d'une pression quelconque se fera par la comparaison des résultats donnés par l'hypso-thermomètre chauffé et par un bon baromètre; il suffira pour conclure, de l'observation de celui-ci, la valeur de la pression exprimée en millimètres de mercure à 0° et à l'intensité de la gravité qui dépend de R, de lui faire subir les corrections indiquées pour les baromètres lors de la recherche de la formule générale, ce qui exigera la connaissance de la température et celle de la distance R′ de la station au centre de la terre.

Il est vrai qu'en employant l'un ou l'autre procédé, on n'obtiendra que la variation que devrait subir le point constaté, et qu'en regardant ensuite cette variation comme applicable à toutes les autres, on admettra implicitement l'uniformité de diamètre du tube capillaire ; nous ne croyons pas que l'inexactitude résultant de cette hypothèse ait une grande importance.

L'hypso-thermomètre pourrait être gradué immédiatement en pressions mercurielles, sans passer par les températures ; il suffirait de faire l'expérience comparée indiquée plus haut, avec

plusieurs pressions barométriques et de marquer sur le thermomètre ces indications réduites à une même température et à une même action de la gravité; les intervalles restés libres seraient divisés par interpolation et prolongés de la même manière. On pourrait ainsi se passer du zéro et de la chambre de M. Walferdin, et diminuer la longueur de la tige du thermomètre, mais on perdrait le moyen de contrôle dû à l'emploi de la neige fondante, et les vérifications devraient forcément se faire avec le baromètre. Mais alors l'hypso-thermomètre perd beaucoup de sa valeur, s'il doit être accompagné presque journellement de ce baromètre fragile et gênant en voyage, qu'il était destiné à remplacer.

Comme tous les intruments qui opèrent avec des quantités très-petites et très-variables, il peut donner de bons résultats dans des cabinets de physique, entre les mains d'expérimentateurs habiles, mais son emploi journalier dans les champs, à la pluie, au vent, sans eau, sans alcool pour faire bouillir celle-ci, sans moyen permanent de vérification, et le tout subordonné à une délicatesse excessive de construction, ne nous semble pas très-pratique. Le baromètre ordinaire pour le voyageur, malgré la difficulté de son transport, les instruments de topographie et de géodésie pour l'opérateur ordinaire, nous paraissent devoir toujours être préférés à l'hypso-thermomètre.

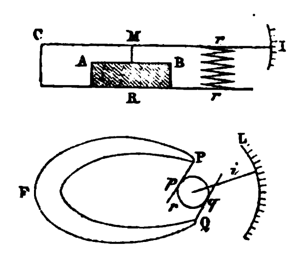
Il nous semble en être de cet instrument comme de beaucoup d'autres dans la construction desquels on oublie que la simplicité est le premier élément d'exactitude. Quoi de plus exact, il est vrai, que la marche de la locomotive en bon état d'entretien, courant sur des rails bien unis; mais quoi de plus inexact aussi quand un de ses mécanismes vient à manquer, ou quand un obstacle quelconque, un caillou, vient à entraver sa marche? Le voyageur muni de l'hypso-thermomètre, parcourant les déserts et les montagnes, ne sera-t-il pas dans un cas analogue à celui qui, monté sur une locomotive, se lancerait en dehors des rails pour courir à travers la campagne?

Baromètres anéroïdes. — L'inconvénient dû à la longueur du baromètre à mercure et à son poids, a donné naissance également aux anéroïdes, qui peuvent se résumer dans les deux suivants :

Baromètre Vidi. — On fait le vide dans un récipient cylindrique R dont la base supérieure faite d'un métal fin et ridé est flexible.

Cette base supporte une tige M qui fait corps avec un levier CI pivotant autour d'un point C fixé à l'enveloppe de l'instrument; ce levier est également attaché à un ressort à boudin r dont la seconde extrémité est supportée par le fond de la boîte.

La pression atmosphérique exercée sur la face AB, agissant sur le bras de levier CM fera toujours équilibre à la force du ressort agissant sur le bras Cr; la première venant à varier, il faudra que la force du ressort varie aussi, c'est-à-dire qu'il sera plus ou moins tendu, plus ou moins allongé. L'inclinaison de la ligne Cr sera donc variable, et son extrémité pourra parcourir les graduations d'un cercle I ayant son centre en C.



Baromètre Bourdon. — Cet instrument n'est autre que le manomètre actuellement adapté aux machines à vapeur, modifié en vue du but qu'il doit atteindre. On fait le vide dans un conduit PFQ à section elliptique aplatie, fixé à la boîte de l'instrument en F, et mobile à ses deux extrémités. On a remarqué que si le conduit était formé de lames métalliques très-minces, il se courbait d'autant plus que la pression atmosphérique extérieure était plus forte. (Le contraire a lieu pour les manomètres des chaudières, parce qu'alors la pression dominante agissant en présence de l'action moléculaire, a lieu à l'intérieur.) Les extrémités libres P et Q font mouvoir deux tiges p et q qui impriment à une petite roue dentée r, dont le centre est fixe, un mouvement de rotation auquel participe un indicateur i qui parcourt les graduations marquées sur un cercle L dont le centre est le même que celui de la roue dentée.

Il est évident, à priori, que ces instruments n'ont pu être gradués que par une comparaison faite avec le baromètre à mercure.

L'expérience a prouvé que, pendant un certain temps du moins, l'accord continuait à exister entre les indications des anéroïdes et celles du baromètre type. Il ne faudrait pourtant pas leur demander des mesures très-exactes; d'abord, il n'est pas certain qu'au bout d'un temps prolongé l'action des ressorts restera la même; en second lieu, les mécanismes employés

exigent un certain jeu, ils font naître des frottements qui entachent d'erreur les résultats obtenus; enfin, l'effet de la température dont il est nécessaire de tenir compte pour connaître la pression atmosphérique n'a pas la régularité des dilatations du mercure.

Pour pouvoir se servir d'un de ces instruments sans de trop grandes chances d'erreur, il faudrait avoir soin de l'étalonner avec un bon baromètre à mercure et de noter les influences exercées sur lui, par des variations de températures à des pressions diverses. Il est probable même que ces variations reconnues à une certaine époque, ne seraient plus les mêmes à une époque différente.

Application à la topographie. — On a songé à utiliser le baromètre pour le nivellement topographique, en adjoignant son emploi à celui de l'éclimètre, pour déterminer les cotes de stations desquelles on n'aperçoit pas de points donnés, comme cela se rencontre trop souvent, sur les plateaux et surtout dans les vallées un peu encaissées. La manière d'opérer est la suivante. En un lieu où l'usage de l'éclimètre est possible, on consulte également le baromètre. On le consulte encore en un second point où l'éclimètre ne peut servir; regardant l'état atmosphérique comme resté constant entre les observations, on connaît les hauteurs barométriques nécessaires pour le calcul de la différence de niveau comprise entre les deux stations.

Il ne faudrait pas songer à déterminer les cotes directement sans l'emploi de l'éclimètre, comme le pensent quelques personnes. L'usage de celui-ci est plus simple, plus exact et son adjonction à la boussole, toujours nécessaire pour les opérations de planimétrie, n'est pas embarrassante. Les erreurs commises dans le nivellement barométrique sont dues, les unes à l'emploi de la formule un peu incomplète, surtout en ce qui provient de l'hypothèse d'uniformité de température attribuée à la colonne d'air, les autres à l'emploi de l'instrument lui-même. Les premières, à peu près proportionnelles aux différences de niveau, n'auraient pas d'influence dans le nivellement topographique; mais parmi les secondes, il y en a qui sont indépendantes de ces différences de niveau, telles sont la lecture et le dérangement de l'origine des graduations; leur existence, peu importante quelquefois pour les grandes altitudes, deviendrait grande pour la

recherche des petites, qui demandent une exactitude absolue plus complète.

Calcul approximatif des côtés d'un réseau de triangles au moyen du baromètre. — L'emploi combiné d'un baromètre et d'un instrument propre à mesurer les distances zénithales fournit le moyen de calculer, d'une manière approchée, la distance entre deux stations : en effet, la formule des différences de niveau étant

$$dN = K.\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,(\delta' - \delta) \quad \text{on en tire} \quad K = dN\ \text{cotang.}\ \tfrac{1}{2}\,(\delta' - \delta)$$

On calcule dN au moyen des observations barométriques, on connaît δ et δ', et l'on en conclut le côté K.

On pourrait encore employer une seule distance zénithale δ, donnant

$$dN = K\ \text{cot.}\ \delta + 0{,}42\ \frac{K^2}{R}$$

de laquelle K pourrait être tiré au moyen de deux approximations successives.

Les résultats ainsi obtenus seraient peu exacts, et les circonstances dans lesquelles ils pourraient être utilisés sont très-rares.

LIVRE III

OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES.

CHAPITRE I[er]

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

122. Ce livre n'a pas pour but d'enseigner l'astronomie, mais seulement de faire connaître avec quelques détails les procédés fondés sur les renseignements fournis par cette science, qui permettent de déterminer la latitude et la longitude d'un point, et l'azimut d'un premier côté, éléments qui sont essentiels à connaître pour la transformation en coordonnées géographiques, d'un canevas géodésique observé et calculé.

Avant de traiter les trois questions qu'il nous importe de savoir résoudre, nous rapellerons quelques notions qu'il est nécessaire d'avoir bien présentes à l'esprit, pour comprendre les développements relatifs à ces questions.

Mesure du temps. — Les jours *sidéral*, *vrai*, *moyen*, sont donnés par les révolutions diurnes des étoiles, du soleil vrai et d'un soleil fictif animé d'un mouvement angulaire apparent exécuté régulièrement sur l'équateur.

L'*année sidérale* comprise entre deux passages successifs et simultanés du soleil et d'une même étoile, dans un même vertical, est composée de 366,2564 jours sidéraux ou de 365,2564

jours moyens. Il suit de là que le rapport des durées du jour moyen et du jour sidéral est donné par

$$\frac{\text{jour moyen}}{\text{jour sidéral}} = \frac{366,2564}{365,2564}$$

On en conclurait facilement par des proportions que, pour exprimer en temps moyen un intervalle donné en temps sidéral, il faut de l'expression de celui-ci retrancher $3^m,55^s,909$ par 24 heures. Inversement pour passer du temps moyen à l'expression sidérale correspondante, il faut ajouter au premier $3^m,56^s,555$ par 24 heures.

Approximativement, ces deux opérations peuvent se faire simplement, en retranchant 10^s par heure dans le premier cas, et en les ajoutant dans le second.

Année civile et année astronomique.—Ces années sont tropiques toutes deux, égales entre elles et à 366,2422 jours sidéraux = 365,2422 jours moyens.

La première, dont les jours sont divisés en deux périodes de 12 heures dites du matin et du soir, commence le premier janvier à minuit.

La seconde, dont les jours sont composés d'une seule période de 24 heures, commence seulement au midi du premier janvier.

Il suit de là que pour trouver l'heure astronomique qui répond à une heure civile donnée, il faut retrancher 12 heures à celle-ci. Si l'heure civile porte la désignation *soir*, cette opération se fait simplement par la suppression de ce mot. Si le temps civil est exprimé en heures du *matin*, la soustraction des douze heures ne peut se faire qu'en diminuant la date d'un jour et en ajoutant 12 heures.

Ainsi, une même époque est désignée par

23 juin $5^h,10^m,20^s$ du soir, temps civil..... 23 juin $5^h,10^m,20^s$ temps astronomique.
23 juin $5^h,10^m,20^s$ du matin, temps civil..... 22 juin $17^h,10^m,20^s$ temps astronomique.

123. Usage de la connaissance des temps. — Plusieurs nations publient quelques années à l'avance, pour l'usage de leurs marins, des livres destinés à fournir des renseignements anticipés sur certains phénomènes astronomiques prévus par des calculs faits dans les grands observatoires.

Les principaux de ces livres sont la *Connaissance des temps* et le *Nautical Almanach*, édités en France et en Angleterre.

Parmi les tables fournies par la connaissance des temps, nous indiquerons seulement celles qui sont spécialement destinées à la recherche des coordonnées géographiques d'un point, et à celle d'un premier azimut.

Equation du temps.—L'équation du temps est la différence qui existe entre les heures vraie et moyenne relatives à un même instant. La connaissance des temps la fournit sous le nom de *temps moyen à midi vrai de Paris*, pour le midi de chaque jour. Pour avoir cette équation relative à un instant autre que le midi, on fait une interpolation, comme dans l'emploi des tables de logarithmes, c'est-à-dire qu'on suppose que les variations des temps et celles des équations du temps sont proportionnelles les unes aux autres. Cette manière d'opérer est suffisamment exacte quand les renseignements fournis sont très-rapprochés et diffèrent peu les uns des autres, comme cela a lieu en effet pour l'équation du temps dont les valeurs ne dépassent jamais $\pm 15^m$ approximativement.

Temps sidéral à midi moyen.—Ce renseignement est l'intervalle de temps sidéral qui sépare les passages au méridien de Paris, du soleil moyen, origine des heures moyennes, et du point vernal ou équinoxe du printemps dont le passage au méridien est pris pour origine des heures sidérales.

La connaissance des temps fournit cette quantité qui, quoique variant beaucoup plus que la précédente puisqu'elle va de 0^h à 24^h dans une année, est suffisamment petite pour que son indication journalière suffise à l'établissement d'une interpolation simple.

Ascensions droites et déclinaisons apparentes.—Ces éléments sont corrigés de l'aberration et de la précession dont il n'y aura conséquemment jamais à tenir compte dans les calculs.

Nous rappelons ici que les ascensions droites Æ et les déclinaisons D, sont pour les astres ce qu'on appelle longitude et latitude terrestres. Les premières sont les angles compris entre les méridiens célestes (ou plans passant par la ligne des pôles) de l'astre et de l'équinoxe du printemps pris pour origine. Les secondes sont les angles formés avec l'équateur par la ligne qui, partant du centre de la terre, va passer par l'astre.

La connaissance des temps donne ces éléments pour 114 étoiles principales de dix jours en dix jours, au midi moyen de

Paris. Quoique très-espacées, ces indications sont suffisantes, car elles ne varient que très-faiblement par suite de la petitesse des actions dues à l'aberration et à la précession des équinoxes, qui seules changent quelque peu l'apparence des ascensions droites et des déclinaisons des étoiles, qui étant fixes devraient avoir ces éléments constants.

Ces renseignements sont fournis à tous les midis moyens de Paris pour le soleil et pour l'étoile polaire, plus souvent employée que les autres, et toutes les douze heures pour la lune. On comprend en effet qu'il n'était plus possible d'espacer autant les indications relatives à ces deux astres par suite des très-grandes variations qu'éprouvent leurs éléments. Ainsi, les ascensions droites vont de 0 à 360°, pendant une révolution entière de chacun d'eux, c'est-à-dire pendant un laps de temps de 365 jours et 29 jours approximativement.

Disons encore ici, une fois pour toutes, que des interpolations doivent compléter les lacunes forcées laissées dans les tables.

Réfraction. — La réfraction n'a pas pu être corrigée comme l'action de l'aberration et de la précession, car celle-ci pouvait être prévue d'avance, tandis que la première dépend de la hauteur de l'astre au moment de l'observation et de l'état atmosphérique.

La réfraction astronomique est essentiellement différente de la réfraction géodésique, car le rayon astronomique traverse toute l'atmosphère, tandis que le rayon géodésique reste presque constamment dans des couches de même densité.

La formule de Laplace, qui donne la valeur de la réfraction astronomique, a été mise en tables dans la *Connaissance des temps*. Une première table donne la réfraction moyenne en raison de la hauteur de l'astre, en supposant le baromètre à 0,76 et le thermomètre à $+10°$. Une seconde table donne les valeurs de coefficients par lesquels il faut multiplier la réfraction moyenne pour rentrer dans la réalité de pression et de température.

Parallaxes.—Soleil.—La distance du soleil à la terre varie très-peu, en sorte que la parallaxe horizontale, qui est égale au rayon terrestre divisé par cette distance, variera elle-même très-peu, et de plus en restant toujours très-petite (8",46 au 1er juillet et 8",75 au 1er janvier). Les parallaxes de hauteur

étant égales aux premières multipliées par le cosinus de la *hauteur* ou angle à l'horizon, varieront encore très-peu et lentement pour la même hauteur. La connaissance des temps donne en conséquence la parallaxe du soleil pour toutes les hauteurs et pour les premiers jours de chaque mois seulement.

Lune. — La durée de la révolution lunaire étant plus courte que celle de la révolution solaire, les parallaxes horizontales de la lune varieront plus rapidement que celles du soleil; les distances de la terre étant relativement petites, les parallaxes seront considérables et il en sera de même de leurs variations. Dans de telles circonstances, il n'a pas été possible d'établir une table succincte donnant autant de renseignements que celle qui se rapporte au soleil. La connaissance des temps fournit alors simplement les parallaxes horizontales de la lune pour tous les midis et minuits; celles-ci, multipliées dans chaque cas par le cosinus de l'angle à l'horizon, fourniront les parallaxes de hauteur.

Il existe une correction à faire subir à la parallaxe lunaire, correction due à la différence de longueur des rayons terrestres. Les tables donnent les parallaxes horizontales et équatoriales, c'est-à-dire relatives au rayon de l'équateur; il faudra donc multiplier celles-ci par le rapport du rayon relatif à la latitude du lieu de l'observation, à celui de l'équateur, rapport dont l'expression est $\left(1 - \frac{1}{2} e^2 \sin.^2 L\right)$. La correction négative à faire subir à la parallaxe p de la table sera donc $\frac{1}{2} pe^2 \sin.^2 L = p.\alpha. \sin.^2 L$ approximativement, en désignant par α l'aplatissement de l'ellipse méridienne, comme e en avait désigné l'excentricité.

Cette correction sera toujours plus petite que $p.\alpha$ qui répond à une observation supposée faite au pôle; les parallaxes horizontales équatoriales de la lune étant un peu plus petites que 1°, la correction sera elle-même plus petite que $\frac{1^\circ}{305}$, ou environ 12″. Sous nos latitudes sa valeur est d'environ 6″.

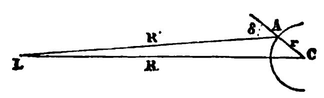
Il va sans dire qu'après cette première correction, il faudra ensuite, s'il y a lieu, passer comme il a été dit, à la parallaxe de hauteur, en partant de la parallaxe horizontale corrigée.

Demi-diamètres apparents. — Quand on observe le soleil ou la lune, on ne peut pas en viser le centre, on observe alors un des

bords et on ajoute, à l'angle obtenu, celui que le rayon de l'astre sous-tend au lieu de l'observation. C'est ce qu'on appelle le demi-diamètre apparent.

Soleil. **— La distance du soleil à la terre variant lentement, la connaissance des temps se contente de fournir les demi-diamètres apparents solaires tous les cinq jours, relatifs au centre de la terre. Le rayon de celle-ci est assez petit, par rapport à sa distance au soleil, pour qu'il n'y ait pas lieu de tenir compte de la variation qui provient de la position du sommet de l'angle nécessairement placé à la surface au lieu d'être au centre.**

Lune. **— Mais il n'en est plus de même pour la lune. D'abord les variations de distances sont rapides ; aussi la connaissance des temps donne-t-elle le demi-diamètre apparent de cet astre tous les jours à midi et à minuit, tel qu'il serait vu du centre de la terre. En second lieu les observations seront faites en des points tels que A pour lequel la distance zénithale du centre de la lune sera δ, point situé à une distance linéaire R′ au lieu de R qui répondrait au demi-diamètre apparent *d* fourni par les tables ; soit *d′* celui qui doit répondre à l'observation faite en A. On aura évidemment, l'angle dont le sommet est en L, étant très-petit,**



$$d' = d.\frac{R}{R'} = d\frac{\sin.\delta}{\sin.(\delta - L)} = d\frac{\sin.\delta}{\sin.\delta - \cos.\delta\sin.L} = \frac{d}{1 - \sin.L\cot.\delta}$$
$$= d(1 + \sin.L\cot.\delta).$$

Mais $\sin.L = \frac{r}{R}\sin.\delta$, **donc** $d' = d\left(1 + \frac{r}{R}\cos.\delta\right)$

D'après la définition, $d = \frac{\rho}{R}$**, en désignant le rayon de la lune par** ρ**; en sorte que** $\frac{1}{R} = \frac{d}{\rho}$ **étant substitué dans la précédente formule, on a**

$$d' = d + d^2\frac{r}{\rho}\cos.\delta$$

La correction à faire subir au demi-diamètre apparent *d* dit horizontal fourni par les tables est donc fonction de ce demi-diamètre et peut s'écrire

$$d^2\frac{r}{\rho}\cos.\delta = 3{,}67\cos.\delta.\times d^2.\sin.1''$$

après réduction en secondes et en mettant 3,67 pour représenter le rapport des rayons terrestre et lunaire.

On voit, à l'inspection de la formule, pourquoi le demi-diamètre fourni par les tables est dit horizontal; la correction devient nulle en effet, à l'horizon, c'est-à-dire, avec $\delta = 90°$. On peut remarquer que la correction *additive* toujours indique que la lune devrait paraître plus petite à son lever et à son coucher qu'à tout autre moment, ce qui est contraire à l'apparence réelle qui n'est due qu'à un effet de contraste.

Remarquons enfin que cette correction, toujours petite (elle ne dépasse pas 19″) deviendrait insignifiante pour le soleil, car pour cet astre, le rapport 3,67 devrait être remplacé par $\frac{1}{109}$.

Distances lunaires.—La connaissance des temps fournit encore les distances angulaires supposées vues du centre de la terre, de la lune au soleil ou à certaines étoiles, de trois en trois heures, pour les jours où ces distances sont convenablement observables. Les valeurs intermédiaires obtenues par une simple interpolation, sont utilisées dans la recherche des longitudes.

124. Conversion des angles horaires en temps et réciproquement. — L'angle horaire actuel d'un astre est celui que forme, avec le méridien du lieu, le méridien céleste ou *cercle horaire* qui contient l'astre au moment de l'observation.

L'équinoxe du printemps et le soleil fictif moyen dont les passages au méridien servent d'origine aux jours sidéral et moyen, auront, comme tout autre point de l'espace, des angles horaires essentiellement variables dont les valeurs iront de 0° à 360° pendant une révolution diurne, sidérale pour le premier, moyenne pour le second.

Ces révolutions étant régulières toutes deux, quoique faites dans des temps un peu différents l'un de l'autre (4 minutes environ), les angles parcourus seront proportionnels aux temps dans les deux systèmes. Mais dans chacun de ceux-ci la révolution totale de 360° s'opère en 24 heures, sidérales pour l'un, moyennes pour l'autre. Il suit de là que si P représente l'angle horaire d'un de ces deux points origines des temps, on devra avoir, en appelant t l'heure correspondante

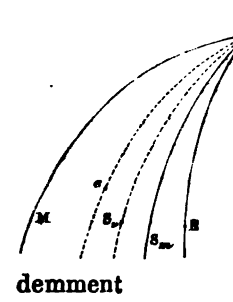
$$P : t :: 360° : 24^h :: 24° \times 15 : 24^h$$

ou

$$P = 15 . t$$

Les angles horaires actuels de l'équinoxe du printemps ou du soleil moyen, sont donc égaux à 15 fois l'heure sidérale ou l'heure moyenne actuelles. Il faut entendre la double équation écrite ci-dessus de telle manière que l'angle horaire est exprimé par le nombre de degrés qu'il renferme, et les temps par les nombres d'heures sidérales dans le premier cas, moyennes dans le second qu'ils contiennent.

Angles horaires en temps sidéral. — Soient PM, PE, PS_m, P*e*, PS_v les traces sur la sphère céleste, des méridiens célestes qui passent par le lieu de l'observation M, et par l'équinoxe du printemps E, le soleil moyen S_m et l'étoile *e* ou le soleil vrai S_v.



D'après ce qui a été dit plus haut, si *t* est l'heure sidérale actuelle, MPE = 15 *t* donne l'angle horaire du point vernal ou équinoxe du printemps. L'angle horaire répondant au même instant *t* sidéral, d'un astre quelconque *e* ou S_v sera évidemment

$$MPe = MPE - ePE = 15.t - Æ$$

puisque les ascensions droites Æ sont comptées à partir du méridien céleste qui passe par l'équinoxe du printemps.

Angles horaires en temps moyen. — L'angle horaire du soleil moyen S_m est lié, nous le savons, à l'heure moyenne actuelle T, par la relation $MPS_m = 15.T$. Celui du soleil vrai S_v sera

$$MPS_v = MPS_m - S_vPS_m = 15.(T - \textit{Équation du temps})$$

puisque l'équation du temps est l'intervalle qui s'écoule entre les passages de S_v et S_m au même méridien, c'est-à-dire, le temps employé dans le mouvement diurne régulier, à parcourir l'angle S_mPS_v.

S'il s'agit de l'angle horaire de l'étoile *e*, l'angle ePS_m n'est plus donné directement par la connaissance des temps, comme l'était tout à l'heure S_vPS_m. Mais si on remarque que $ePS_m = S_vPS_m + ePS_v$, on sera en droit d'écrire

$$MPe = MPS_m - ePS_m = 15\,T - (S_vPS_m + ePS_v)$$

$$= 15\,(T - \textit{Équation du temps}) + Æ_{sv} - Æ_e$$

Il faut mettre dans les équations qui précèdent les valeurs

actuelles des ascensions droites et de l'équation du temps qui ne sont fournies par la connaissance des temps que pour certaines heures du méridien de Paris. Pour les étoiles dont les ascensions et les déclinaisons apparentes varient excessivement peu, il suffit de prendre les renseignements à la date du jour, sans préoccupation d'heure ; mais pour le soleil, pour la lune, qu'il s'agisse d'ascension droite, de déclinaison ou d'équation du temps, il faut savoir quelle est l'heure de Paris qui correspond à l'instant de l'observation, heure qu'il y a lieu de chercher dans les tables. Comme ces variations, quoique beaucoup plus grandes que celles qui se rapportent aux étoiles, sont encore très-petites par suite du rapprochement des indications fournies par la connaissance des temps, il suffit d'employer une valeur approchée M de la longitude du lieu et une heure H seulement approximative de ce même lieu. L'heure de Paris, qui devra être consultée pour la recherche de l'élément inconnu, sera suffisamment bien exprimée par $H \pm \frac{M}{15}$ suivant que la longitude sera occidentale ou orientale.

125. Détermination du plan méridien. — Lorsque le plan méridien est déterminé, les observations de latitude, longitude et azimut se font avec facilité; mais cette détermination exacte est difficile. Nous pensons, nonobstant cette difficulté, que l'emploi de ce plan méridien est favorable, et dans toutes les questions que nous traiterons, nous étudierons les deux cas dans lesquels on peut se trouver, avec ou sans son secours.

L'instrument le plus favorable pour la recherche du plan méridien est le cercle méridien portatif de M. Laugier, ou, à son défaut, le théodolite doublement répétiteur. Le premier offre une plus grande fixité très-avantageuse pour éviter les dérangements imprévus, mais par cela même il est d'une installation plus difficile.

Pour arriver à connaître le plan méridien d'un lieu, il faut invoquer les différentes propriétés dont jouit ce plan et tâcher de trouver la position verticale d'un limbe gradué qui soit une conséquence de ces propriétés.

Le plan méridien doit être bissecteur des verticaux qui répondent aux élongations extrêmes des mêmes étoiles. On observe pour cela une série d'étoiles circompolaires, en suivant leur marche avec la lunette d'un limbe vertical pivotant autour d'un axe également

vertical, et on arrête le mouvement lorsque l'étoile, cessant de paraître marcher dans un sens, éprouve un temps d'arrêt avant de prendre une marche rétrograde; on fait la lecture sur un cercle azimutal placé horizontalement; cette lecture, combinée avec celle qui correspond plus tard à l'excursion extrême de la même étoile, en sens inverse, donne une moyenne qui devrait répondre à la position méridienne du limbe, si les opérations n'avaient été entachées d'aucune erreur.

Ces observations répétées sur un grand nombre d'étoiles et plusieurs nuits de suite, fournissent un renseignement utile.

Si la détermination ainsi faite était exactement obtenue, les passages des étoiles dans le plan qu'elle aurait fourni, devraient correspondre aux culminations ou plus grandes hauteurs de ces étoiles.

Ce plan devrait encore satisfaire à cette condition, que bissecteur du mouvement diurne, puisqu'il passe par la ligne des pôles, axe de ce mouvement, il devrait être rencontré par la même étoile à des intervalles de temps égaux. Ces intervalles devraient être de douze heures sidérales, ou plus simplement moitié de ceux qui sépareraient deux passages supérieurs ou deux passages inférieurs.

Sans avoir une pendule ou un chronomètre réglés sur le temps sidéral, on peut avoir un de ces instruments qui, sans être mis d'accord avec l'origine des heures, indique des temps réguliers d'une durée quelconque. La vérification de ce fait se fera par les observations de passages successifs d'étoiles au méridien supposé ou à un vertical quelconque. Si les passages supérieurs, de même que les passages inférieurs, relatifs à la même étoile, se font régulièrement à des heures identiques du chronomètre, celui-ci marque exactement des heures égales en durée aux heures sidérales. Si les passages correspondants, au lieu de différer ainsi de vingt-quatre heures du chronomètre, diffèrent d'une quantité constante quelconque, celui-ci ne marque pas des durées sidérales, mais il marche toujours régulièrement. On peut arriver approximativement à ce résultat et estimer ensuite la variation de marche de l'instrument.

Supposons le cas le plus simple, celui d'une marche régulière d'un chronomètre non réglé. En vertu de ce qui a été dit plus haut, si le plan du limbe employé est non-seulement vertical, mais s'il se confond avec le méridien, les deux passages consécutifs d'une même étoile, supérieur *et* inférieur, devront avoir

lieu à un intervalle de temps égal à la moitié de celui qui a été reconnu séparer deux passages supérieurs *ou* inférieurs.

Enfin, et c'est la meilleure méthode de détermination du plan méridien, supposons qu'on ait un chronomètre réglé sur le temps sidéral, c'est-à-dire marquant des heures égales aux heures sidérales et indiquant exactement $0^h 0^m 0^s$ quand l'équinoxe du printemps passe au méridien. En vertu de la relation trouvée précédemment entre les angles horaires et le temps sidéral, $P = 15t - Æ$, il faudra que, lors du passage d'une étoile d'ascension droite $Æ$, au méridien, l'angle horaire P devenant nul, on ait $Æ = 15.t$, en supposant toujours, comme nous l'avons fait jusqu'ici, que l'ascension droite soit fournie en angle, comme cela convient d'après sa définition. Si sa valeur est exprimée en temps correspondant, c'est-à-dire 15 fois plus petite, la condition de passage d'une étoile au méridien sera exprimée par $Æ = t$.

Pour utiliser ce renseignement à la détermination du plan méridien, il n'y aura qu'à suivre une étoile quelconque cataloguée, c'est-à-dire d'ascension droite connue, avec la lunette parallèle au limbe, en employant le mouvement particulier de cette lunette et celui qui s'exécute autour de la colonne verticale, et à arrêter ce dernier au moment précis où le chronomètre marquera une heure sidérale égale à l'ascension droite. La position du limbe ainsi déterminée sera vérifiée ensuite au moyen d'autres passages satisfaisant à la même condition que celui de la première étoile. Les culminations et l'égalité des intervalles de temps séparant des passages consécutifs serviront également à corroborer le résultat obtenu.

Nous avons supposé qu'on disposait d'un chronomètre réglé sur le temps sidéral; si son règlement a été fait sur le temps moyen, il n'y aura qu'à passer de celui-ci au premier, avec le secours de la connaissance des temps qui donne le temps sidéral à midi moyen.

Nous avons encore supposé que le règlement était complet; il n'en est jamais ainsi, mais on peut, comme il sera indiqué lorsque nous parlerons du tableau de l'état de la pendule, conclure les heures véritables, de celles qui sont fournies par celle-ci, et inversement pour le cas actuel, l'heure qu'elle devra marquer lorsqu'il sera en réalité une certaine heure sidérale fournie par l'ascension droite de l'étoile employée.

Cette manière de trouver le plan méridien conduit à des ré-

sultats exacts qui facilitent ensuite beaucoup les observations de latitude, longitude et azimut; mais elle exige le règlement préalable de la pendule, qui aurait lui-même été rendu facile par l'emploi de ce même plan méridien. Si les premières indications que nous avons données pour la recherche de celui-ci ont pu être assez bien faites pour conduire à une détermination exacte du plan méridien, toutes les opérations se feront ensuite plus simplement et plus exactement, mais nous croyons que dans la plupart des cas il vaudra mieux commencer par régler la pendule directement, comme il sera indiqué plus tard, et réserver l'usage du méridien obtenu par son secours, pour la recherche des latitudes, longitudes et azimuts.

Une fois le plan méridien bien déterminé, on précise sa position au moyen d'une ou deux mires placées des deux côtés N^d et S^d. Ces mires, mises aussi loin que possible, ont pour but d'obvier à un dérangement possible du limbe de l'instrument. Elles peuvent servir encore à l'observation d'un azimut. Dans les observatoires, on se sert d'appareils optiques dont l'emploi n'est pas facile dans les stations géodésiques.

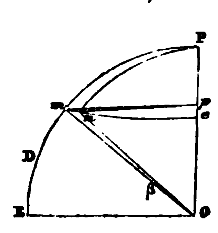
Les marins, qui surtout, font quotidiennement des observations de latitude et longitude, ne peuvent pas se servir du plan méridien, et ils sont obligés d'employer les autres procédés que nous décrirons et qui ne sont pas fondés sur son usage.

Distance équatoriale des fils. — Nous avons vu que les répétitions étaient avantageuses pour les opérations géodésiques; il en est de même pour les observations astronomiques. Dans le cas de l'usage du plan méridien on ne peut constater à la même époque qu'un seul passage d'une étoile dans ce plan, puisque ce passage est unique. On tourne la difficulté de la manière suivante :

On compose le réticule d'un fil horizontal coupé perpendiculairement par cinq ou sept fils verticaux ou plutôt parallèles au plan vertical de visée, et on observe les heures des passages aux cinq fils, après avoir déterminé le méridien au moyen du fil milieu. Si les fils latéraux étaient symétriquement placés par rapport à ce fil milieu, il suffirait de faire la moyenne des heures des cinq passages pour avoir l'heure répétée du passage au méridien. Mais cette symétrie n'existant jamais rigoureusement, il y a lieu de déterminer expérimentalement les intervalles de temps qui séparent les passages d'une étoile au fil milieu et aux

cinq fils latéraux, et cela par des opérations multipliées qui annulent l'erreur qui serait due à une appréciation isolée. Ces intervalles de temps une fois connus, il n'y aura plus qu'à ajouter les uns et retrancher les autres de la somme des cinq lectures faites sur la pendule. Ces intervalles de temps ont reçu le nom de distances des fils.

Soient Om, On les lignes de visées passant par le fil milieu et par un fil latéral, β l'angle inappréciable directement qui sépare ces deux lignes, dont l'une, Om, est dirigée suivant le méridien PE. Une étoile de déclinaison D coupe ces deux lignes de visées en m et n, à un intervalle de temps qui est mesuré par le petit angle horaire p, qui est l'inconnu de la question.



On pourra, sans erreur pour les étoiles, et avec une approximation suffisante pour les autres astres, vu la petitesse de l'angle β, supposer le centre optique O de l'objectif, placé au centre de la terre, c'est-à-dire au centre de la sphère céleste que la figure représente. L'arc de petit cercle de déclinaison, mn, pourra être confondu, par suite de son extrême petitesse, avec un arc de grand cercle de même longueur, en sorte que mesurant alors les angles p et β dans des cercles différents il donnera

$$mn = \beta . Om = p . pm. \quad \text{ou} \quad p = \beta \frac{Om}{pm} = \frac{\beta}{\cos . D}$$

Le temps correspondant, séparant les deux passages, sera donc $t = \frac{\beta}{15 . \cos D}$ variable avec la déclinaison de l'étoile visée.

Si on avait observé une étoile équatoriale, ce temps aurait été exprimé par $\tau = \frac{\beta}{15}$, qu'on appelle la *distance équatoriale des fils*. Si on connaissait cette distance, il suffirait ensuite, pour une observation quelconque, de la diviser par le cosinus de la déclinaison de l'astre, pour avoir l'intervalle de temps qui sépare les passages de celui-ci au méridien et au fil latéral étudié.

Pour avoir cette distance équatoriale et en même temps celles qui se rapportent aux autres fils, par des opérations multipliées qui atténuent les erreurs inévitables, on observe les passages d'une première étoile et on note les heures de ces passages avec une pendule réglée ou non réglée, peu importe, par suite de la

petitesse des résultats à obtenir. Ces heures donneront, par différence, les temps $t\ t'\ t''$... qui séparent en heures de la pendule, c'est-à-dire très-approximativement en heures sidérales ou moyennes, les moments des passages au méridien et aux fils latéraux. Ces temps multipliés par le cosinus de la déclinaison fourniront des premières valeurs τ, τ', τ'', des distances équatoriales. D'autres observations, faites sur un grand nombre d'étoiles, donneront des séries de ces distances équatoriales qui seront finalement représentées assez exactement par les moyennes des résultats isolés.

Lorsqu'on opérera ensuite avec le même instrument sur une étoile de déclinaison D, on divisera toutes les cinq ou sept distances équatoriales par cos. D, et notant avec une pendule bien réglée alors, les heures des passages aux cinq fils, on en fera la somme et on y ajoutera toutes les distances relatives aux fils antérieurs au passage au méridien, en en retranchant toutes celles qui se rapportent aux fils postérieurs. Le résultat divisé par cinq donnera l'heure du passage au méridien avec la garantie d'exactitude qui serait résultée de l'observation cinq fois répétée de ce passage.

Déviation du plan méridien. — Nous avons dit comment on détermine le plan méridien par l'étude des conditions auxquelles il doit satisfaire. Il est bon de pouvoir y joindre une nouvelle condition qui le contrôle, et qui permet d'apprécier l'influence d'une déviation subie par lui, si cette déviation existe.

Soient PM le méridien, *Ze* le vertical qui lui est involontairement substitué, incliné sur le premier d'un angle inconnu α. Lorsqu'on observera dans ce vertical un astre e ayant une déclinaison D et une distance zénithale actuelle δ, il s'ensuivra une erreur p sur l'angle horaire qui ne sera pas zéro comme il devrait être pour le passage au méridien, et par suite une erreur correspondante $\frac{p}{15}$ commise sur l'appréciation du temps.

Si la petite déviation horizontale α était connue, on aurait facilement la déviation horaire p par la formule approximative $p = \alpha \frac{\sin.\ \delta}{\cos.\ D}$.

Pour trouver α, il faut se servir d'une pendule, mais celle-ci ne doit pas être nécessairement réglée. On observe le passage au méridien faux Ze, d'une étoile e d'ascension droite $Æ$ connue, et on note l'heure t marquée par cette pendule ; si elle était réglée sur le temps sidéral et si on observait au méridien on aurait $t = Æ$, en supposant l'ascension droite exprimée en temps, comme le donne la connaissance des temps. Mais la pendule n'est pas réglée, elle est en retard d'une quantité inconnue ε, en sorte que lorsqu'elle indique un temps t, il est en réalité une heure sidérale $t+\varepsilon$. Lorsque l'étoile continuant son mouvement arrivera au méridien, il se sera de plus écoulé un temps $\frac{p}{15}$ et l'heure sidérale existante alors, $Æ$, sera égale à l'heure sidérale actuelle $t+\varepsilon$ augmentée du temps $\frac{p}{15}$ employé pour l'arrivée au méridien

$$t+\varepsilon+\frac{p}{15}=Æ \quad \text{ou} \quad \frac{p}{15}=Æ-t-\varepsilon$$

Supposons qu'on fasse une seconde observation sur une autre étoile, on aura de même

$$\frac{p'}{15}=Æ'-t'-\varepsilon' \quad \text{d'où} \quad \frac{p-p'}{15}=Æ-Æ'+t'-t+\varepsilon'-\varepsilon$$

Les deux retards de la pendule ε et ε' peuvent être quelconques et tout à fait inconnus si les étoiles choisies sont quelconques, mais si on a soin de les prendre de telle manière qu'elles passent à peu près en même temps au méridien, c'est-à-dire ayant environ la même ascension droite tout en conservant des déclinaisons différentes, lors des deux observations ces deux retards différeront très-peu l'un de l'autre, si la pendule, sans être réglée, a une marche à peu près régulière et peu accélérée. On pourra donc, dans de telles circonstances, se contenter de prendre

$$\frac{p-p'}{15}=Æ-Æ'+t'-t$$

mettant au lieu de p et p' leurs valeurs en fonction de la déviation α, on aura

$$Æ-Æ'+t'-t=\frac{\alpha}{15}\left(\frac{\sin.\,\delta}{\cos.\,D}-\frac{\sin.\,\delta'}{\cos.\,D'}\right)$$

équation qui peut donner α. On la transforme comme il suit pour

éviter l'observation des distances zénithales, en remarquant que la déviation étant petite, les étoiles sont vues très-près du méridien, et qu'approximativement alors, $Ze + Pe = ZP$ ou $\delta = D - L$ ou $L - D$ suivant la position du zénith, en désignant par L la latitude du lieu

$$Æ - Æ' + t' - t = \frac{\alpha}{15}\left(\frac{\sin.(L-D)}{\cos.D} - \frac{\sin.(L-D')}{\cos.D'}\right) = \frac{\alpha}{15}\,\frac{\cos.L\sin.(D'-D)}{\cos.D.\cos.D'}$$

d'où
$$\alpha = 15\,\frac{(Æ - Æ' + t' - t)\cos.D.\cos.D'}{\cos.L\cos.(D'-D)}$$

La variation horaire p correspondante à la variation azimutale α sera ensuite trouvée dans chaque circonstance par l'équation

$$p = \alpha\,\frac{\sin.\delta}{\cos.D}$$ qui fournira approximativement $$\frac{p}{15} = \frac{\alpha}{15}\,\frac{\sin.(L-D)}{\cos.D}$$

CHAPITRE II

RÈGLEMENT D'UNE PENDULE

Le règlement de la pendule est nécessaire pour la détermination des latitudes, longitudes et azimuts.

Une pendule est parfaitement réglée suivant un des deux modes, sidéral ou moyen, employés dans la mesure du temps, lorsqu'elle indique non-seulement des heures qui sont égales en durée aux heures sidérales ou moyennes, mais lorsque de plus l'origine de ces indications coïncide avec les passages au méridien, de l'équinoxe du printemps ou du soleil fictif moyen, qui sont pris pour origine des temps.

Ce règlement parfait n'est jamais obtenu et on est obligé de se contenter d'un règlement tel, que des indications convenablement espacées de la pendule permettent de conclure les indications réelles du temps. Nous indiquerons plus tard comment on

arrive à ce résultat au moyen de renseignements isolés qui donnent en regard l'un de l'autre, l'heure que marque la pendule et l'heure qui existe réellement.

Nous allons chercher les moyens qui permettent d'arriver à ce résultat complet, en renvoyant au paragraphe précédent pour le cas où l'on voudrait seulement connaître la valeur des unités de la pendule, en rappelant qu'à ce sujet il suffit d'observer, dans un plan vertical quelconque, les passages d'une même étoile, passages qui doivent être séparés par des intervalles de 24^h ou 12^h sidérales.

126. **Méridien connu.** — Le méridien peut, à la rigueur, être déterminé sans le secours d'une pendule préalablement réglée, et ce n'est que dans ce cas qu'on pourra l'employer pour résoudre la question qui nous occupe.

Le passage du soleil au méridien donne le midi vrai, celui du soleil fictif donnerait le midi moyen et enfin celui de l'équinoxe du printemps donnerait le midi sidéral. Les deux derniers ne sont pas observables; mais l'un des deux peut être remplacé par l'observation d'un astre dont la position relative est déterminée par l'ascension droite.

Observation des étoiles. — Supposons d'abord qu'on observe une étoile. Elle passera au méridien à une heure sidérale Æ, puisque dans l'équation générale $P = 15\,(t - Æ)$ l'angle horaire $P = o$. En consultant la pendule au moment de ce passage, on trouvera une indication t correspondant à l'heure sidérale véritable Æ.

Pour savoir quelle est l'heure moyenne qui existe lorsque la pendule marque t, il suffit de la chercher dans la connaissance des temps et de la trouver par interpolation, au moyen de la table du temps sidéral à midi moyen, en se rappelant que l'heure sidérale de Paris qui répond à l'heure sidérale Æ du lieu est approximativement égale à $Æ \pm \frac{M}{15}$, M, désignant la longitude approchée.

Observation du soleil. — Le soleil passe au méridien à midi vrai ou à une heure moyenne égale à l'équation du temps, fournie, par la *Connaissance,* sous le nom de temps moyen à midi vrai. Si a est la valeur de cette équation, elle correspondra, comme heure moyenne, à l'heure t lue sur la pendule.

La valeur actuelle de l'équation du temps, peu variable du reste, est celle qui est écrite en regard de l'heure moyenne approchée de Paris donnée par $t \pm \frac{M}{15}$.

L'heure moyenne du lieu a, ainsi obtenue, permettra de trouver, s'il est nécessaire, l'heure sidérale correspondante, au moyen de la table de l'heure sidérale à midi moyen.

Il est bien entendu que les observations de passage auront dû être faites aux cinq fils de la lunette méridienne, et que les temps lus sur la pendule auront été ramenés à celui du passage au méridien comme il a été dit au paragraphe précédent. Si une déviation α de celui-ci, a été préalablement reconnue, le temps t obtenu comme il vient d'être dit, devra ensuite être remplacé par

$$t' = t + \frac{\alpha}{15} \frac{\sin.(L-D)}{\cos.D}$$

pour représenter l'heure que la pendule aurait marquée, si l'observation avait été faite dans le méridien exact.

127. **Méridien inconnu.** — Si le méridien n'a pas été préalablement déterminé, il faut avoir recours à l'une des deux méthodes dites des hauteurs correspondantes ou des hauteurs simples.

Hauteurs correspondantes. — Cette méthode peut s'appliquer aux étoiles ou au soleil.

Hauteurs correspondantes d'une étoile. — Si on considère le triangle pôle, zénith, étoile, on voit que pour un même lieu et une même étoile, deux des côtés, Pe, ZP, de ce triangle sont constants, en sorte que si on précise le troisième côté δ, le triangle se trouve complétement défini, c'est-à-dire que ses trois autres éléments, entre autres les angles horaires P et azimutal Z, sont déterminés. Si donc on place ce triangle à l'est ou à l'ouest du méridien, les azimuts Z sont égaux et il en est de même des angles horaires P, si le côté δ ou si la hauteur sont restés les mêmes.

Nous avons invoqué cette propriété par la détermination du plan méridien; nous l'invoquons encore pour le règlement de la

pendule ; dans le premier cas, nous avons utilisé l'égalité des azimuts ; dans le cas actuel, nous invoquons l'égalité des angles horaires répondant à des hauteurs égales. Ces angles horaires seront parcourus dans des temps égaux par suite de l'uniformité du mouvement diurne ; en sorte que si t et t' sont les heures de la pendule marquées lorsque l'étoile avait les deux hauteurs correspondantes, le passage de cette étoile au méridien a dû avoir lieu lorsque l'indication de cette pendule était $\frac{t+t'}{2}$, en supposant, bien entendu, que pendant le petit intervalle de temps $t'-t$ la pendule a marché régulièrement, ce qui est toujours admissible, si on rapproche le moment des observations.

Mais à ce moment du passage au méridien, l'heure sidérale existante était égale à Æ ascension droite de l'étoile, et l'heure moyenne pouvait être trouvée, comme il a été dit précédemment, par la table du temps sidéral à midi moyen.

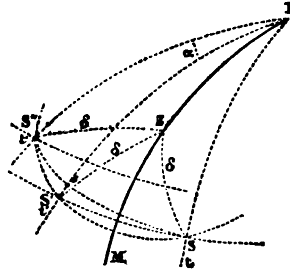
On a donc, par cette double observation très-simple, mais dépendant de l'observation de distances zénithales, le moyen de comparer les indications de la pendule aux heures véritables, soit sidérales, soit moyennes. Nous venons d'établir une sorte de restriction, en parlant des distances zénithales ; c'est qu'en effet, elles sont une cause d'erreur. Nous savons qu'elles sont en effet dénaturées par la réfraction, en fonction de la hauteur qui est ici la même, et de l'état thermométrique et barométrique de l'atmosphère, état qui, dans le cas actuel, a pu changer pendant les deux observations.

On diminuerait cette chance d'erreur, en rapprochant les observations du méridien, c'est-à-dire en se rapprochant des culminations, mais il naîtrait de là une autre erreur grave, provenant de la petitesse des variations de hauteurs comparées à celles des azimuts ; vers ces points de culmination les astres semblent en effet décrire une horizontale et avec des angles horaires très-différents, ils paraissent répondre à la même distance zénithale. Il vaut donc mieux risquer les variations de réfraction, en observant près des élongations extrêmes, alors que de grandes variations de hauteur répondent à de petites variations horaires.

128. Hauteurs correspondantes du soleil. — L'observation double n'est plus aussi simple quand on la fait sur le soleil, parce qu'entre les deux observations, il s'est mû sur l'écliptique ; sa variation en longitude céleste en a produit d'autres sur son

ascension et sa déclinaison, en sorte que les hauteurs égales ne répondent plus à des angles horaires symétriques.

Soit Z le zénith, S une première position du soleil parcourant alors le petit cercle dont la déclinaison est D. Du zénith comme pôle géométrique, supposons décrit un arc de petit cercle, dont la distance à Z mesurée sur un arc de grand cercle, soit la distance zénithale choisie δ; tous les points de ce petit cercle auront des hauteurs égales au-dessus de l'horizon.



Si le soleil ne variait pas en déclinaison, sa seconde position S' serait symétrique à S, et en désignant par t et t' les deux indications marquées par la pendule, on saurait, comme pour une étoile, que le moment du passage a répondu à $\frac{t+t'}{2}$. Mais au moment de la seconde observation, la déclinaison du soleil ayant varié, il se trouve en S'' après avoir parcouru l'arc oblique SsS'' au lieu de SS', et la lecture faite sur la pendule est t''.

Il faut, de t'' conclure t' dont on n'a pas eu connaissance; il est évident, à la seule inspection de la figure, que $t''-t'$ est égal au temps que le soleil met à passer du cercle horaire S'P symétrique à SP, cercle dans lequel l'astre a occupé une position telle que s, au cercle horaire S''P qui le contient lors de la seconde observation.

En désignant par α la différence des angles horaires S''PM et S'PM, le temps employé à ce passage est $\frac{\alpha}{15}$, en sorte que $t''-t' = \frac{\alpha}{15}$ donne $t' = t'' - \frac{\alpha}{15}$ et $\frac{t+t''}{2} - \frac{\alpha}{30}$ pour l'heure que la pendule a dû marquer lors du passage au méridien.

On arrive à connaître α de la manière suivante. Dans le triangle PZS on a, lors de la première observation,

$$\cos.\,\delta = \sin.\,D\,\sin.\,L + \cos.\,D\,\cos.\,L\,\cos.\,P$$

équation qui se rapporte également à l'observation fictive S'.

Lors de la deuxième observation, la déclinaison D est devenue $D+d$ et par suite P est devenu $P+\alpha$, ce qui donne la nouvelle relation

$$\cos.\,\delta = \sin.\,L\,\sin.\,(D+d) + \cos.\,L\,\cos.\,(D+d)\,\cos.\,(P+\alpha)$$

Les variations d et α sont nécessairement petites puisque les opérations sont supposées faites le même jour ; on peut donc écrire

$$\cos.\,\delta = \sin.\,L\,(\sin.\,D + d\cos.\,D) + \cos.\,L\,(\cos.\,D - d\sin.\,D)\,(\cos.\,P - \alpha\sin.\,P)$$
$$= \sin.\,L\sin.\,D + \cos.\,L\cos.\,D\cos.\,P + d\,(\sin.\,L\cos.\,D - \cos.\,L\sin.\,D\cos.\,P)$$
$$- \alpha\cos.\,D\cos.\,L\sin.\,P$$

En retranchant de l'équation relative à la première observation, on a

$$o = d\,(\sin.\,L\cos.\,D - \cos.\,L\sin.\,D\cos.\,P) - \alpha\cos.\,L\cos.\,D\sin.\,P$$
$$\alpha = d\left(\frac{\text{tang.}\,L}{\sin.\,P} - \text{tang.}\,D\cot.\,P\right)$$

L'heure marquée par la pendule, lorsqu'il est midi vrai, est donc,

$$\frac{t+t''}{2} - \frac{d}{30}\left(\frac{\text{tang.}\,L}{\sin.\,P} - \text{tang.}\,D.\cot.\,P\right)$$

et les heures sidérale et moyenne correspondantes seraient obtenues comme il a été dit au paragraphe précédent.

La correction $\frac{\alpha}{30}$ est toujours assez petite pour qu'on puisse la calculer par approximation, ce qu'on ne pourrait du reste pas faire rigoureusement. C'est pourquoi il suffit, mais cela est indispensable, de connaître la *latitude approchée* du lieu de l'observation. Pour la même raison on se contente de prendre la déclinaison D pour le midi moyen de Paris du jour de l'opération, quoique cela ne soit pas sa vraie valeur actuelle; de même encore d sera la variation en déclinaison du soleil, pour un intervalle de temps $t''-t$ à l'époque approchée répondant au midi moyen de Paris du jour de l'observation. Enfin l'angle horaire P sera obtenu soit par la résolution approximative de la première équation, ce qui nécessiterait la connaissance de la distance zénithale δ, soit plus simplement en le prenant égal à $15\,\frac{t''-t'}{2}$.

La formule que nous venons de donner est suffisamment exacte, pourvu qu'on mette pour P une valeur suffisamment approchée. Quand on observe loin du méridien, on peut se contenter de prendre, comme nous venons de le dire, $P = 54\,\frac{t''-t}{2}$; mais il n'en serait plus de même si les observations étaient rapprochées du

méridien, car alors on aurait aux dénominateurs du terme correctif, d'une part, sin. P, et de l'autre, tang. P qui, excessivement petits, auraient une grande influence sur les termes eux-mêmes, de sorte qu'une légère erreur dans l'appréciation de l'angle horaire P, pourrait en engendrer une autre considérable sur le terme correctif.

Les observations de hauteurs correspondantes du soleil ne doivent donc pas se faire près du méridien, conséquence à laquelle nous étions déjà arrivé pour les observations analogues des étoiles; les considérations données à ce sujet à la fin du paragraphe précédent s'appliquent du reste également au cas actuel.

La méthode des hauteurs correspondantes ne permet pas l'emploi des répétitions. Elle a de plus l'inconvénient qu'il faut s'astreindre dans son emploi, à saisir l'instant où l'astre se trouve précisément, après son passage au méridien, à la même hauteur qu'avant, et courir par conséquent la chance défavorable que l'astre sera peut-être caché par un nuage.

129. Hauteur simple ou absolue d'une étoile ou du soleil. — L'observation de la hauteur simple d'un astre, soleil ou étoile, permet la répétition appliquée comme nous l'indiquerons plus tard, mais elle exige une connaissance de la latitude plus approchée que celle des hauteurs correspondantes; on peut pourtant obvier à l'imperfection de cette connaissance, ainsi qu'il sera également indiqué un peu plus loin. Supposons, pour le moment, cette latitude exactement connue.

Rappelons-nous que le problème du règlement de la pendule se réduit toujours à la recherche de l'heure réellement existante, soit sidérale, soit moyenne, lorsque la pendule donne une certaine indication.

Considérons le triangle pôle, zénith, étoile ou soleil; il sera soumis à la formule fondamentale de trigonométrie sphérique

$$\cos.\ \delta = \sin.\ D\ \sin.\ L + \cos.\ D\ \cos.\ L\ \cos.\ P$$

dans laquelle δ doit être la distance zénithale vraie, c'est-à-dire celle qui a été observée corrigée de la réfraction dans tous les cas, et en plus de la parallaxe et du demi-diamètre apparent, s'il s'agit du soleil.

L'observation de cette distance zénithale δ correspondra à une indication t fournie par la pendule étudiée, et à l'angle horaire P de la formule précédente, angle qui est, avec l'heure réelle actuelle, dans une des relations données au § 124. Il suffit, pour avoir résolu le problème indiqué, d'employer une des formules qui donnent le sinus, le cosinus ou la tangente de la moitié de l'angle P en fonction des trois côtés qui sont ici connus, et de transformer celui-ci en heures sidérale ou moyenne.

Étoile. — Si l'observation porte sur une étoile, la résolution de la formule $\sin\frac{1}{2} = \sqrt{\ldots..}$ n'exige, outre la connaissance de δ et de L, que nous avons supposée, que celle de la déclinaison actuelle. Celle-ci sera fournie simplement par la connaissance des temps, pour le midi moyen de Paris du jour de l'observation. L'angle horaire une fois connu, il suffira de se rappeler que $P = 15(T - Æ)$, ou l'heure sidérale $T = Æ + \frac{P}{15}$, équation dans laquelle on mettra pour Æ la valeur très-approchée de l'ascension droite fournie par les tables, répondant comme la déclinaison à midi moyen de Paris.

L'heure t de la pendule correspondra donc à T de temps sidéral et à T' de temps moyen trouvé au moyen de T par la table du temps sidéral à midi moyen pour une heure sidérale de Paris $= T + \frac{M}{15}$, M désignant la longitude occidentale approchée.

Soleil. — Mais s'il s'agit du soleil, la déclinaison D, élément essentiel de la résolution de l'équation $\sin\frac{1}{2}P = \sqrt{\ldots..}$ ne peut pas être prise d'une manière aussi abrégée que celle d'une étoile, par suite de la grandeur de ses variations. Il faudra, pour la trouver dans la connaissance des temps, connaître avec un certain degré d'exactitude l'heure moyenne de Paris qui répond à l'instant de l'observation, et pour cela il faudra savoir approximativement l'heure du lieu.

Une première résolution de l'équation $\sin\frac{1}{2}P' = \sqrt{\ldots..}$ dans laquelle on mettra pour D une première valeur un peu erronée de la déclinaison, celle qui correspond au midi moyen de Paris, donnera une valeur P' approximative de P. Approximativement encore l'heure moyenne du lieu sera $T' = \textit{éq. du temps} + \frac{P'}{15}$, et par suite celle de Paris, $\frac{P'}{15} + \textit{éq. temps} + \frac{M}{15}$, permettra de trouver

une valeur de D suffisamment exacte pour pouvoir être employée à la résolution finale de la formule $\sin\frac{1}{2}P = \sqrt{\ldots\ldots}$ La valeur de P obtenue au moyen de cette équation fournira l'angle horaire exact du soleil vrai, et l'heure moyenne véritable du lieu, correspondante à l'indication t de la pendule, sera

$$T' = \frac{P}{15} + \text{Éq. du temps}$$

Mais dans ce résultat l'équation du temps aura dû être trouvée dans la connaissance, au moyen de l'heure moyenne approchée de Paris, $\frac{P'}{15} + \textit{éq. du temps} + \frac{M}{15}$, dans laquelle, comme dans son premier emploi relatif à la recherche de la déclinaison, on aura dû mettre une première valeur un peu inexacte de cette équation du temps, celle, par exemple, qui répond au midi moyen de Paris pour le jour de l'observation.

Si, en regard de t heure de la pendule et T heure moyenne, on veut écrire l'heure sidérale correspondante, il suffira de voir dans la table du temps sidéral à midi moyen et de trouver, par interpolation, quelle est l'avance de l'un des temps sur l'autre, à l'époque $\frac{P}{15} + \textit{éq. temps} + \frac{M}{15}$ du méridien de Paris et de l'ajouter à l'heure moyenne T du lieu, pour avoir son heure sidérale.

L'observation de la hauteur absolue du soleil ou d'une étoile permet les répétitions comme nous le verrons un peu plus loin, aussi l'emploie-t-on souvent, et pourtant elle exige la connaissance de la latitude, qui est généralement inconnue quand on règle une pendule. Il est vrai que la résolution de l'équation $\sin\frac{1}{2}P$ exigerait cette connaissance exacte, ce qui rendrait la méthode indiquée à peu près inutile, si on ne tournait la difficulté de la manière suivante : Si, au lieu de L rigoureusement vrai, on met une valeur *un peu erronée*, qu'on peut souvent connaître, l'influence de l'erreur commise se fera sentir sur $\sin\frac{1}{2}P = \sqrt{\ldots\ldots}$, avec une intensité et un signe indépendants du sens de P, c'est-à-dire indépendants de la position de l'angle horaire par rapport au méridien; en sorte que deux opérations symétriques par rapport à ce méridien donneront, par leur moyenne, l'angle horaire moyen correspondant à la moyenne du temps de la pendule. On groupe alors les observations de manière que cette symétrie existe approximativement, et en même temps qu'on annule l'influence de l'erreur commise dans

l'appréciation de la latitude, on atténue celle qui provient de l'usure des centres qui dénaturant les distances zénithales de la même manière dans les observations symétriques, se trouve avoir peu d'influence et peut par suite n'être connue qu'approximativement, sans grand inconvénient.

130. Réduction à l'époque moyenne. — La méthode des hauteurs absolues employées au règlement d'une pendule peut s'appliquer aux répétitions. D'abord quand les observations ne sont pas trop multipliées, lorsqu'elles sont groupées par quatre ou par six, on se contente de prendre la moyenne des distances zénithales fournies par la lecture finale, et on la transporte dans la formule $\sin \frac{1}{2} P = \sqrt{\ldots\ldots}$, ce qui fournit une valeur de l'angle horaire, qu'on regarde comme celui qui répond à l'époque moyenne fournie par la moyenne des indications de la pendule, et on termine l'opération comme il a été indiqué plus haut.

Mais lorsque les observations sont très-répétées, il n'est plus exact de supposer que l'époque moyenne répond à la moyenne des distances zénithales. La relation qui existe entre ces moyennes n'est plus alors celle que fournit la formule fondamentale de trigonométrie sphérique, et il y a lieu de modifier celle-ci. Soient,

$\delta'\,\delta'', \delta'''\ldots$	$t', t'', t'''\ldots$	$P', P'', P'''\ldots$	les quantités existantes lors des observations,
δ	t	P	leurs moyennes.

Les angles horaires sont naturellement proportionnels aux temps qui s'écoulent pendant leur parcours; il suit de là que leur moyenne répond à la moyenne des temps quelle que soit l'origine à partir de laquelle on compte ces temps, et quelle que soit la valeur des unités employées, pourvu toutefois que ces unités restent égales entre elles. Ainsi P répondra à la moyenne t des heures fournies par la pendule étudiée, car, pendant l'intervalle qui sépare les répétitions, on peut toujours supposer la marche de celle-ci régulière.

Mais P qui répond à t, ne correspond plus à δ, moyenne des distances zénithales, en sorte que l'équation fondamentale n'existe plus entre P, δ et les constantes D et L; mais cette équation existe toujours entre les résultats élémentaires $P'\delta', P''\delta''\ldots\ldots$

Posons $\delta' = \delta + e', \delta'' = \delta + e''\ldots\ldots P' = P + p', P'' = P + p''\ldots\ldots$, on aura pour chacun des couples une équation de la forme

$$\cos.\ \delta' = \cos.\ (\delta + e') = \sin.\ D\ \sin.\ L + \cos.\ D\ \cos.\ L\ \cos.\ (P + p')$$

qu'on peut, par suite de la petitesse de e' et p', écrire de la manière suivante :

$$\cos.\ \delta\left(1-\frac{e'^2}{2}\right) - e' \sin.\delta = \sin.D \sin.L + \cos.D \cos.L \left\{\cos.\ P\left(1-\frac{p'^2}{2}\right) - p' \sin.P\right\}$$

Ajoutons la série d'équations de même forme; désignons par Σ la somme de termes semblables, remarquons que δ et P étant des moyennes, on a $e' + e'' + \ldots = o$, $p' + p'' + \ldots = o$, et divisons par le nombre n des répétitions. Le résultat sera :

$$\cos.\ \delta - \cos.\ \delta\ \Sigma\ \frac{e^2}{2n}$$

$$= \sin.\ D\ \sin.\ L + \cos.\ D\ \cos.\ L\ \cos.\ P - \cos.\ D\ \cos.\ L\ \cos.\ P\ \Sigma\ \frac{p^2}{2n}$$

L'inconnu de la question est l'angle horaire moyen P que nous savons correspondre à la moyenne des heures de la pendule.

Au lieu de le chercher directement, déterminons-le par la correction qu'il faudrait faire subir à l'angle horaire π qui résulterait de l'emploi de la moyenne δ des distances zénithales mise dans la formule fondamentale,

$$\cos.\ \delta = \sin.\ D\ \sin.\ L + \cos.\ D\ \cos.\ L\ \cos.\ \pi.$$

qui, retranchée de l'équation précédente, fournira

$$-\cos.\ \delta\ \Sigma\ \frac{e^2}{2n} = \cos.\ D\ \cos.\ L\ (\cos.\ P - \cos.\ \pi) - \cos.\ D\ \cos.\ L\ \cos.\ P\ \Sigma\ \frac{p^2}{2n}$$

Mais P et π diffèrent très-peu, et en représentant par $d\pi$ la petite correction que nous cherchons, nous pouvons nous contenter de prendre

$$P = \pi + d\pi, \quad \cos.\ P = \pi - d\pi\ \sin.\ \pi, \quad \cos.\ P - \cos.\ \pi = d\pi.\ \sin.\ \pi.$$

substituant

$$\cos.\ \delta.\ \Sigma\ \frac{e^2}{2n} = \cos.\ D\ \cos.\ L\ \sin.\ \pi\ d\pi + \cos.\ D\ \cos.\ L\ \cos.\ P.\ \Sigma\ \frac{p^2}{2n}$$

Dans cette équation, qui ne doit fournir qu'une différence très-petite, $d\pi$, nous pouvons assimiler P inconnu, à π qui peut être connu, et, dégageant $d\pi$, obtenir,

$$d\pi = \frac{\cos.\ \delta}{\cos.\ D\ \cos.\ L\ \sin.\ \pi}\ \Sigma\ \frac{e^2}{2n} - \cot.\ \pi.\ \Sigma\ \frac{p^2}{2n}$$

Exprimons actuellement que e' et p', e'' et p''... sont les variations correspondantes de δ' et P', δ'' et P''....., comparés aux valeurs moyennes δ et P, ce que le calcul n'a pas encore dit. Cela donnera naissance à des équations de la forme,

$$\cos.\ \delta' = \cos.\ (\delta + e') = \sin.\ D \sin.\ L + \cos.\ D \cos.\ L \cos.\ (P + p')$$

$$\cos.\ \delta - e' \sin.\ \delta = \sin.\ D\ \sin.\ L + \cos.\ D\ \cos.\ L\ (\cos.\ P - p' \sin.\ P)$$

Mais d'après la définition de π, on a l'équation déjà employée

$$\cos.\ \delta = \sin.\ D\ \sin.\ E + \cos.\ D \cos.\ L \cos.\ \pi$$

Si on en retranche la précédente, et si on confond le P de l'une avec le π de l'autre, ce qui produira une erreur insensible, on aura

$$e' \sin.\ \delta = p' \sin.\ \pi \cos.\ D \cos.\ L, \qquad e' = p' \frac{\sin.\ \pi \cos.\ D \cos.\ L}{\sin.\ \delta}$$

transportons cette valeur de e', ainsi que les autres qui seraient analogues pour e'', e'''... dans l'équation qui donne $d\pi$, et nous aurons

$$d\pi = -\left(\cot.\ \pi = \frac{\cot.\ \delta \cos.\ D \cos.\ L \sin.\ \pi}{\sin.\ \delta}\right) \frac{1}{n} \Sigma \frac{p'^2}{2}$$

et enfin pour l'angle horaire moyen à comparer à la moyenne $\frac{t' + t'' + t''' + \ldots}{n}$ des heures de la pendule

$$p = \pi - \left(\cot.\ \pi - \frac{\cot.\ \delta \cos.\ D \cos.\ L \sin.\ \pi}{\sin.\ \delta}\right) \frac{1}{n} \Sigma \frac{p^2}{2} \sin.\ 1''$$

Nous avons introduit le sinus de 1″ parce que dans la recherche de $d\pi$, on a invoqué les développements de lignes trigonométriques en séries, ce qui supposait que p et $d\pi$ étaient exprimés en rapport. Pour transformer $d\pi$ en secondes d'angles, il faut le diviser par sin. 1″, mais si p', p''... sont exprimés en secondes, ils devraient figurer sous forme de rapport, c'est-à-dire qu'ils doivent être multipliés par sin. 1″, et comme ils se trouvent au carré sous le signe Σ, l'expression écrite est exacte.

L'angle π, élément principal du calcul de P, est fourni par l'équation sin. $\frac{1}{2}\pi = \sqrt{\ldots}$, dans laquelle on met pour la distance zénithale la moyenne de celles qui ont été observées. La correction se compose de deux facteurs, l'un constant calculé une fois pour toutes, et l'autre variable avec les différentes valeurs de p, c'est-à-dire p', p'', p'''..... qu'on obtient en prenant les diffé-

rences entre les heures d'observation t', t'', t'''..... et leur moyenne t, et multipliant par 15. Cette manière de trouver p', p''... ne serait rigoureusement exacte que pour les étoiles et lorsque la pendule marquerait des heures dont la durée serait celle des heures sidérales, mais ce qui ne produira jamais d'erreur sensible par suite de la petitesse des variations horaires p', p''..... On évite cette multiplication par 15 sous le signe Σ en remarquant que le résultat correspondant serait fourni en angle, et que pour l'avoir en temps, il faudrait le diviser par 15, ce qui donne l'équation finale

$$\text{P en temps} = \frac{\pi}{15} - \left(\cot.\ \pi - \frac{\cot.\ \delta \cos.\ \text{D} \cos.\ \text{L} \sin.\ \pi}{\sin.\ \delta}\right) \frac{1}{15.n}\ \Sigma\ \frac{p^2}{2} \sin.\ 1''$$

dans laquelle p est exprimé directement en temps sous les formes successives $t' - t$, $t'' - t$.....

On écrit souvent le terme variable, dit réduction à l'*époque moyenne*, sous la forme $\frac{1}{15\ n}\ \Sigma\ \frac{2.\sin.^2 \frac{1}{2} p}{\sin.\ 1''}$, dans laquelle p doit être exprimé en angle, c'est-à-dire égal à $(t' - t)\ 15$, $(t'' - t)\ 15$..... Les deux formes indiquées rentrent en effet l'une dans l'autre.

Des tables non insérées dans la connaissance des temps, mais qu'on trouve dans plusieurs ouvrages, notamment dans l'astronomie pratique de Francœur, permettent de calculer les termes contenus sous le signe Σ, avec les simples arguments $t' - t$, $t'' - t$..... Il faut, du reste, les calculer directement, sous la première forme que nous avons donnée à l'équation.

Quand, par la méthode précédente, on est arrivé à connaître l'angle horaire moyen P qui correspond à la moyenne des temps de la pendule, il ne reste plus qu'à chercher l'heure réelle sidérale ou moyenne qui répond à cette valeur de l'angle horaire, ce qui se fait comme il a été indiqué au commencement du présent paragraphe pour les observations isolées faites sur une étoile ou sur le soleil.

Les observations faites sur les étoiles sont préférables à celles qui proviennent de l'emploi du soleil, parce qu'on n'a pas à tenir compte du demi-diamètre apparent et de la parallaxe.

L'angle horaire qui est l'inconnu de la question, étant trouvé au moyen des distances zénithales qui seules le font varier, sera mieux déterminé quand ses variations petites correspondront à de grandes variations des hauteurs; aussi, les observations doi-

vent-elles être faites loin du méridien. Ce rapport des variations est le plus favorable dans le premier vertical, ou plan perpendiculaire au méridien : aussi, on doit s'en rapprocher et ne viser pourtant que des étoiles qui ne coupent ce plan qu'à des hauteurs assez grandes, 40° environ, pour éviter en partie l'influence de la réfraction fort incertaine près de l'horizon.

131. Tableau de l'état de la pendule. — Nous avons dit qu'il n'était pas possible d'arriver à régler exactement la pendule de manière qu'elle donne à chaque instant rigoureusement, les heures sidérale ou moyenne. Cela supposerait une marche parfaitement régulière qu'on n'obtiendra jamais, mais dont les instruments modernes ne s'écartent que très-peu. On cherchera seulement à modérer le mouvement de la pendule au moyen du balancier, de manière que ses écarts journaliers soient inférieurs à deux secondes, et on la réglera chaque jour, pendant toute la durée des observations de latitude, longitude et azimut, par un des procédés indiqués précédemment, surtout par l'observation des distances zénithales d'une ou de deux étoiles, rapportées à l'époque moyenne.

Le mode de temps le plus commode est le temps sidéral, surtout quand on veut opérer dans le méridien, parce qu'alors le règlement journalier se fait très-facilement par les passages d'étoiles qui doivent avoir lieu à des heures sidérales égales aux ascensions droites. Nous avons dit pourtant que cette détermination du plan méridien ne pouvait être bien faite que par le secours d'une pendule réglée. Celle-ci aura en conséquence pu être réglée pendant quelques jours, par les hauteurs absolues, ce qui aura servi à déterminer le plan méridien, qui à son tour servira ensuite, pendant toute la durée des opérations, à contrôler la marche de la pendule.

Quelle que soit la méthode qu'on suive à cet égard, on consigne dans un tableau dit *état de la pendule* des renseignements journaliers qui permettent de connaître l'heure réelle répondant à une observation quelconque pendant laquelle la pendule marquait une certaine indication. Une première colonne contient la date, une seconde le temps de l'observation, sidéral par exemple, une troisième donne le temps marqué par la pendule, une quatrième son mouvement ou accélération en 24 heures, et une cinquième la variation de ce mouvement diurne ; enfin une

sixième peut indiquer le mouvement horaire qui n'est que le quotient du mouvement diurne divisé par 24.

Supposons comme exemple simplifié que deux renseignements successifs soient les suivants :

1er jour à Æ temps sidéral, la pendule marque Æ $+ 1^s,25$ } avance diurne $1^s,50$
2e jour à Æ *id.* *id.* Æ $+ 3^s,75$ }

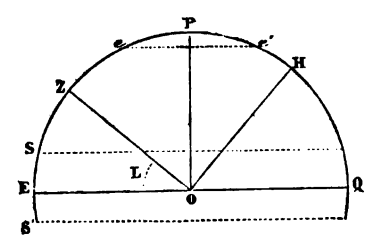
Une observation quelconque a été faite à une heure H de la pendule comprise entre le premier et le deuxième jour, et on veut savoir quelle heure sidérale il était réellement. En 24 heures l'avance de la pendule a augmenté, approximativement, de $1^s,50$ (cette avance correspond en réalité à $24^h + 3^s,75 - 1^s,25$), en H $-$ Æ elle aura augmenté de $1^s,50 \frac{H - Æ}{24}$; son avance sur l'heure sidérale sera donc $1^s,25 + 1^s,50 \frac{H - Æ}{24}$, et l'heure sidérale existante à l'heure H de la pendule, sera $H' = H - 1^s,25 - 1^s,50 \frac{H - Æ}{24}$.

L'observation de l'heure marquée par la pendule à un instant précis est très-difficile ; chaque observateur commet une erreur personnelle qui peut varier d'intensité avec la visibilité de l'image qui précise le moment ; il est bon qu'un second observateur soit chargé uniquement de la lecture de la pendule, lecture effectuée à un signal, comme un tope frappé lors du passage de l'astre au réticule de la lunette. Un observateur isolé arrive encore à une grande précision s'il se sert d'un pointeur ; celui-ci est une montre mise incessamment d'accord avec la pendule, montre que l'on tient à la main et sur le cadran de laquelle les instants précis des observations sont marqués par des points noirs au moyen de la pression exercée sur un ressort. L'emploi d'un chronomètre à détente dont l'aiguille des secondes est double, permet également d'arriver à un résultat exempt de l'erreur personnelle, par l'arrêt instantané d'une de ces deux aiguilles.

CHAPITRE III

LATITUDE

132. Méridien connu. — *Doubles passages des étoiles.* — On mesure les deux distances zénithales δ et δ' d'une étoile quelconque à ses deux passages au méridien, ce qui oblige à ne prendre que des étoiles telles que le passage inférieur e' ait lieu au-dessus de l'horizon, c'est-à-dire telles que



$$Pe' = 90° - D < PH = L, \quad \text{ou} \quad D > 90° - L.$$

Il faut de plus que le passage inférieur n'ait pas lieu sous une hauteur trop petite, car alors la réfraction serait mal corrigée : ces deux conditions réunies obligent à n'observer que des étoiles circumpolaires.

Il est évident que dans le système de ces observations doubles on a

$$L = ZE = 90° - PZ = 90° - \frac{\delta + \delta' + r + r'}{2} - \frac{C(\delta + \delta')}{2}$$

en désignant par r et r' les deux valeurs de la réfraction dépendantes des hauteurs $90° - \delta$, $90° - \delta'$, et des états thermométriques et barométriques de l'atmosphère, et en supposant que C soit le coefficient dû à l'usure des centres (§ 134).

Hauteurs méridiennes simples. — On peut se contenter de l'observation d'un seul passage au méridien, faite alors sur le soleil ou sur une étoile dont la déclinaison doit être connue. On a, suivant les différentes positions relatives du zénith et des astres observés, une des relations suivantes, écrites dans l'hypothèse d'une correction préalable de la réfraction.

1° Passage supérieur d'un astre, $L = D + \delta$ suivant qu'on observe au N ou au S du zénith ;

2° Passage inférieur d'un astre, $L = 90° + Pe' - Ze' = 90° + 90° - D - \delta = 180 - D - \delta$;

3° Passage supérieur d'un astre ayant une déclinaison australe $L = \delta - D$ qui pouvait rentrer dans le premier cas en supposant que le signe + soit affecté aux déclinaisons boréales et le signe — aux déclinaisons australes.

Pour les répétitions on fait les observations aux cinq fils de la lunette et on peut regarder les cinq lectures, sans les faire réellement, comme représentant chacune la distance zénithale méridienne, ce qui n'est pas rigoureusement exact puisque les cinq observations ne sont pas rigoureusement dans le méridien et que les lignes de visées ne sont pas parallèles à ce plan ; mais comme dans ce mode d'observation les déviations sont extrêmement petites, et que les distances zénithales varient très-peu, on peut se contenter du résultat obtenu. On peut, pour obtenir une plus grande exactitude, ce qui nous semble peu nécessaire, assimiler les corrections à celles dites réduction au méridien et que nous verrons effectuer un peu plus loin, réductions pour lesquelles l'élément nécessaire au calcul de la correction est la variation de l'angle horaire comprise entre les moments des observations et celui du passage de l'astre au méridien, variations qui sont ici les distances équatoriales des fils divisées par le cosinus de la déclinaison.

Cette observation s'applique également à la déviation du plan méridien, si elle a été reconnue, et alors, à chacun des éléments de réduction dont nous venons de parler, il faut ajouter l'angle horaire répondant à cette déviation, angle que nous avons appris à connaître.

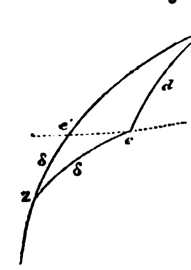
Les deux procédés de détermination de latitude, résultant de la connaissance du méridien, n'exigent pas que la pendule soit réglée.

Il est évident qu'il y a avantage à employer la répétition sous la forme de réitération en multipliant le nombre des étoiles employées, et en prenant, pour représenter la latitude, la moyenne des résultats obtenus. Si on se rappelle que dans le cas de l'observation d'une hauteur méridienne simple, la latitude est donnée par l'équation $L = D \pm \delta$ suivant que le passage a lieu au N ou au S du zénith, on verra qu'il y a avantage à observer des couples d'étoiles S et d'étoiles N, parce qu'alors

l'erreur due à l'usure des centres est annulée dans la moyenne, si on a soin de choisir ces étoiles à peu près symétriquement placées par rapport au zénith.

133. Méridien inconnu. — *Hauteur simple près du méridien.* Quand on ne connait pas le méridien, il est indispensable que la pendule soit réglée, et l'observation peut porter indifféremment sur le soleil ou sur une étoile. Supposons néanmoins qu'elle porte sur une étoile quelconque.

On observe en e proche du méridien dont la direction *approximative* est toujours facile à connaître, et on a une distance zénithale répondant à une heure de la pendule qu'on sait ramener au temps sidéral t. Si l'astre continuant son mouvement arrivait en e' dans le plan méridien, il aurait alors une distance zénithale δ' différente de δ et la latitude serait donnée par $L = D - \delta$. Il faut passer de δ qui est connu à δ' qui est inconnu; cherchons pour cela $\delta - \delta' = x$ toujours petit puisque l'observation est supposée faite près du méridien, et trouvons-le en fonction des quantités connues qui sont l'heure et les éléments de l'astre.



On a toujours l'équation fondamentale fournie par le triangle pôle, zénith, étoile

$$\cos.\ \delta = \sin.\ D \sin.\ L + \cos.\ D \cos.\ L \cos.\ P$$

qui, dans le cas du passage au méridien, se réduirait à

$$\cos.\ \delta' = \sin.\ D \sin.\ L + \cos.\ D \cos.\ L$$

qui retranchée de la première fournit

$$\cos.\ \delta' - \cos.\ \delta = \cos.\ D \cos.\ L.\ (1 - \cos.\ P) = 2.\ \cos.\ D \cos.\ L \sin.^2 \tfrac{1}{2} P$$

Dans cette équation, la seule inconnue est δ' qu'on pourrait en tirer; mais on préfère chercher la correction $\delta - \delta' = x$, ce qui, par l'élimination de δ', donne

$$\cos.\ (\delta - x) - \cos.\ \delta = 2 \cos.\ D \cos.\ L \sin.^2 \tfrac{1}{2} P$$

La correction x étant petite, on peut développer ses lignes trigonométriques en séries, et on aura en conservant les secondes puissances

$$\cos.\ \delta \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + x \sin.\delta - \cos.\ \delta = -\frac{x^2}{2} \cos.\ \delta + x \sin.\ \delta = 2 \cos.\ D \cos.\ L \sin.^2 \tfrac{1}{2} P$$

d'où

$$x = \frac{2 \cos.\ D \cos.\ L}{\sin.\ \delta} \sin.^2 \tfrac{1}{2} P + \frac{x^2}{2} \cot.\ \delta$$

La correction x sera toujours assez petite pour que dans le second terme en x^2 on puisse se contenter de mettre, pour elle, une valeur approchée, celle qui, résultant de la résolution de l'équation du premier degré, donnerait

$$x = \frac{2 \cos. D \cos. L}{\sin. \delta} \sin.^2 \tfrac{1}{2} P$$

On peut se contenter même de cette valeur approchée lorsque x est très-petit, ce qui aura lieu quand L sera grand, D grand et P petit, c'est-à-dire pour les observations faites soit près du pôle, soit sur une étoile circumpolaire, soit très-près du méridien. Supposons pour le moment qu'il en soit ainsi et qu'on se contente de la résolution de l'équation du premier degré ; il nous restera à indiquer comment on résout cette équation par approximation, car la latitude L inconnue de la question, est un des éléments qu'elle renferme.

Remarquons que la correction x qu'il faut faire subir à la distance zénithale observée, pour avoir δ' étant très-petite, il suffira de la calculer approximativement, et que par conséquent on pourra se contenter de mettre pour L, D, δ, P des valeurs seulement approchées. Si on a une première valeur, même un peu grossière de la latitude, on peut s'en servir, ou la prendre égale à $D - \delta$; la déclinaison D peut aussi être grossièrement prise dans la connaissance des temps pour le midi moyen du jour de l'observation, s'il s'agit du soleil, et exactement, de la même manière s'il s'agit d'une étoile; l'angle horaire P est fourni par $P = 15(t - Æ)$ si t désigne l'heure de la pendule supposée ici réglée sur le temps sidéral, ou une conséquence de cette heure si elle est moyenne, et si Æ est l'ascension droite connue approximativement comme la déclinaison.

La latitude du lieu est donc fournie par l'équation

$$L = D - \delta' = D - \delta + \frac{2 \cos. (D - \delta) \cos. D}{\sin. \delta} \frac{\sin.^2 \frac{1}{2} P}{\sin. 1''}$$

après réduction en secondes d'angle.

Les deux premiers termes D et δ doivent être calculés exactement, ce qui est inutile pour le troisième. Le second δ sera donné par l'observation corrigée de la réfraction dans tous les cas, et des parallaxe et demi-diamètre apparent s'il s'agit du soleil; dans ce dernier cas la déclinaison D ne devra plus être prise au midi moyen de Paris, mais à une heure moyenne de

Paris égale à celle du lieu $\pm \frac{M}{15}$ si la pendule donne le temps moyen et si M est la longitude approchée. Dans le cas plus généralement favorable où la pendule serait réglée sur le temps sidéral, l'expression invoquée ci-dessus donnerait l'heure sidérale de Paris, et sa transformation en temps moyen nécessaire pour l'emploi de la connaissance du temps se ferait au moyen de la table du temps sidéral à midi moyen.

Correction relative à la marche de la pendule. — Nous avons dit que l'angle horaire, élément du calcul, était donné par $P = 15 (t - Æ)$ s'il s'agit d'une étoile et si la pendule est sidérale, ce qui est le cas le plus avantageux. Cela a supposé implicitement que la pendule était parfaitement réglée de manière à marquer tous les jours $0^h, 0^m, 0^s$ lorsque l'équinoxe du printemps passe au méridien. Nous avons indiqué d'autre part, au tableau de l'état de la pendule, comment on pouvait passer de ses indications à celle du temps réellement existant; cette transformation peut se faire algébriquement dans la formule même.

De l'inspection du tableau de l'état de la pendule, on conclut facilement comme nous l'avons fait, l'avance $+ \alpha$ de celle-ci au moment de l'observation, c'est-à-dire au moment où elle marque t; l'angle P sera donc parcouru par l'étoile en $t - (Æ + \alpha)$ heures de la pendule, et si celles-ci étaient égales à des heures sidérales ou si l'avance diurne était nulle, cet angle serait mesuré par $P = 15 (t - Æ - \alpha)$. Mais ces heures sont généralement différentes des heures sidérales, et si on désigne par ρ le retard de la pendule en 24 heures sidérales, le rapport des unités sidérales à celles de la pendule est égal à $\frac{24 - \rho}{24}$, en sorte que si P' est la vraie valeur de l'angle horaire, on aura

$$P' = P \frac{24}{24 - \rho} = P \frac{1}{1 - \frac{\rho}{24}} = P \left(1 + \frac{\rho}{24}\right) = P (1 + \rho')$$

en désignant par ρ' le rapport $\frac{\rho}{24^h}$ ou $\frac{\rho}{86400}$ si ρ est exprimé en secondes de temps.

Substituons dans la formule précédemment trouvée pour la correction de la latitude x; on aura

$$x = \frac{2 \cos. D \cos. (D - \delta)}{\sin. \delta} \frac{\sin.^2 \frac{1}{2} P'}{\sin. 1''} = \frac{2 \cos. D \cos. (D - \delta)}{\sin. \delta} \frac{P'^2}{4. \sin. 1''}$$

$$x = \frac{1}{2}\,\frac{P^2(1+2\rho')}{\sin.1''}\;\frac{\cos.D\cos.L}{\sin.\delta}$$

formule dans laquelle P désigne la valeur erronée de l'angle horaire fournie par $P = 15\,(t - Æ - a)$. Cette formule exige que P′ et par suite P soient exprimés en rapports par suite de l'assimilation de $\frac{1}{2}$ P′ à son sinus; Si P est exprimé en secondes d'angles, ce qui se présente naturellement par suite de la connaissance de t, Æ et a en secondes de temps, il faut le multiplier par sin. 1″, ce qui donne finalement

$$L = D - \delta + \frac{1}{2}P^2\sin.1''\,(1+2\rho')\,\frac{\cos.D\cos.L}{\sin.\delta}$$

Supposons pour donner un exemple du calcul de P et de celui de ρ' que le tableau de l'état de la pendule fournisse

1er jour à 17^h sidérales.	$+\ 2^s,00$	variation diurne $= 1^s.\ \frac{24^h}{23^h\ 30^m}$
2e jour à $16^h\ 30^m$.	$+\ 3^s,00$	

et que l'étoile observée ait une ascension droite $= 150°$ ou 10 heures sidérales.

En $23^h\ 30^m$ la pendule avance de 1^s, elle avancera, pour $10^h + 24^h - 17^h = 17^h$, qui sépare la première date du moment de l'observation, de $17.\ \frac{24}{23,50} = 0^s,72$; en sorte que son avance absolue sera $2^s,72$. On aura donc

$$P = 15\,(t - Æ - a) = 15\,(t - 10^h - 2^s.72) = 15\,(t - 9^h\ 59^m\ 57^s,28)$$

Quant à $\rho' = \frac{\rho}{86400}$, il sera donné par $-\frac{1^s,24}{23^h30^m}\,\frac{1}{86400^s} = -\frac{1^s,02}{86400}$

Répétitions. — Réduction au méridien. — Les observations de latitude, près du méridien, permettent facilement les répétitions. On observera toutes les heures de la pendule t, t' t''..... relatives aux distances zénithales δ, δ', δ'' et on aura en désignant par x, x', x''..... les corrections que nous venons d'apprendre à calculer,

$$L = D - \delta + x, \quad L = D - \delta' + x', \quad L = D - \delta'' + x''.....$$

et si n est le nombre des répétitions

$$L = D - \frac{\delta + \delta' + \delta'' + ...}{n} + \frac{x + x' + x'' + ...}{n}$$

La lecture finale faite sur le limbe vertical du cercle ou du théodolite suffira donc pour donner le second terme, et d'autre part, nous savons que dans les termes correctifs, il suffit de mettre une valeur approchée de la distance zénithale, valeur qu'on pourra prendre égale à la moyenne $\frac{\delta+\delta'+\delta''+\ldots}{n}$. L'ensemble des deux premiers termes sera calculé une seule fois avec toute l'exactitude possible; quant aux corrections, de la forme

$$x = \frac{1}{2} P^2 \sin. 1'' (1+2\rho') \frac{\cos. D \cos. \left(D - \frac{\delta+\delta'+\ldots}{n}\right)}{\sin. \frac{\delta+\delta'+\ldots}{n}}$$

elles ont un facteur commun composé des deux derniers de la formule, et un facteur variable $\frac{1}{2} P^2 \sin. 1''$ qu'on appelle *réduction au méridien*, qui devra être calculé par chacune des valeurs de P obtenues par l'expression $P = 15 (t - \text{\AE} + x)$ comme nous l'avons indiqué précédemment.

La réduction au méridien que nous avons trouvée égale à $\frac{1}{2} P^2 \sin. 1''$ s'écrit souvent sous la forme $\frac{2 \sin.^2 \frac{1}{2} P}{\sin. 1''}$ et l'expression générale de la latitude est, en désignant par δ la distance zénithale moyenne, et par L′ une valeur approchée de la latitude,

$$L = D - \delta + \frac{\cos. D \cos. L'}{\sin. \delta} \frac{1+2\rho'}{n} \Sigma \frac{2 \sin.^2 \frac{1}{2} P}{\sin. 1''}$$

Le calcul doit se faire séparément pour chaque valeur de P, soit directement, soit par l'emploi des tables insérées dans la *Géodésie* de Puissant, et dans l'*Astronomie pratique* de Francœur. La somme de toutes ces réductions doit être ensuite multipliée par le facteur commun $(1+2\rho') \frac{\cos. D. \cos. L}{\sin. \delta}$.

Nous avons réduit au premier degré l'équation primitivement trouvée

$$x = \frac{2 \cos. D \cos. L}{\sin. \delta} \sin.^2 \frac{1}{2} P + \frac{x^2}{2} \cot. \delta$$

en négligeant la seconde puissance de x. Si on désire une approximation plus grande, on peut substituer la première valeur trouvée, dans le terme négligé, ce qui donne pour formule plus complète, en réduisant le terme correctif en secondes,

$$L = D - \delta + \frac{1}{2} P^2 \sin. 1'' (1 + 2\rho') \frac{\cos. D \cos. L}{\sin. \delta}$$

$$+ \frac{P^2}{4} \sin. 1'' (1 + 2\rho')^2 \times \left(\frac{\cos. D \cos. L}{\sin. \delta}\right)^2$$

formule dans laquelle on peut supprimer le facteur $(1 + 2\rho')^2$ par suite de la petitesse de la quantité qu'il multiplie.

Nous venons d'indiquer comment on répète les observations sur une même étoile, mais il ne faudrait pas croire que les résultats obtenus ainsi soient suffisamment exacts. Il faut multiplier encore ces observations pendant un grand nombre de nuits pour arriver à une moyenne qui soit assez probable. Si on compare les résultats provenant d'opérations isolées, quoique répétées comme nous l'avons dit, on trouve en effet des différences assez sensibles qui vont quelquefois jusqu'à 10″, et la multiplicité seule des résultats a chance d'atténuer les erreurs qui peuvent être de signes contraires. Quant à celles qui sont constantes ou de même sens, cette multiplicité n'ayant pas d'action sur elles, il y a lieu de les faire disparaître autant qu'on le peut du moins. Il en est ainsi de l'erreur personnelle de l'observateur appliquée soit à la visée, soit à la lecture de l'heure ou même de l'angle. L'erreur de calcul provenant de la suppression d'un terme dont le signe ne peut pas changer, doit être évitée, car elle agirait toujours dans le même sens ; ainsi, le terme correctif que nous venons d'introduire dans la *réduction au méridien*, ne donne habituellement que quelques dizaines de secondes, et certes le résultat final n'est pas exact à cette approximation près, mais sa suppression, quelque petite qu'elle soit, augmenterait encore d'autant l'incertitude, et comme il y a possibilité de faire disparaître cette partie de l'erreur, il y a lieu de le faire.

L'usure des centres, ou peut-être la flexion de la lunette ou du fil horizontal de celle-ci, produit aussi une erreur dont le sens ne change pas, et on doit en tenir compte.

Usure des centres. — Nous avons vu au § 86 que tout cercle gradué employé à la mesure des distances zénithales, par répétition, donne celles-ci trop petites d'une quantité proportionnelle à la distance zénithale ; le coefficient par lequel il faut multiplier celle-ci pour avoir cette erreur, se trouve pour chaque instrument particulier, par une observation de latitude faite comme nous venons de l'indiquer.

En un lieu de latitude L connue, on cherche cette latitude par des observations faites près du méridien, et on obtient une valeur, λ, différente de L et telle que $L-\lambda=e$; cette erreur e ne peut provenir que de l'erreur commise sur δ puisque x très-petit est peu influencé par la distance zénithale. En opérant ainsi sur des étoiles différentes, on peut trouver diverses valeurs du coefficient C de la formule $e=C.\delta$, valeurs très-peu différentes dont on prend la moyenne.

On peut encore dans le même but opérer en un lieu de latitude inconnue et observer, près du méridien, les passages de deux étoiles de déclinaisons très-différentes, ayant par conséquent des distances zénithales très-dissemblables. La différence des résultats obtenus $L-L'=C(\delta-\delta')$ fera encore connaître le coefficient C.

Lorsque ce coefficient est connu pour un instrument particulier, il faut corriger toutes les distances zénithales observées avec ce même instrument, de l'erreur $C\delta$, en même temps qu'on fait les corrections de réfraction, et, s'il y a lieu, de parallaxe et de demi-diamètre apparent.

On peut du reste éviter généralement cette cause d'erreur dans la détermination de la latitude, comme nous l'avons indiqué relativement aux opérations de passage au méridien, d'une étoile de déclinaison connue, en opérant successivement sur des étoiles situées au N[d] et au S[d] du zénith et ayant à peu près mêmes distances zénithales deux à deux. On a dans ce cas

$$L=D-\delta+x, \quad L=D'+\delta'-x'$$

et la moyenne $L=\frac{D+D'}{2}+\frac{\delta'-\delta}{2}+\frac{x-x'}{2}$ ne sera en erreur que de $\frac{C(\delta'-\delta)}{2}$, puisque les termes correctifs sont très-peu influencés par les valeurs des distances zénithales. Si celles-ci sont presque égales, comme nous l'avons supposé, l'erreur finale qui est égale à leur différence multipliée par un très-petit coefficient, peut être considérée comme nulle.

On évite encore cette erreur en observant l'angle compris entre l'astre et sa réflexion sur un bain de mercure, d'huile, d'encre ou de goudron, car alors il n'y a pas de retournement général du limbe sur lui-même; il faut pourtant avoir soin, comme dans tous les cas d'observations précises du reste, de faire les lectures sur les verniers opposés, car l'usure des

centres a donné naissance à une excentricité de l'axe de rotation.

Cette manière d'observer a encore l'avantage d'éviter les erreurs du niveau à bulle d'air dont nous parlerons plus loin; mais l'opération est rendue assez difficile, par le peu de clarté de la réflexion et par les oscillations du liquide, sensibles avec une lunette d'un fort grossissement et pouvant provenir de la plus petite cause étrangère. Enfin, les répétitions ne peuvent pas être multipliées par suite de la petitesse forcée de la surface réfléchissante, et de la variabilité de direction du rayon visuel mené à l'astre qui participe au mouvement diurne ; l'étoile polaire, dont la position varie très-peu, fait pourtant exception à ce que nous venons de dire.

134. Remarques sur les observations méridiennes approchées. — Emploi de l'étoile polaire. — La méthode que nous venons d'exposer revient à celle des observations de passages dans le plan méridien, en supposant à celui-ci une déviation analogue à celle dont nous avons étudié l'influence au § 125. La formule à employer, qui n'est en effet que transformée au résultat final, étant

$$x = \frac{2 \cos. D \cos. L}{\sin. \delta} \sin.^2 \frac{1}{2} P + \frac{x^2}{2} \cot. \delta$$

sera d'autant plus avantageuse qu'elle servira à calculer une correction plus petite, ce qui aura lieu indépendamment de l'étoile considérée quand l'angle horaire P sera lui-même très-petit. Il sera donc bon de faire l'observation aussi près que possible du méridien. On fera bien alors d'exécuter les opérations successives produisant les répétitions dans des verticaux très-rapprochés entre eux et très-rapprochés aussi d'une direction méridienne approximative obtenue par la moyenne de deux élongations d'une même étoile.

Chaque valeur de la latitude supposée conclue d'une observation isolée proviendrait alors de la résolution de l'équation ci-dessus transcrite ; mais chacune de ces observations répondrait à une déviation méridienne α, élément de la relation

$$\sin. P = \sin. \alpha \frac{\sin. \delta}{\cos. D}$$

que nous avons trouvée au § 125 : la combinaison de ces deux formules donne

$$x = \cos. L. \sin. \alpha \text{ tang. } \frac{1}{2} P + \frac{x^2}{2} \cot. \delta$$

Il est bon, avons-nous dit, que le terme correctif x soit petit pour que l'erreur provenant d'une fausse appréciation de la latitude approchée, supposée connue, et du règlement de la pendule qui doit fournir l'angle horaire, soit elle-même petite, indépendamment de la déviation involontaire α, qu'il est également avantageux de rendre aussi petite que possible. Pour satisfaire à ces conditions, on ne peut agir que sur P ; il est donc avantageux d'opérer avec de petits angles horaires, ce qui implique en partie la nécessité d'observations faites proche du méridien, et en plus le choix de certaines étoiles pour lesquelles la même déviation α donne les angles horaires les plus petits.

Il est presque évident à priori que les étoiles qui ont de grandes déclinaisons, comme la polaire, par exemple, ne sont pas d'un emploi favorable, mais on peut s'en convaincre algébriquement par l'inspection de l'équation

$$\sin. P = \sin. \alpha \frac{\sin. \delta}{\cos. D}$$

qu'on peut écrire approximativement

$$\sin. P = \sin. \alpha \frac{\sin. \pm (D - L)}{\cos. D}$$

suivant que l'étoile passe au N^d ou au S^d du zénith. Dans l'un comme dans l'autre des deux cas, la petitesse de l'angle horaire exige d'une part que la déclinaison soit petite, et de l'autre qu'elle soit près d'être égale à la latitude du lieu.

Les observations de l'étoile polaire, pourtant souvent employées, sont donc désavantageuses, et les meilleures sont celles qui se rapprochent du zénith. Nous verrons du reste plus tard que, pour d'autres causes encore, les observations zénithales sont préférables à toutes autres, sous le point de vue de l'exactitude, si ce n'est sous celui de la commodité des opérations.

Si on n'observe pas au zénith, ce qui n'est utile du reste que pour la recherche de la latitude, il est bon de n'employer que des étoiles qui ne s'en écartent pas trop lors de leur passage au méridien.

Observation de l'étoile polaire. — Nous avons dit qu'on employait souvent l'étoile polaire dont la déclinaison atteint pres-

que le maximum possible. C'est un tort à notre sens; tort qui n'est compensé que par l'avantage de ne pas exiger une connaissance approchée préalable de la latitude, avantage qui peut devenir déterminant dans certains cas.

L'étoile polaire a une distance polaire apparente d'environ $1°\frac{1}{2}$, dont la petitesse donne la facilité d'introduire dans les calculs des simplifications avantageuses, en vue du seul but qu'on doit avoir en vue d'atteindre, l'élimination de la latitude.

Désignons par d et h les compléments de D et δ, la formule générale relative à une observation faite près du méridien, pourra s'écrire

$$x = \frac{2 \sin. d \cos. L}{\cos. h} \sin.^2 \tfrac{1}{2} P + \frac{x^2}{2} \text{tang. } h$$

Non-seulement x est petit, mais d l'est aussi; nous pourrons donc employer les développements en série en nous bornant aux secondes puissances de ces quantités. Mais en faisant ces substitutions, et pour avoir plus d'exactitude dans l'appréciation du terme principal, mettons au lieu de la latitude L imparfaitement connue par hypothèse et que $D - \delta$ n'exprimerait peut-être pas assez exactement (ce qui ne pourrait provenir que d'une observation faite trop loin du méridien), la valeur plus exacte $D - \delta + x = h - d + x$. La formule s'écrira alors

$$x = 2 \sin. d \cos. \Big(h - (d - x)\Big) \frac{\sin.^2 \frac{1}{2} P}{\cos. h} + \frac{x^2}{2} \text{tang. } h$$

$$= \frac{x^2}{2} \text{tang. } h + 2d \frac{\sin.^2 \frac{1}{2} P}{\cos. h} \left\{ \cos. h \left(1 - \frac{(d-x)^2}{2}\right) + \sin. h \, (d - x) \right\}$$

la parenthèse peut s'écrire

$$\cos. h - \frac{d^2}{2} \cos. h - \frac{x^2}{2} \cos. h + dx \cos. h + d \sin. h - x \sin. h$$

expression dont on ne doit conserver que les premières puissances par suite de l'existence du facteur extérieur d, ce qui la réduit à $\cos. h + d \sin. h - x \sin. h$. L'expression générale de x est donc

$$x = \frac{x^2}{2} \text{tang. } h + 2d \sin.^2 \tfrac{1}{2} P + 2d^2 \text{tang. } h. \sin.^2 \tfrac{1}{2} P - 2dx \text{ tang. } h. \sin.^2 \tfrac{1}{2} P$$

On aura une première valeur approchée de x en supprimant tous les termes de seconde puissance, ce qui donnera

$$x' = 2d \sin.^2 \tfrac{1}{2} P$$

En substituant cette valeur dans les termes en x^2 et en dx, on aura successivement

$$x = 2d \sin.^2 \tfrac{1}{2} P + 2d^2 \text{tang. } h \sin.^4 \tfrac{1}{2} P + 2d^2 \text{tang. } h \sin.^2 \tfrac{1}{2} P$$
$$- 4d^2 \text{tang. } h \sin.^4 \tfrac{1}{2} P$$
$$= 2d \sin.^2 \tfrac{1}{2} P - 2d^2 \text{tang. } h. \sin.^4 \tfrac{1}{2} P + 2d^2 \text{tang. } h \sin.^2 \tfrac{1}{2} P$$
$$= 2d \sin.^2 \tfrac{1}{2} P + 2d^2 \text{tang. } h. \sin.^2 \tfrac{1}{2} P \cos.^2 \tfrac{1}{2} P$$
$$= 2d \sin.^2 \tfrac{1}{2} P + \tfrac{1}{2} d^2 \text{tang. } h. \sin.^2 P$$

Les développements en séries ont exigé que d et d^2 fussent exprimés en rapport; s'ils sont donnés par les nombres de secondes qu'ils renferment, ce qui a effectivement lieu, il faut les multiplier par sin. $1''$ et sin.^{2} $1''$, et la formule donnera un second membre en rapport; pour l'avoir en secondes il fraudra diviser par sin. $1''$, ce qui produira finalement, après substitution dans l'expression de la latitude

$$L = h - d + x = h - d + 2d \sin.^2 \tfrac{1}{2} P + \tfrac{1}{2} d^2 \text{tang. } h. \sin.^2 P. \sin. 1''$$
$$L = h - d \cos. P + \tfrac{1}{2} d^2 \text{tang. } h \sin.^2 P \sin. 1''.$$

Telle est la formule de Litrow applicable à l'observation de la polaire seulement. Remarquons pourtant que nous n'avons pas tenu compte des troisièmes puissances qui figurent dans cette formule complète, et qui ont du reste peu d'importance.

Il est facile de remarquer, ce que nous avons prouvé être général, qu'il est plus avantageux d'observer l'étoile polaire près du méridien, car alors une erreur commise dans l'appréciation de l'angle horaire P, par suite d'une erreur de la pendule, aura moins d'influence sur cos. P. Si l'observation était faite près des élongations, l'angle horaire P serait considérable quoique répondant à une déviation méridienne petite, et les erreurs commises sur lui en donneraient d'également fortes sur le cosinus.

Répétitions. — Réduction à l'époque moyenne.—En répétant successivement les observations, on aurait une série d'équations analogues qui, pour être résolues, exigerait la connaissance de tous les angles horaires et de toutes les hauteurs. On préfère, comme pour la réduction au méridien, n'avoir qu'une équation à résoudre, et surtout éviter les lectures partielles des hauteurs pour ne faire que la lecture finale.

Les hauteurs et les angles horaires ne sont pas proportionnels les uns aux autres, en sorte qu'il n'est pas permis de prendre

les moyennes de ces quantités, h et P, qui ne se correspondent pas, sans modifier l'équation qui les lie.

Conservant la hauteur moyenne h, des hauteurs vraies h', h'', h'''....., nous allons remplacer les angles horaires par l'angle horaire moyen P et par des variations de cet angle. Posons

$$P' = P + p', \quad P'' = P + p''....., \quad p' + p'' + ... = 0$$

Nous savons que, par suite de la régularité parfaite du mouvement diurne, et de la régularité approchée du mouvement de la pendule, l'angle horaire moyen répond à la moyenne des heures véritables sidérales ou moyennes, et à la moyenne des temps de la pendule.

En désignant par n le nombre des observations, on aura $h = \frac{h' + h'' + ...}{n}$, puisque h est la hauteur moyenne, et en ajoutant toutes les équations répondant aux n observations, on pourra écrire

$$L = h - \frac{d}{n} \left\{ \cos.(P + p') + \cos.(P + p'') + ... \right\}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{d^2 \operatorname{tang}. h \sin. 1''}{n} \left\{ \sin.^2 (P + p') + \sin.^2 (P + p'') + ... \right\}.$$

Nous avons substitué dans le dernier terme, h à h', h''....., et nous n'avons pas agi de même pour les angles horaires; cela tient à ce qu'il s'agit ici seulement de l'étoile polaire pour laquelle les variations des hauteurs sont très-faibles par rapport à celles des angles horaires.

Cherchons successivement les deux parenthèses, en vertu de l'hypothèse d'observations très-rapprochées, qui, ne permettant que de petites variations p', p''....., nous autorise à n'employer que les secondes puissances des développements en séries des lignes trigonométriques de ces angles. Une terme générique de la première parenthèse peut s'écrire

$$\cos.(P + p') = \cos. P \left(1 - \frac{p'^2}{2}\right) - p' \sin. P$$

La somme de tous les termes de même forme donnera

$$n \cos. P - \cos. P \frac{p'^2 + p''^2 + ...}{n} = n \cos. P - \cos. P\, \Sigma \frac{p^2}{2}$$

puisque $p' + p'' + ... = 0$.

Un terme générique de la seconde parenthèse fournit

$$\sin.^2 (P+p') = \left\{ \sin. P \left(1-\frac{p'^2}{2}\right) + p' \cos. P \right\}^2$$

$$= \sin.^2 P - p'^2 \sin.^2 P + p'^2 \cos.^2 P + 2 p' \sin. P \cos. P$$

$$= \sin.^2 P + p'^2 \cos. 2 P + p' \sin. 2 P$$

en négligeant les puissances supérieures à la seconde.

La somme de tous les termes semblables donne

$$n \sin.^2 P + \cos. 2P \, \Sigma p^2$$

En reportant les deux résultats, dans l'expression générale de la latitude, on aura

$$L = h - d \left\{ \cos. P - \cos. P \, \Sigma \frac{p^2}{2n} \right\}$$

$$+ \tfrac{1}{2} d^2 \text{ tang. } h . \sin. 1'' \left\{ \sin.^2 P + \cos. 2 P \, \Sigma \frac{p^2}{n} \right\}$$

$$= h - d \cos. P + \tfrac{1}{2} d^2 \text{ tang. } h \sin. 1'' \sin.^2 P$$

$$+ \tfrac{1}{2} \left\{ d \cos. P + d^2 \text{ tang. } h \cos. 2 P \sin. 1'' \right\} \Sigma \frac{p^2}{n} \sin.^2 1''$$

Nous avons introduit dans le dernier terme, le facteur $\sin.^2 1''$, parce que les développements en séries avaient supposé p exprimé en rapport; si on le remplace par le nombre de secondes qu'il renferme, il y a lieu en effet de multiplier celui-ci par $\sin. 1''$.

L'ensemble des premiers termes est le résultat d'un calcul unique de la formule primitive dans laquelle on met les moyennes h et P qui ne se correspondent réellement pas; la correction nécessitée par cette cause d'erreur provient du dernier terme qui est composé de deux facteurs, l'un constant calculé une fois pour toutes, et l'autre variable $\Sigma \frac{p^2}{n}$ formé de la somme de termes semblables.

Il nous resterait à dire comment on arrive à connaître l'angle horaire moyen P et les variations comptées par rapport à lui, p', p''..... des angles horaires vrais P′ P″..... Sans répéter ce que nous avons dit à cet égard au § 133, nous rappellerons seulement que si t désigne la moyenne des heures de la pendule, α son avance au moment de l'observation, ρ son retard diurne, et ρ' la quantité $1 + \frac{\rho}{86400}$, on aura $P = 15 (t - Æ - \alpha) (1 + \rho')$. Quant aux variations p', p''..... elles seront, en temps de la pendule

$t-t'$, $t-t''$....., et par suite $(t-t')(1+\rho')$, $(t-t'')(1+\rho')$..... en temps sidéral, si ρ et ρ' se rapportent à cette manière de compter le temps. Enfin, leur expression en secondes d'angles sera de la forme $15\,(t-t')(1+\rho')$. L'équation finale sera donc, en continuant à désigner par P la valeur horaire écrite plus haut et par p le terme générique des variations obtenues par la simple soustraction $15\,(t-t')$,

$$L = h - d \cos. P + \tfrac{1}{2} d^2 \operatorname{tang.} h \sin.^2 P. \sin. 1''$$

$$+ \tfrac{1}{2} \left\{ d \cos. P + d^2 \operatorname{tang.} h \cos. 2P. \sin. 1'' \right\} \sin.^2 1'' (1+2\rho') \Sigma \frac{p^2}{n}$$

$$L = 90 - \delta - d \cos. P + \tfrac{1}{2} d^2 \cot. \delta \sin.^2 P. \sin. 1''$$

$$+ (1+2\rho') \left\{ d \cos. P \sin. 1'' + d^2 \cot. \delta \cos. 2P \sin.^2 1'' \right\} \Sigma \frac{2 \sin.^2 \frac{1}{2} p}{n \sin. 1''}$$

On peut employer avec avantage pour la résolution de cette équation des tables contenues dans la Géodésie de Puissant ou dans l'Astronomie pratique de Francœur.

135. Détermination simultanée de l'heure et de la latitude. — Le procédé qui repose sur l'observation d'un astre près du méridien exige une connaissance approchée de la latitude, et il ne peut être employé qu'avec le secours d'une pendule réglée sur l'un ou l'autre des deux modes de compter le temps. L'observation de l'étoile polaire demande seulement que cette deuxième condition soit satisfaite.

On peut se dispenser également de cette seconde condition pourvu qu'on ait seulement une pendule marquant, soit les heures sidérales, soit les heures moyennes, sans faire connaître le passage au méridien de l'origine du temps employé. Le procédé général suivant servira simultanément à trouver la latitude et à régler la pendule.

Le triangle formé par le pôle, le zénith et une étoile quelconque, donne toujours en désignant par δ la distance zénithale, par L,D,P, la latitude, la déclinaison et l'angle horaire relatif au moment de l'observation,

$$\cos. \delta = \sin. D \sin. L + \cos. D \cos. L \cos. P$$

Une seconde observation de la même étoile donnera

$$\cos. \delta' = \sin. D \sin. L + \cos. D \cos. L \cos. P'$$

La pendule indiquera par la différence de ses heures ramenées s'il y a lieu à représenter des heures sidérales,

$$\frac{P'-P}{15}=a$$

On aura ainsi trois équations renfermant trois inconnues P.P'. et L qu'il sera possible de déterminer.

L'observation peut se faire également sur le soleil, et la pendule peut aussi bien donner les heures sidérales ou les heures moyennes ; suivant les cas, la transformation de l'indication a^h en angle horaire $P-P'$ se fera par l'un des moyens indiqués au § 124.

Si l'observation a été faite sur une étoile, la déclinaison D pourra être regardée comme constante et donnée immédiatement par les tables ; si elle a porté sur le soleil, elle devra être calculée pour chaque opération en rapportant l'heure du lieu à celle du méridien de Paris. On voit alors qu'il devient nécessaire de connaître la longitude d'une manière approchée, et qu'il en est de même de l'heure du lieu, qui pourtant n'est pas connue, puisque la pendule n'est pas réglée. Observons cependant, relativement à ce dernier point, qu'il sera suffisant d'apprécier approximativement cette heure. Il est cependant préférable, on le comprend facilement, d'opérer sur une étoile. Supposons qu'il en soit ainsi, et indiquons les détails du calcul à effectuer.

La première observation se fera lorsque l'étoile sera près du méridien ; son angle horaire P sera en conséquence très-petit, et la première équation pourra se mettre sous la forme

$$\cos.\ \delta=\sin.\ D\ \sin.\ L+\cos.\ D\ \cos.\ L=\cos.\ (L-D)$$

qui fournira une première valeur approchée de L.

La seconde observation faite lorsque l'étoile sera loin du méridien correspondra à un angle horaire P' proche de 90°, la détermination de cet angle faite par l'équation

$$\cos.\ \delta'=\sin.\ D\ \sin.\ L+\cos.\ D\ \cos.\ L\ \cos.\ P'$$

dans laquelle on substituera la valeur approchée de L trouvée par l'emploi de la première équation, conduira à un résultat d'autant plus approché de la vérité que les éléments dont il dépend seront mieux précisés, c'est-à-dire que la première observation aura été faite près du méridien et la seconde loin de ce méridien. En effet, la première circonstance conduit à une première valeur $D\pm\delta$ de la latitude d'autant plus exacte que la

condition énoncée est près d'être satisfaite; en second lieu, la distance zénithale δ' varie davantage lorsque l'observation est éloignée du méridien, et par suite la connaissance d'une de ses valeurs précise mieux le moment de l'observation, ou l'angle horaire P'.

La substitution de

$$\frac{P'-P}{15} = a$$

donnera P qui, substitué dans la première, mise sous la forme

$$\cos.\ \delta = \sin.\ D \sin.\ L + \cos.\ D \cos.\ L \left(1 - \frac{P^2}{2} \cdots\right)$$

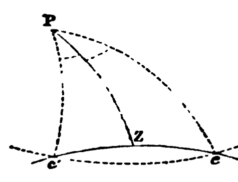
permettra de déterminer L d'une manière plus exacte, en employant seulement la seconde puissance de P très-petit par hypothèse.

Si l'on désire plus d'exactitude, cette nouvelle valeur pourra servir à en déterminer une autre, et ainsi de suite.

Le procédé que nous venons d'indiquer est rarement employé ; il ne se prêterait pas facilement aux répétitions, et il n'a pas d'une manière complète l'avantage indiqué résultant de l'inutilité d'un règlement préalable de la pendule; d'abord il faut absolument que celle-ci soit employée pour la recherche de la longitude, et il est par conséquent aussi utile de la régler avant qu'après la détermination de la latitude. Il est vrai que le procédé peut permettre les deux opérations simultanées, mais plutôt en apparence qu'en réalité; il suppose en effet que la pendule marque des heures dont l'origine ne coïncide pas avec le passage de l'équinoxe du printemps ou du soleil moyen au méridien, mais dont la valeur est connue, et pour avoir cette valeur toujours un peu variable, il est nécessaire de faire les opérations ordinaires du règlement de la pendule.

136. Observations dans le premier vertical. — Ce plan vertical est celui qui est perpendiculaire au méridien.

Soient P et Z le pôle et le zénith, PZ et Zee' le méridien et le premier vertical. On dirige le plan d'un limbe dans celui-ci, et on observe les deux passages e et e' d'une même étoile dont la déclinaison est plus faible que la latitude du lieu. Le triangle rectangle PZe donne



$$\text{tang. D} = \text{cos. P tang. L} \quad \text{ou} \quad \text{tang. L} = \frac{\text{tang. D}}{\text{cos. P}}$$

Si on a choisi une étoile de déclinaison connue, il suffit donc, pour avoir la latitude, de connaître l'angle horaire P, ce à quoi on arrive par l'observation du second passage e' répondant au même angle horaire inverse, de sorte que la différence des temps t et t' des deux observations, fournit, en supposant l'intervalle $t' - t$ exprimé en temps sidéral,

$$2 \text{P} = 15 (t' - t)$$

On voit que la seule chose à recueillir, dans cette méthode, est le temps ; c'est-à-dire que le résultat repose entièrement sur la marche de la pendule ; le règlement de celle-ci peut être défectueux quant à l'origine des temps, sans que le résultat soit entaché d'erreur, c'est-à-dire que celui-ci n'est pas influencé par l'avance absolue, mais il est indispensable que les unités qu'elle indique puissent être exactement converties en heures sidérales au moyen de l'avance diurne.

Pour se mettre dans les circonstances les plus favorables il serait bon que le règlement journalier de la pendule fût fait près des instants qui répondent aux deux observations, et que l'intervalle qui les sépare fût petit, afin d'éviter les irrégularités accidentelles. Cette condition conduirait à choisir les observations rapprochées du zénith que nous avons déjà trouvées être avantageuses pour les déterminations de la latitude, si déjà la formule $\text{tang. L} = \frac{\text{tang. D}}{\text{cos. P}}$ n'avait conduit au même résultat ; en effet, l'angle horaire étant petit, son cosinus variera peu pour les mêmes variations ou erreurs commises dans l'appréciation de cet angle, par suite des erreurs résultant de l'emploi de la pendule. Enfin, il sera encore utile d'observer proche du zénith pour éviter l'influence d'une désorientation du premier vertical, encore plus difficile à déterminer que le plan méridien dont il n'est qu'une conséquence, car on a généralement, en désignant l'azimut par z

$$\text{sin. P} = \frac{\text{sin. } \delta}{\text{cos. D}} \text{ sin. } z$$

formule qui dit que les variations de P, qu'il faut éviter, seront d'autant plus petites, pour les mêmes variations de z, que δ sera petit.

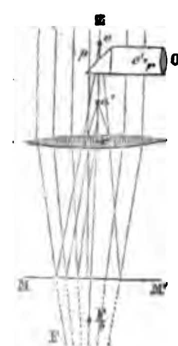
Cette méthode des passages dans le premier vertical évite l'emploi des distances zénithales nécessaires pour les observations dans le méridien ou proche de celui-ci, distances zénithales toujours trop influencées par la réfraction, et par les erreurs de l'instrument, mais elle leur substitue l'observation des temps qui doivent être multipliés par 15 pour exprimer les angles nécessaires à la résolution de la formule. Il est douteux que la substitution soit avantageuse, surtout si la marche de la pendule est contrôlée par l'observation de hauteurs simples ou correspondantes, hauteurs affectées des erreurs qu'on a en vue d'éviter, et qui se transmettent ainsi indirectement. Pour que les distances zénithales fussent complétement sans influence sur les résultats, il faudrait que le règlement fût fait journellement par l'observation de passages d'étoiles au méridien parfaitement déterminé, passages ayant lieu à des heures sidérales égales aux ascensions droites.

137. Observations zénithales. — Toute étoile qui passe au zénith d'un lieu a une déclinaison apparente égale à la latitude de ce lieu ; il suffit donc de constater ce passage pour avoir cette latitude. Mais il faut pour cela connaître la verticale ou plutôt il faut avoir l'axe optique d'une lunette placé rigoureusement dans cette direction.

Les instruments dont nous avons supposé l'emploi, jusqu'à présent, sont tous ceux qui ont un limbe vertical gradué, comme le cercle, le théodolite à niveau mobile qui se confond pour nous avec le cercle, jusqu'à présent du moins, puisque nous n'avons utilisé que des distances zénithales, et le cercle méridien portatif de M. Laugier.

Mais tous ces instruments ne permettant pas de déterminer la verticalité de l'axe optique de la lunette, ne peuvent pas servir pour les observations zénithales, et il y a lieu d'en employer d'autres qui malheureusement n'auront qu'un but spécial et qui ne pourront pas être utilisés pour toutes les observations astronomiques.

Réflex-zénith-tube de M. Airy. — Un objectif C est mis à peu près horizontalement au-dessus d'un bain de mercure M placé un peu en deçà du milieu de la distance focale principale. Si un faisceau de rayons lumineux verticaux tombe sur l'objectif, il donnerait une image réelle située au foyer principal, si la



surface horizontale du mercure ne lui en substituait une autre également réelle, e, située sur la verticale qui passe par le centre optique c et un peu au delà de l'objectif lui-même, par suite de la position donnée au bain; mais les rayons rencontrant de nouveau l'objectif, deviendront plus convergents et ils donneront finalement une image réelle encore, située en e' sur la verticale de c. Si un réticule est convenablement placé sur cette verticale, sa superposition avec l'image e' assurera que les rayons primitifs étaient verticaux.

Il ne serait pas possible de placer l'œil, pour voir cette superposition sans intercepter les rayons venus directement sur l'objectif. On peut obvier à cette difficulté de la manière suivante. On fait arriver les rayons qui convergent en e' sur un prisme qui les renvoie en e'' où ils rencontrent le réticule; un oculaire o permet de mieux juger la superposition. Pour savoir si cette superposition répond à la verticalité des rayons primitifs, il suffit de s'assurer que le réticule et son image due aux actions du prisme, de la lentille et du bain de mercure, sont superposés.

Le prisme et l'oculaire sont renfermés dans un petit tube nécessaire pour arrêter les rayons extérieurs.

Il nous semble que dans ce système, il y a à craindre des effets de parallaxe, dont l'influence peut être amoindrie au moyen d'un œilleton très-petit, parallaxe dû à ce que le réticule et son image pourront être dans la même direction, mais non superposé. Un autre inconvénient proviendra des ondulations du mercure, dont la parfaite fixité devrait exister au moment précis du passage de l'astre, et enfin une dernière difficulté doit provenir du peu de clarté des images qui ont subi des modifications de réfraction et réflexion assez nombreuses.

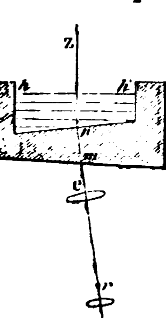
Appareil de M. Faye. — M. Faye a proposé d'employer deux lunettes dirigées l'une sur le nadir et dont l'axe optique est mis vertical au moyen d'un bain de mercure qui doit permettre la superposition du réticule et de son image due à la réflexion et à deux réfractions de l'objectif, l'autre dirigée en sens inverse vers le zénith et dont l'axe optique est vertical lorsque l'image de son réticule se confond avec celle de la première lunette due aux réfractions effectuées par les deux objectifs. Pour arriver à

la constatation de ce fait, le bain de mercure a dû être enlevé après le règlement de la première lunette, qui est elle-même enlevée ensuite, pour les observations zénithales des étoiles.

Le défaut de ce système provient de la très-grande longueur de l'appareil, que M. Faye propose de réduire d'un tiers environ, en brisant la lunette supérieure et en joignant ses deux parties par un prisme.

Son avantage sur le réflex-zénith-tube provient de l'absence de parallaxe et de réflexion, si ce n'est du réticule de règlement, tout au moins de réflexion des étoiles qui peuvent souvent être peu visibles dans ce genre d'observation; enfin, l'emploi du bain, qui n'est nécessaire que dans l'opération préalable, ne pourra pas causer l'inconvénient dû aux ondulations qui peuvent exister au passage précis de l'étoile.

Lunette de M. Porro. — M. Porro a proposé la suppression de la lunette supérieure de M. Faye, en la remplaçant par un bain d'eau ou d'huile bien claire renfermé dans un vase transparent. L'axe optique de la lunette étant dirigé suivant C*r*, le réticule enverra un rayon lumineux qui suivra la ligne brisée *r*C*mnh*, dans l'air, dans le verre et dans le liquide. Si le dernier élément *nh* de la trajectoire est vertical, il se réfléchira, en partie, sur la surface horizontale supérieure du liquide, suivant lui-même, et il reprendra la marche inverse *hnm*C*r*, ce qui donnera lieu à une image superposée à ce réticule lui-même. Si une étoile se trouve dans la même direction verticale *hn*, son image réelle due à ceux des rayons qui auront pénétré dans le bain, viendra se superposer aux deux images du réticule.



On voit qu'il n'est pas nécessaire que le fond du vase soit horizontal et à faces parallèles, condition qu'il aurait été difficile de satisfaire. Si, sans être parallèles, les faces sont planes, il n'y aura pas à craindre d'erreur de parallaxe.

Avantages des observations zénithales. — Les observations zénithales ont l'avantage d'éviter l'influence de la réfraction toujours imparfaitement corrigée, ainsi que l'erreur provenant de l'emploi du niveau à bulle d'air dont le mouvement est contrarié par le frottement du liquide contre les parois et dont l'exacti-

tude peut être faussée par une légère déformation résultant d'un changement moléculaire provenant de l'action de la chaleur. A ces deux avantages il faut ajouter ceux qui proviennent de l'absence de mesure d'angle, ce qui évite les erreurs de division, de centrage et d'usure des centres, et enfin elle est indépendante du règlement de la pendule toujours plus ou moins défectueux.

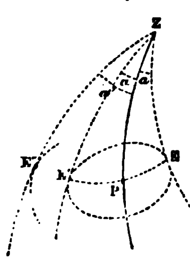
Mais il faudrait, pour qu'on pût en faire usage dans toute sa rigueur, qu'une étoile cataloguée eût une déclinaison apparente égale à la latitude du lieu, ce qui est excessivement rare, parmi les 114 étoiles dont la *Connaissance des temps* donne les éléments. On devra donc dans la plupart des cas se contenter d'observer près du zénith seulement.

Le réticule est alors composé d'un premier fil qu'on met dans la direction du méridien aussi exactement qu'on le peut, et d'un second fil perpendiculaire au premier, mû par un mouvement micrométrique dont les valeurs angulaires soustendues au centre optique de l'objectif, sont connues et comptées à partir d'un troisième fil parallèle au second, fil qui détermine la verticale par sa rencontre avec le premier.

On pourra donc observer le passage d'une étoile sur le fil placé dans la direction méridienne approchée, et connaître en même temps l'angle δ compté dans cette direction, angle qui la sépare de la verticale. Si le méridien était exact, il suffirait de prendre $L = D \pm \delta$; il n'en est pas rigoureusement ainsi, mais on comprend que l'étoile étant fort près du zénith, les erreurs résultant de la réfraction qui existe quoiqu'avec une très-faible influence, et de la déviation du méridien, seraient insignifiantes. Si cependant on veut en tenir compte, la première se corrigera directement au moyen des tables et sans erreur appréciable, par suite de sa petitesse, et la seconde par la réduction au méridien indiquée dans le procédé habituellement employé. Il est vrai qu'alors l'usage d'une pendule réglée deviendra nécessaire, mais dans des circonstances telles qu'une inexactitude de son règlement n'aura qu'une importance à peu près nulle.

Les observations zénithales employées à la détermination des latitudes ont deux inconvénients : le premier provient de l'absence, qui devra être fréquente, d'étoiles catalogues coupant, en tous les lieux de la terre, le méridien dans le champ de la lunette ; le second est dû à l'emploi spécial d'un instrument particulier qui ne peut pas servir aux autres déterminations astronomiques.

138. Latitude déduite d'observations azimutales. — M. Babinet, en modifiant et étendant un procédé anciennement connu, a indiqué la marche à suivre pour obtenir la latitude d'un lieu au moyen d'observations azimutales. Soient ZPM le méridien, Z le zénith, P le pôle, E une étoile qui n'atteigne pas le zénith de l'observation. Cette dernière décrira, pendant la révolution diurne, un petit cercle EE′ tel que l'arc de grand cercle PE mesurera le complément de sa déclinaison.



Un observateur muni d'un théodolite doublement répétiteur pourra observer les excursions extrêmes à l'est et à l'ouest du plan vertical contenant l'étoile ; il lira ainsi, sur le limbe horizontal, la somme $2a$ de ces excursions.

Au lieu d'observer ainsi la même étoile dans ses deux positions, il pourra, pour gagner du temps, observer l'étoile E dans son excursion maximum à l'ouest, et quelques instants après, une seconde étoile E″ dans son excursion maximum à l'est ou à l'ouest. L'angle $a \pm a'$ parcouru sur le limbe horizontal, joint aux déclinaisons supposées connues permettra de trouver la latitude L.

En considérant le triangle ZPE, on aura en effet,

$$\sin. a = \frac{\sin. E. \cos. D}{\cos. L}$$

A l'inspection de cette formule on voit que le maximum de a devra correspondre à celui de E. L'élongation extrême observée aura donc lieu quand ce dernier sera droit, et alors on pourra écrire

$$\sin. a = \frac{\cos. D}{\cos. L} \quad \text{ou} \quad \cos. D = \sin. a. \cos. L$$

L'observation faite sur la deuxième étoile, à son excursion extrême opposée donne de même

$$\cos. D' = \sin. a' \cos. L$$

La combinaison des équations précédentes par voie d'addition et de soustraction donne

$$(\cos. D + \cos. D') = (\sin. a + \sin. a') \cos. L$$

$$(\cos. D - \cos. D') = (\sin. a - \sin. a') \cos. L$$

divisant terme à terme et transformant,

$$\frac{\cos. D + \cos. D'}{\cos. D - \cos. D'} = \frac{\sin. a + \sin. a'}{\sin. a - \sin. a'}$$

$$\frac{2 \cos. \frac{1}{2}(D + D') \cos. \frac{1}{2}(D - D')}{2 \sin. \frac{1}{2}(D + D) \sin. \frac{1}{2}(D' - D)} = \frac{2 \sin. \frac{1}{2}(a + a') \cos. \frac{1}{2}(a - a')}{2 \cos. \frac{1}{2}(a + a') \sin. \frac{1}{2}(a - a')}$$

$$\text{tang.} \frac{1}{2}(D + D') \text{ tang.} \frac{1}{2}(D' - D) = \text{cot.} \frac{1}{2}(a + a') \text{ tang.} \frac{1}{2}(a - a')$$

Les observations azimutales ont fait connaître $a \pm a'$; on tirera donc $a \pm a'$ de l'équation précédente, et par suite a et a' seront déterminés. La substitution dans l'une ou l'autre des équations primitives donnera enfin la latitude L. L'opération double offrira un moyen de vérification.

Remarquons, accessoirement, que a et a' qui viennent d'être déterminés sont les azimuts des étoiles observées, azimuts qui conduiraient immédiatement à celui d'un premier côté, comme il sera dit au chapitre V.

Les observations azimutales ont l'avantage d'être indépendantes de la réfraction et de toutes les causes d'erreur qui entachent les observations des distances zénithales, comme l'usure des centres, la flexion de quelque partie de l'instrument, l'imperfection du niveau à bulle d'air ; elles facilitent de plus l'exactitude du pointé, dans le sens utile à l'observation du moins. On sait, en effet, que la dispersion fait apparaître toute étoile observée autre part qu'au zénith, sous une forme allongée dans le sens vertical. Ainsi vers la hauteur de 45 degrés, pour une réfraction d'une minute, la dispersion qui est environ $\frac{1}{14}$ ou $\frac{1}{15}$ de la réfraction, donne une amplitude verticale de 4″ à l'image de l'étoile. Quand on observe une distance zénithale, il faut bissecter le petit spectre par le fil horizontal, de manière à pointer sur le maximum d'intensité lumineuse. Mais ce maximum est variable par suite de la variation du pouvoir absorbant de l'atmosphère ; en sorte que l'observation est indécise. Il n'en est pas de même pour la bissection de l'image par un fil vertical, c'est-à-dire, pour une observation azimutale, l'allongement en hauteur aidant au contraire l'exactitude de ce pointé.

Remarquons en terminant que cette manière d'opérer n'a pas exigé l'emploi d'une pendule, et que, par suite, les résultats qu'elle fournit sont indépendants des erreurs dues à un règlement défectueux de celle-ci.

CHAPITRE IV

LONGITUDE

139. La latitude d'un premier point est non-seulement utile pour placer le réseau géodésique à sa hauteur convenable sur la terre, mais elle est encore indispensable pour exécuter le calcul des latitudes des autres sommets de triangle. Il n'en est pas de même de la longitude, sous ce second point de vue; c'est ce dont on sera convaincu si l'on se reporte à la formule de géodésie qui ne contient les longitudes qu'à l'état de différence simple. Ceci est du reste une conséquence de l'hypothèse qui admet que la terre est une surface de révolution; tous les méridiens y jouant le même rôle, on pourrait partir d'une longitude quelconque arbitraire, et le réseau géodésique traduit en coordonnées géographiques ne serait pas déformé; il n'y aurait plus, pour rentrer dans la réalité, qu'à ajouter une constante à toutes les longitudes calculées.

Le problème de la recherche des différences de longitude se réduit à celles des deux heures soit sidérales, soit moyennes qui existent sur les deux méridiens à comparer, à un même instant, quelconque du reste. Cette différence, analogue à celle d'angles horaires, multipliée par 15, donne la différence de longitude qui est très-difficile à obtenir avec une certaine précision, par suite de l'intervention du temps dont les erreurs se transportent quinze fois plus grandes sur la longitude.

Méridien connu. — Le soleil passe au méridien d'un lieu à une heure sidérale de ce lieu égale à l'ascension droite actuelle de l'astre, on a une heure moyenne égale à l'équation du temps. Lors de ce passage, la pendule supposée réglée fait donc connaître par le tableau de son état comparé à son indication, l'une ou l'autre de ces deux heures. Pour que le problème soit résolu, c'est-à-dire pour que l'on connaisse la longitude rapportée au méridien de Paris, il suffit donc de savoir quelle est l'heure de

Paris à laquelle l'ascension droite ou l'équation du temps ont les valeurs qui viennent d'être trouvées.

L'indication fournie par la pendule fait connaître le temps sidéral $t = Æ$ qui répond au moment de l'observation.

La *Connaissance des temps* donne pour tous les jours l'ascension droite du soleil, à midi moyen de Paris ; par une interpolation on pourra trouver l'heure moyenne de Paris qui correspond à la valeur spéciale $Æ = t$; la table *du temps sidéral à midi moyen* fera ensuite connaître l'heure sidérale t' correspondante, et la différence des longitudes sera $15\ (t-t')$.

Si la pendule est réglée sur le temps moyen, son indication T, lors du passage du soleil au méridien, donnera l'équation du temps actuelle, et la connaissance des temps fournira par interpolation l'heure moyenne T' de Paris qui correspond à la valeur trouvée T de l'équation du temps. La différence des longitudes sera encore donnée par $15\ (T - T')$.

L'emploi des ascensions droites, beaucoup plus variables que l'équation du temps, est bien préférable à l'usage de celle-ci.

On peut, au lieu d'employer le soleil, observer le moment du passage de la lune au méridien, et l'avantage est pour cette seconde observation, par suite des grandes variations d'ascensions droites de cet astre ; mais quoique données toutes les douze heures, la rapidité de ces variations est telle qu'on ne peut plus les supposer proportionnelles aux variations du temps, en sorte qu'une simple interpolation est insuffisante, et il faut alors avoir recours aux différences secondes.

Les observations faites sur les passages d'étoiles au méridien ne peuvent conduire à aucun résultat pour la détermination de la longitude, par suite de l'extrême petitesse des variations d'ascensions droites apparentes, variations qui ne proviennent que de l'aberration et de la précession des équinoxes.

Lorsqu'on se sert du soleil ou de la lune, l'observation ne peut porter sur le centre et elle doit être faite sur les bords de l'astre. Si les deux bords ont été successivement employés, il suffit de prendre la moyenne des deux heures indiquées par la pendule, pour avoir l'élément relatif au centre. Si par suite d'une circonstance quelconque l'observation n'a pu être faite que sur un des bords, il faut passer de l'heure de la pendule à celle qu'elle devra marquer lorsque le centre du soleil continuant son mouvement (ou inversement si l'observation a porté sur le bord postérieur) arrivera au méridien après avoir parcouru un angle

dont le sommet est à l'œil de l'observateur et que soustend le rayon de cet astre. Cet angle est le demi-diamètre apparent d donné par la *Connaissance des temps*; il est assez peu variable pour qu'on puisse se contenter de le prendre seulement à la date du jour de l'opération.

Si nous remarquons qu'il joue ici le même rôle que celui que remplit l'angle qui est formé au centre optique d'une lunette méridienne par l'axe principal et un axe secondaire, on verra que le temps employé par le centre du soleil, pour le parcourir, temps analogue à celui que nous avons appelé *distance des fils*, sera donné par $\frac{d}{15 \cos. D}$. La pendule marquerait donc $t+\frac{d}{15 \cos. D}$ au moment du passage du centre au méridien, et cette indication, qui est l'ascension droite du soleil, sera traitée comme nous l'avons indiqué précédemment.

La déclinaison actuelle, D, sera trouvée dans la *Connaissance des temps*, pour la date du jour, sans précision de l'heure, par suite de la petitesse de la correction apportée au résultat primitif; les répétitions et la déviation du plan méridien, si celle-ci a été reconnue, devront être traitées absolument de la même manière que le demi-diamètre apparent, les premières au moyen des distances équatoriales des fils divisés par les cosinus de la déclinaison, et la dernière par la formule $\frac{p}{15}=\frac{\alpha}{15}\frac{\sin.(L-d)}{\cos. D}$ formule dans laquelle $\frac{p}{15}$ est le temps à ajouter ou à retrancher, α l'angle de déviation supposé connu et L une valeur approchée de la latitude.

140. Méridien inconnu. — La meilleure manière de comparer les longitudes, quand les points de station ne sont pas très-rapprochés, et peut-être même la seule bonne, est celle qui est basée sur la connaissance du méridien. Mais celui-ci ne peut pas toujours être déterminée, et il faut avoir recours à d'autres méthodes.

Instantanéité d'un phénomène. — Lorsque les méridiens à comparer ne sont pas trop éloignés l'un de l'autre, on crée, en un lieu intermédiaire, un phénomène instantané, qui, vu par les deux observateurs au même moment précis, leur permet de lire, sur des chronomètres réglés aux méridiens des deux lieux et sur le même mode de temps sidéral ou moyen, les heures sidérales

ou moyennes qui se correspondent et dont la différence, multipliée par 15, donne la différence de longitude.

Si les distances sont assez considérables pour qu'on ne puisse pas se contenter d'un seul signal instantané, on en établit plusieurs qu'on sépare par des observateurs munis de chronomètres. Si tous les chronomètres sont réglés sur les méridiens des lieux où ils sont situés, le problème se résout comme le précédent, en trouvant, par les différences d'heures, les différences successives de longitude de deux observateurs voisins. Mais il serait incommode d'avoir ainsi un grand nombre de chronomètres bien réglés, et en modifiant un peu la méthode employée, il suffit que ceux des extrémités soient exacts, tandis que les autres ne sont destinés qu'à donner des intervalles de temps qui n'exigent pas ce règlement. En effet, si tous les signaux avaient lieu simultanément, il suffirait de connaître les heures T et T' des stations extrêmes, comme nous l'avons dit plus haut; mais si les signaux sont successifs, le résultat premier T—T' se trouve trop grand de tous les temps qui les ont séparés, et il suffit d'en retrancher leur somme; on arrive facilement à connaître cette somme, si chaque observateur intermédiaire estime d'après les indications de son chronomètre, le temps qui s'écoule entre les deux signaux qu'il sépare, et il suffira d'ajouter tous ces intervalles pour avoir la totalité des temps qui ont séparé les signaux extrêmes.

L'instantanéité a été obtenue au moyen d'explosion de poudre, d'apparition d'un fanal au sommet d'un monument ou de fusées lancées en l'air.

La méthode que nous venons d'indiquer a des inconvénients qu'on devine aisément; les observations ont souvent manqué et il a fallu les renouveler bien des fois pour arriver à des résultats peu nombreux et présentant des discordances de deux secondes en temps, c'est-à-dire de 30 secondes d'angles.

Depuis l'emploi des télégraphes électriques, l'instantanéité peut être obtenue d'une manière bien plus simple et plus rigoureuse, pour la comparaison de stations mises en communication avec les fils de ces télégraphes. Il est probable qu'ils permettront de résoudre le problème des longitudes avec une plus grande exactitude que celle obtenue jusqu'à ce jour. Des observations de ce genre faites aux États-Unis ont conduit, dit-on, à des résultats satisfaisants.

Lorsque l'éloignement du méridien devient trop considérable,

on a recours à des phénomènes célestes instantanés, et comme il ne serait pas possible d'établir en permanence un observateur au point de départ, on tourne la difficulté de la manière suivante : l'instantanéité n'est plus qu'une conséquence de calculs faits à l'avance et indiqués dans la *Connaissance des temps*, pour certains phénomènes dont l'apparition est donnée en regard de l'heure de Paris qui leur correspond. Ainsi, on peut employer les éclipses de lune, qui sont très-rares, celles des satellites de Jupiter, qui sont beaucoup plus fréquentes, mais difficiles à observer, ou les occultations de certaines étoiles sur lesquelles des erreurs de parallaxe lunaire ont une influence qui entache de graves erreurs les résultats obtenus.

Ce procédé, pour des causes diverses, est donc d'un emploi difficile et incertain; il ne donnerait, du reste, que de rares renseignements, souvent encore annulés par un phénomène météorologique quelconque.

Il a fallu en trouver d'autres, qui, ne donnant pas toujours une grande exactitude, fussent pourtant d'un emploi plus facile et plus fréquent.

Loch. — Les marins emploient souvent un procédé fort imparfait, mais qui donne certaines approximations, suffisantes parfois. Ils rectifient d'ailleurs les résultats, lorsqu'ils le jugent nécessaire et que c'est possible, au moyen d'observations astronomiques.

Ce procédé consiste à jeter à la mer un corps en bois ou en liége restant à la surface, et que l'on considère comme ne quittant pas la place où il a été mis à l'eau. A ce corps, qu'on nomme *loch* est attachée une corde dont l'autre extrémité reste dans le vaisseau. On laisse filer la corde dont la longueur est connue par les nœuds qui la subdivisent. On peut ainsi apprécier la marche du bâtiment en un temps donné, et l'on en conclut l'espace franchi sur une direction indiquée par la boussole. Le résultat rapporté graphiquement sur la carte fait connaître le lieu où l'on est. C'est ce qu'on appelle faire le *point*.

On obtient ainsi, très-grossièrement il est vrai, la latitude et la longitude.

Emploi de deux chronomètres. — Un des chronomètres réglé, au méridien d'origine, accompagne le second qu'on règle sur le même mode de temps que le premier, par des observations de

hauteurs du soleil, faites au lieu dont on veut connaître la longitude ; la différence des temps des deux méridiens est donnée par la différence des indications lues au même instant sur les deux chronomètres.

Ce moyen, employé très-souvent par les marins, suppose que le chronomètre du lieu de départ ne s'est pas dérangé depuis l'époque, souvent très-éloignée, de son règlement ; aussi les résultats qu'il fournit ne sont-ils qu'approximatifs, à moins qu'on ne fasse de fréquentes stations qui permettent de contrôler la marche du chronomètre origine.

141. Distances lunaires. — Au lieu de se servir de phénomènes célestes instantanés, très-rares et difficiles à observer, on peut utiliser, avec plus d'avantage, des phénomènes permanents dont la mesure diffère avec le temps, et on cherche, dans la *Connaissance des temps*, l'heure de Paris à laquelle ce phénomène a existé avec l'intensité qui lui a été reconnue au lieu dont on veut avoir la longitude. Ainsi, on emploie, à ce sujet, les distances angulaires de la lune au soleil ou à certaines étoiles, distances que la *Connaissance* donne, supposées vues du centre de la terre, de trois en trois heures pour les jours où elles sont convenablement observables.

La différence des heures du lieu et de Paris, obtenues par le secours d'un chronomètre réglé sur le méridien étudié, et par l'interpolation faite dans la *Connaissance*, pour trouver l'instant qui correspond à la mesure angulaire observée, multipliée par 15, donne la différence des longitudes, si l'heure du lieu est moyenne. Celle qui est fournie pour Paris se rapportant au temps moyen, il y a lieu de la transformer, au moyen de la table, du *temps sidéral à midi moyen*, si le chronomètre a été réglé sur le temps sidéral.

Mais l'angle observé, pour être comparé à celui de la *Connaissance des temps*, devrait avoir son sommet au centre de la terre, être indépendant de la réfraction et de la parallaxe, et se rapporter au centre des astres ; il ne satisfera pas en réalité à ces diverses conditions, et il y aura lieu de le ramener à ce qu'il aurait dû être. L'observation pourra être faite au théodolite ou au cercle répétiteur.

Emploi du théodolite. — Supposons qu'il s'agisse d'une distance

du soleil à la lune ; si le premier était remplacé par une étoile, il suffirait d'annuler son diamètre apparent et sa parallaxe.

L'angle fourni par le théodolite est la réduction à l'horizon de celui qui sépare, dans le sens horizontal, les deux bords considérés, et cet angle est le même que celui qui serait vu du centre de la terre, puisque les déplacements des rayons lumineux observés, déplacements dus à la parallaxe et à la réfraction, n'ont lieu que dans les verticaux qui les contenaient primitivement, verticaux qui passent également par le lieu de l'observation et par le centre de la terre, qu'on peut regarder comme sphérique.

On observe également les hauteurs des bords supérieurs ou inférieurs de la lune et du soleil ; ces hauteurs h et h', corrigées de la réfraction r et r', de la parallaxe p et p' et des demi-diamètres apparents d et d', donneront les hauteurs vraies des centres,

$$H = h + p - r \pm d, \qquad H' = h' + p' - r' \pm d'$$

et ces hauteurs seront également celles des bords voisins ou opposés dans le sens horizontal.

Nous avons dit précédemment que l'angle à l'horizon, des deux bords observés de la station était le même au centre de la terre ; pour avoir celui qui répond aux deux centres des astres, il suffit de lui ajouter ou de lui retrancher les demi-diamètres apparents, réduits eux-mêmes à l'horizon, et qu'on obtient facilement en divisant les demi-diamètres fournis par la Connaissance des temps, par le cosinus de la hauteur.

Si on désigne par D la distance angulaire des centres du soleil et de la lune vus du centre de la terre, et par Z l'angle observé, corrigé comme il vient d'être dit, on a évidemment l'équation générale de la trigonométrie sphérique,

$$\cos. D = \sin. H \sin. H' + \cos. H \cos. H' \cos. Z$$

qui permettra de calculer D, qui servira ensuite à trouver, pour être mise en regard de l'heure de la pendule du lieu, l'heure correspondante du méridien de Paris.

La résolution de cette équation, dont l'inconnue est D, pourrait se faire par la combinaison des deux tables de logarithmes des nombres et des lignes trigonométriques ; mais il sera plus commode d'employer une inconnue auxiliaire, comme il suit :

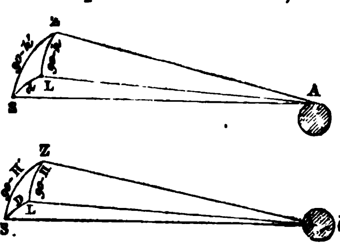
$$\cos. D = \sin. H \left(\sin. H' + \cos. H' \cot. H. \cos. Z\right) = \sin. H \left(\sin. H' + \cos. H' \operatorname{tang}. \varphi\right)$$

$$= \frac{\sin. H \sin. (H' + \varphi)}{\cos. \varphi}.$$

si on a posé cot. H. cos. Z = tang. φ. La dernière équation fera connaître φ qui, porté dans la précédente, fournira D, par des calculs logarithmiques directs.

Emploi du cercle répétiteur ou du cercle à réflexion. — La méthode précédente, plus simple que la suivante, ne peut pas être employée avec les deux cercles et notamnent avec le cercle à réflexion que les marins peuvent seul utiliser.

D'un point de station A, on a observé l'angle compris entre deux des bords des deux astres, en le combinant avec les demi-diamètres apparents par voie de soustraction ou d'addition, on en conclut la distance angulaire d des deux centres supposée observée de A.



On observe également les hauteurs des bords supérieurs ou inférieurs, ce qui, par l'addition ou la soustraction des mêmes demi-diamètres apparents, fait connaître les hauteurs h et h' des centres vus du même point de station.

En désignant encore par Z l'angle des deux centres réduit à l'horizon, angle que nous savons être le même, en supposant son sommet, soit à la station, soit au centre de la terre, on pourrait le déterminer par l'équation

$$\cos. d = \sin. h. \sin. h' + \cos. h \cos. h' \cos. Z$$

Corrigeons les hauteurs de la réfraction et de la parallaxe, nous aurons, pour celles qui seraient vues du centre de la terre,

$$H = h - r + p, \qquad H' = h' - r' + p'$$

et nous aurons, en désignant par D la distance angulaire véritable à comparer avec celles de la Connaissance des temps,

$$\cos. D = \sin. H. \sin. H' + \cos. H \cos. H' \cos. Z$$

équation qui, combinée avec la précédente, permettra l'élimination de Z, élimination qui se fera de la manière suivante :

$$\frac{\cos. d - \sin. h \sin. h'}{\cos. h \cos. h'} = \frac{\cos. D - \sin. H \sin. H'}{\cos. H \cos. H'}$$

ajoutant l'unité à chaque membre,

$$\frac{\cos. d+\cos. (h+h')}{\cos. h \cos. h'} = \frac{\cos. D+\cos. (H+H')}{\cos. H \cos. H'}$$

$$\frac{2 \cos. \frac{1}{2}(d+h+h')\cos. \frac{1}{2}(d-h-h')}{\cos. h \cos. h'} = \frac{2 \cos.^2 \frac{1}{2} (H+H')-2 \sin.^2 \frac{1}{2} D}{\cos. H \cos. H'}$$

car cos. $(H+H')$ peut être remplacé par $2 \cos.^2 \frac{1}{2} (H+H')-1$, et cos. D par $1 - 2 \sin.^2 \frac{1}{2}$ D.

En posant $d+h+h' = 2\, m$, il s'ensuit $d-h-h' = 2\,(d-m)$ et substituant,

$$\frac{2 \cos. m. \cos. (m-d)}{\cos. h \cos. h'} = \frac{2 \cos.^2 \frac{1}{2} (H+H')-2 \sin.^2 \frac{1}{2} D}{\cos. H \cos. H'}$$

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2} D = \cos.^2 \tfrac{1}{2} (H+H') - \frac{\cos. m \cos. (m-d) \cos. H \cos. H'}{\cos. h \cos. h'}$$

Pour la facilité de l'emploi des logarithmes, on prend une inconnue auxiliaire φ, en posant

$$\sin.^2 \varphi = \frac{\dfrac{\cos. H \cos. H'}{\cos. h \cos. h'} \cos. m. \cos. (m-d)}{\cos. \frac{1}{2} (H+H')}$$

qui, calculée d'abord, permet ensuite la résolution de l'équation

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2} D = \cos.^2 \tfrac{1}{2} (H+H') (1-\sin.^2 \varphi)$$

ou

$$\sin. \tfrac{1}{2} D = \cos. \tfrac{1}{2} (H+H') \cos. \varphi$$

Il se présente une difficulté qui provient de la simultanéité qui devrait exister entre l'observation de la distance angulaire et celles des hauteurs. Si trois observateurs sont réunis, cette simultanéité peut exister, mais il n'en est plus de même dans le cas le plus ordinaire où un seul observateur doit suffire à tout. On prend alors les hauteurs *avant et après* l'observation de l'angle, et on conclut, de leur moyenne, l'heure probable qui existait lors de la mesure de la distance angulaire.

Les répétitions ne sont pas possibles avec cette méthode, qui offre d'assez nombreuses chances d'inexactitude et qui ne conduit pas, du reste, à des résultats très-satisfaisants.

On voit, en résumé, que les déterminations de longitude sont très-difficiles à faire, et qu'il n'y a que deux méthodes, celles dues à l'emploi du méridien connu et à la télégraphie électrique, qui puissent conduire à des résultats qui offrent un degré d'exactitude assez rigoureux.

CHAPITRE V

AZIMUT

142. **Méridien connu.** — Le meilleur moyen de déterminer azimut d'un premier côté repose encore ici, comme pour les autres observations astronomiques, sur l'emploi du plan méridien, auquel cas il suffit de mesurer directement l'angle compris entre le signal et une mire placée, aussi loin que possible, dans la direction méridienne. L'observation faite avec le théodolite donne immédiatement l'azimut, qui, dans le cas de l'emploi du cercle, résulte d'une réduction à l'horizon.

Méridien inconnu.—On observe l'angle entre un astre et un signal qu'on fait marquer par un réverbère, si l'opération doit se faire de nuit. Il est évident que l'azimut du signal est égal à celui de l'astre, augmenté ou diminué, suivant les cas, de l'angle observé réduit à l'horizon, tout en ajoutant ou en retranchant 360° quand cela est nécessaire. Le problème repose donc sur la détermination de l'azimut de l'astre, détermination qui peut se faire sans observation, simplement par le calcul, au moyen des renseignements préalablement connus, latitude et pendule réglée.

Si on considère le triangle PAZ, on voit que trois de ses éléments sont connus, P par l'heure de la pendule, ZP = 90° — Z par la détermination antérieure de la latitude, et PA, distance polaire complément de la déclinaison de l'astre, par la Connaissance des temps. On emploiera, pour la résolution de ce triangle, les analogies de Néper, qui fourniront simultanément l'azimut Z et l'angle A qui est indifférent à la question.

Si l'observation de l'angle compris entre l'astre et le signal a été faite au théodolite, la question est entièrement résolue, mais si elle a été faite au cercle, il y a lieu de réduire à l'horizon

l'angle qui en est résulté, et pour cela il faut connaître les distances zénithales des deux points visés. Celle du signal s'obtiendra immédiatement avant ou après l'observation de l'angle, mais celle de l'astre, qui devrait être faite en même temps que celle-ci, peut être trouvée d'une manière plus commode, par la formule

$$\sin.\ \delta = \frac{\sin.\ P \cos.\ D}{\sin.\ Z}$$

Cette formule peut sembler suffisante pour la recherche de l'inconnue Z de la question, mais elle exigerait l'observation de δ en même temps que celle de l'angle, et elle conduirait à un résultat dépendant d'une distance zénithale toujours entachée de quelque erreur, sans éviter du reste celle qui provient de la pendule. On se contente donc de l'employer pour la recherche inverse de δ, destiné seulement à permettre une correction.

Dans toute réduction d'un angle à l'horizon, les distances zénithales, éléments nécessaires de cette réduction, doivent être celles qui existaient réellement lors de l'observation, c'est-à-dire entachées de l'erreur de réfraction et pour le cas actuel répondant au sommet même de l'angle; la valeur de la distance zénithale du signal est dans ces deux cas, mais celle de l'astre, δ, obtenue par le calcul, est indépendante de la réfraction et se rapporte au centre de la sphère céleste confondu avec le centre de la terre; si l'observation a été faite sur le soleil ou sur la lune, il y a donc lieu de conserver la première telle qu'on l'a obtenue directement, mais il faut modifier la seconde en y introduisant les erreurs de réfraction et de parallaxe, ce qui donnera

$$\Delta = \delta - r + p$$

La réduction à l'horizon devra se faire par la formule de trigonométrie sphérique qui donne une ligne trigonométrique d'un angle en fonction des trois côtés, et non par celle de la géodésie, qui ne se rapporte qu'au cas où les distances zénithales, provenant d'observations de points terrestres, sont très-grandes.

Les erreurs qui peuvent entacher les déterminations d'azimuts proviennent d'un défaut de règlement de la pendule; si on remarque que les variations des angles horaires sont d'autant plus grandes, par rapport à celles des azimuts correspondants, que l'astre se trouve plus éloigné du méridien, on en conclura que pour que les erreurs de la pendule aient peu d'influence sur les azimuts, il faudra opérer loin de ce méridien.

La détermination d'un azimut peut se faire par l'emploi d'un astre quelconque; mais habituellement on se sert, à ce sujet, du soleil ou de l'étoile polaire.

Le soleil a l'avantage de pouvoir être observé de jour; on saisit pour le viser le moment où il est proche de son lever et de son coucher, afin de rentrer dans la condition que nous avons énoncée plus haut. Son ascension droite, qui sert à transformer l'heure de la pendule en angle horaire, et sa déclinaison, qui est un élément de la résolution du triangle sphérique, doivent être déterminées, avec le secours de la connaissance des temps, aussi exactement que possible, comme nous avons eu occasion de l'indiquer déjà plusieurs fois. Enfin, il est nécessaire de tenir compte de son demi-diamètre apparent, comme nous l'avons également indiqué pour la recherche de la longitude par les distances lunaires.

L'emploi des étoiles permet, à la rigueur, les observations de jour, mais seulement avec des lunettes assez puissantes et pour certaines étoiles parmi lesquelles se trouve l'étoile polaire. Ce qui fait préférer celle-ci aux autres, c'est qu'elle permet les répétitions, comme nous l'indiquerons un peu plus loin. Ces répétitions ne peuvent pas se faire quand on emploie un astre, le soleil, par exemple, dont la distance polaire n'est pas très-petite. On se contente alors de grouper des observations par quatre et de prendre la moyenne des heures qu'on regarde comme répondant à la moyenne des azimuts, ce qui n'est pas exact. En effet, l'équation

$$\sin. Z = \frac{\cos. D}{\sin. \delta} \sin. P$$

dit que cette proportionnalité est d'autant plus près d'exister, que P et Z sont petits, tandis que, d'un autre côté, nous avons vu qu'il était bon d'observer loin du méridien, pour que les variations ou erreurs commises sur Z fussent petites, par rapport à celles commises sur P par suite d'un règlement défectueux de la pendule.

143. Observation de l'étoile polaire. — La méthode précédente peut être appliquée à l'observation de la polaire; mais il est préférable, afin de faire usage des répétitions d'une manière plus exacte que celle qui vient d'être indiquée, de modifier les formules employées, qui sont les analogies de Néper, en vertu

de la petitesse de la distance polaire de cette étoile, ce qui permettra des développements en séries.

La quatrième des formules principales de la trigonométrie sphérique, appliquée au triangle pôle, zénith, étoile, donne en désignant par d le complément de la déclinaison

$$\text{cot. } d.\ \text{cos. L} = \text{sin. L. cos. P} + \text{sin. P cot. Z}$$

d'où

$$\text{cot. Z} = \frac{\text{cot. } d.\ \text{cos. L} - \text{sin. L cos. P}}{\text{sin. P}}, \quad \text{tang. Z} = \frac{\text{sin. P}}{\text{cot. } d.\ \text{cos. L} - \text{sin. L cos. P}}$$

$$\text{tang. Z} = \frac{\text{sin. P tang. } d}{\text{cos. L} - \text{sin. L tang. } d.\ \text{cos. P}} = \frac{\text{sin. P}}{\text{cos. L}}\ \frac{\text{tang. } d}{1 - \text{tang. L tang. } d \text{ cos. P}}$$

Jusqu'ici cette formule est rigoureuse et elle s'applique à tous les astres ; mais si on la rend particulière à l'étoile polaire seule, on pourra la modifier, en lui faisant perdre de sa rigueur, pour lui donner une forme plus favorable au but qu'on se propose. Pour l'étoile dont nous nous occupons Z et d sont toujours petits, en sorte qu'on pourra employer les développements en séries des lignes trigonométriques, en se bornant à conserver les troisièmes puissances de Z et d. On aura ainsi,

$$Z + \frac{Z^3}{3} = \frac{\text{sin. P}}{\text{cos. L}}\ \frac{d + \frac{d^3}{3}}{1 - \text{tang. L. cos. P}\left(d + \frac{d^3}{3}\right)}$$

$$= \frac{\text{sin. P}}{\text{cos. L}}\left(d + \frac{d^3}{3}\right)\left\{1 - \text{tang. L cos. P}\left(d + \frac{d^3}{3}\right)\right\}^{-1}$$

Mais en ne conservant que les secondes puissances de $\left(d + \frac{d^3}{3}\right)$

$$\left\{1 - \text{tang. L cos. P}\left(d + \frac{d^3}{3}\right)\right\}^{-1} = 1 + \text{tang. L cos. P}\left(d + \frac{d^3}{3}\right)$$
$$+ \text{tang.}^2 \text{ L cos.}^2 \text{ P}\left(d^2 + \frac{2}{3}d^4 + \frac{d6}{9}\right)$$

substituant et négligeant les termes qui donneraient des puissances de d supérieures à la troisième

$$z + \frac{z^3}{3} = \frac{\text{sin. P}}{\text{cos. L}}\left(d + \frac{d^3}{3}\right)\left\{1 + d \text{ tang. L cos. P} + d^2 \text{ tang.}^2 \text{ L cos.}^2 \text{ P}\right\}$$

$$= \frac{\text{sin. P}}{\text{cos. L}}\left\{d + d^2 \text{ tang. L tang. P} + d^3\left(\text{tang.}^2 \text{ L cos.}^2 \text{ P} + \frac{1}{3}\right)\right\}$$

En opérant par approximations successives, on aura d'abord par la suppression des troisièmes puissances

$$Z = \frac{\sin. P}{\cos. L}\left(d + d^2 \text{tang.} L \cos. P\right)$$

La substitution de cette valeur dans le terme en d^3 reviendra à celle de $Z = d\,\frac{\sin. P}{\cos. L}$ puisque nous ne gardons que les troisièmes puissances, elle donnera

$$Z + \frac{\sin.^3 P}{\cos.^3 L}\,\frac{d^3}{3} = \frac{\sin. P}{\cos. L}\left\{d + d^2 \text{tang.} L \cos. P + d^3\left(\text{tang.}^2 L \cos.^2 P + \frac{1}{3}\right)\right\}$$

$$Z = \frac{\sin. P}{\cos. L}\left\{d + d^2 \text{tang.} L \cos. P + d^3\left(\text{tang.}^2 L \cos.^2 P + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\,\frac{\sin.^2 P}{\cos.^2 L}\right)\right\}$$

La parenthèse intérieure peut se transformer comme il suit,

$$\frac{d^3}{3}\left(3 \text{tang.}^2 L \cos.^2 P + 1 - (1 - \cos.^2 P) \sec.^2 L\right)$$

$$= \frac{d^3}{3}\left(3 \text{tang.}^2 L \cos.^2 P + 1 - \sec.^2 L + \cos.^2 P\,(1 + \text{tang.}^2 L)\right)$$

$$= \frac{d^3}{3}\left(\cos.^2 P\,(1 + 4 \text{tang.}^2 L) - \text{tang.}^2 L\right)$$

et sa substitution donne l'équation finale fournissant l'azimut de l'étoile polaire répondant à l'angle horaire P,

$$Z = \frac{\sin. P}{\cos. L}\left\{d + d^2 \text{tang.} L \cos. P + \frac{d^3}{3}\left(\cos.^2 P\,(1 + 4 \text{tang.}^2 L) - \text{tang.}^2 L\right)\right\}$$

La résolution de cette équation est certes plus compliquée que celle des analogies de Néper, mais elle permet un usage exact des répétitions.

Répétitions.—Réduction à l'époque moyenne.—On mesure directement sur le terrain, avec le théodolite, et un certain nombre de fois, l'angle α', α''..... compris entre le signal et l'étoile polaire; chaque observation répond à une position différente de celle-ci, position précisée par l'heure correspondante. L'angle moyen à l'horizon, α, est le résultat de la division de la lecture finale par le nombre des répétitions. Cet angle moyen ajouté ou retranché de l'azimut moyen de l'étoile donnerait l'azimut du signal par suite de la forme de la relation qui lie les quantités de cette nature,

$$\alpha' + Z' = \alpha'' + Z'' = \alpha''' + Z'''..... = \text{azimut du signal.}$$

Supposons les observations faites à des heures sidérales t', t'' t'''..... conséquences des heures lues sur la pendule et du tableau de l'état de celle-ci; soit T leur moyenne $= \frac{t'+t''+t'''.....}{n}$, et P l'angle horaire correspondant à cette époque, angle qui, par suite de la régularité du mouvement diurne, sera également l'angle horaire moyen. Il sera évidemment donné par

$$P = 15\ (T - Æ)$$

l'ascension droite Æ étant prise simplement pour la date, par suite de l'extrême petitesse de ses variations, et pouvant être alors regardée comme constante pendant toute la durée des opérations.

Si P', P'', P'''..... sont les angles horaires réellement existants aux temps t', t'', t'''....., nous pourrons les lier tous à l'angle horaire moyen, par leurs différences à celui-ci, en posant,

$$P' = P + p', \quad P'' = P + p''..... \quad \text{d'où} \quad p' + p'' + p'''..... = o$$

et ces différences seront toutes données par des relations de la forme générique,

$$P + p = 15\,(t - Æ) \quad \text{ou} \quad p = 15\,(t - T).$$

L'azimut moyen de l'étoile, qui ne correspond pas à l'angle horaire moyen, est l'inconnu de la question. Relions-le aux azimuts réellement existants, aux époques t', t'', t'''..... par les relations

$$Z' = Z + z', \quad Z'' = Z + z''..... \quad \text{d'où} \quad z' + z'' + z'''..... = o$$

La formule que nous avons trouvée et qui donne une relation entre un azimut de l'étoile polaire et l'angle horaire correspondant, sera pour un de ces couples,

$$Z + z' = \frac{\sin.\,(P + p')}{\cos.\,L}$$

$$\times \left\{ d + d^2 \operatorname{tang.} L \cos.\,P + \frac{d^3}{3} \left(\cos.^2 P\,(1 + 4 \operatorname{tang.}^2 L) - \operatorname{tang.}^2 L \right) \right\}$$

en négligeant l'influence de la variation horaire p sur P, dans la parenthèse, par suite de la petitesse de cette variation et de celle des facteurs d^2 et d^3. Désignons cette parenthèse ainsi devenue constante avec l'angle horaire moyen que nous avons appris à calculer, par M; nous pourrons transformer le facteur extérieur, de la manière suivante,

$$Z + z' = \text{sec. L} \left(\text{sin. P} \left(1 - \frac{p'^2}{2}\right) + p' \text{cos. P} \right) \times M$$

$$= \left\{ \text{sec. L sin. P} + \text{sec. L cos. P}. p' - \text{sec. L sin. P} \frac{p'^2}{2} \right\} \times M$$

En ajoutant toutes les équations analogues, et réduisant par suite de l'existence des moyennes Z et P qui ont donné

$$z' + z'' + z''' \ldots\ldots = o, \quad p' + p'' + p''' \ldots\ldots = o$$

on aura en divisant par le nombre n des répétitions,

$$Z = \text{sec. L sin. P} \times M - \text{sec. L. sin. P} \times M \times \Sigma \frac{p^2}{2n}$$

Si on remarque que le premier terme seul de la parenthèse M, multiplié par $\Sigma \frac{p^2}{2n}$ peut avoir de l'influence sur le second terme de la formule qui représente la correction due aux répétitions, et qu'on appelle *réduction à l'époque moyenne*, on aura après réduction en secondes

$$Z = \text{sec. L sin. P} \left\{ d + d^2 \text{ tang. L cos. P sin. } 1'' + \frac{d^3}{3} \text{ sin.}^2 1'' \right.$$
$$\left. \times \left(\text{cos.}^2 \text{P} (1 + 4 \text{ tang.}^2 \text{L}) - \text{tang.}^2 \text{L}\right) \right\} - d \text{ sec. L sin. P } \Sigma \frac{p^2}{2n} \text{ sin.}^2 1''$$

La formule primitive pour laquelle on a employé les développements en séries, donnait en effet Z en rapport, et elle exigeait l'expression de d et p faite de la même manière ; si d et p deviennent, ainsi que cela se présente naturellement, les indications des mêmes angles par les nombres de secondes qu'ils renferment, il faut multiplier celles-ci par sin. 1″, pour chaque puissance, et on aura toujours Z en rapport ; comme pour l'avoir en secondes, il faut diviser son expression par sin. 1″, le résultat sera ainsi finalement obtenu tel qu'il est écrit plus haut, par la substitution de

$$d, \; d^2 \text{ sin. } 1'', \; d^3 \text{ sin.}^2 1'', \; p^2 \text{ sin. } 1'' \quad \text{à} \quad d, \; d^2, \; d^3, \; p^2.$$

Le premier terme de la formule n'exige qu'un seul calcul effectué par suite de la connaissance de d et $P = 15 \, (T - Ɍ)$, T étant la moyenne des indications de la pendule, Ɍ l'ascension droite et d la distance polaire de l'étoile, prise pour le jour de l'observation. Le premier facteur du second terme est également unique, mais le second $\Sigma \frac{p^2}{2n}$ sin. 1″ exige autant de cal-

culs distincts de p^2 qu'il y a d'observations faites et d'heures obtenues, calculs faits par l'emploi de l'expression générique, $p = 15\,(t - T)$.

Enfin, il ne reste plus qu'à combiner, ainsi qu'il a été dit, l'azimut de l'étoile polaire ainsi obtenu, avec l'angle horizontal moyen compris entre celle-ci et l'astre, pour avoir l'azimut géodésique du signal.

Pour la raison qui a été expliquée au paragraphe précédent, le moment le plus favorable pour les opérations est celui qui répond aux élongations extrêmes.

La formule que nous avons trouvée s'écrit souvent sous la forme

$$Z = d \sin. P \sec. L + d^2\gamma \sin. P \cos. P + D^3\, \delta \sin. P \cos.^2 P - d^3\, \varepsilon \sin. P$$
$$- d. \sin. P \sec. L \sin. 1''\, \Sigma \frac{2 \sin.^2 \frac{1}{2} p}{n \sin. 1''}$$

dans laquelle

$$\gamma = \frac{\text{tang. } L}{\cos. L} \sin. 1'', \quad \delta = \frac{1 + 4 \text{ tang.}^2 L}{\cos. L} \frac{\sin.^2 1''}{3} \quad \varepsilon = \frac{\text{tang.}^2 L}{\cos. L} \frac{\sin.^2 1''}{3}$$

sont trouvés au moyen de tables contenues dans la *Géodésie* de Puissant et dans le 5e volume du *Mémorial du Dépôt de la guerre*.

144. Élongation d'une étoile.—En observant l'angle compris entre le signal et une étoile quelconque, la polaire par exemple, à son excursion extrême, on peut, sans le secours d'une pendule, en conclure l'azimut du signal.

Si on observait les angles relatifs aux deux élongations extrêmes, avec un théodolite, la moyenne donnerait l'angle cherché, ce qui rentrerait dans le cas de la détermination du méridien.

Dans le cas d'une seule observation, il suffit d'ajouter à la connaissance de cet angle, celui de l'azimut astronomique de l'astre, qui est donné (§ 138), par

$$\sin. Z = \frac{\cos. D}{\cos. L}$$

Vers l'élongation, le mouvement azimutal est très-peu sensible, surtout pour l'étoile polaire, en sorte qu'on peut faire des répétitions sur l'angle du signal et de l'étoile sensiblement constant.

Si les observations ont été faites au cercle répétiteur, ce qui

serait moins commode, il faut réduire l'angle observé comme il a été dit, § 142, par le secours de la distance zénithale du signal obtenue immédiatement avant ou après l'observation pour répondre au même état atmosphérique que l'angle, et de celle de l'astre qui, au lieu d'être observée, devrait être fournie généralement par l'équation

$$\sin. \delta = \frac{\sin. P \cos. D}{\sin. Z}$$

qui exigerait le règlement préalable de la pendule dont nous avons dit qu'on pouvait se passer. On peut, par suite de l'existence de l'élongation extrême, résoudre différemment le triangle pôle, zénith, étoile qui est rectangle à ce dernir sommet, en employant la formule

$$\cos. P = \cot. L \cot. D$$

qui fera connaître l'angle horaire P qui, mis dans $\sin. \delta = \frac{\sin. P}{\cos. L}$ donnera la vraie distance zénithale de l'étoile ; celle qui devra entrer dans la formule de réduction à l'horizon, sera par conséquent connue puisqu'il suffira d'introduire l'erreur de réfraction dans la première.

On pourrait du reste connaître la valeur de δ sans la détermination préalable de l'angle horaire, par le moyen de la formule $\cos. \delta = \frac{\sin. L}{\sin. D}$.

Ce procédé, rarement employé quoique beaucoup plus simple que les précédents, a le mérite d'être indépendant des erreurs de la pendule, et il indique comment sans observations directes, on peut régler celle-ci par suite de la seule détermination de la latitude. En effet, la formule $\cos. P = \cot. L. \cot. D$ n'exige que la connaissance de L et D ; seulement pour l'emploi de cette formule, il faut que les erreurs inévitables commises sur ces quantités n'aient qu'une faible influence sur le résultat, ce qui exige que ces angles soient grands : son usage ne serait donc favorable qu'aux hautes latitudes et surtout qu'autant qu'on emploierait des étoiles, telles que la polaire, dont les déclinaisons seraient grandes.

CHAPITRE VI

DÉFORMATIONS PARTIELLES DU SPHÉROIDE TERRESTRE

145. Nous avons vu (chap. V et VII, liv. II), que la figure de la terre influait grandement sur la transformation du canevas géodésique en coordonnées géographiques et que par suite, l'irrégularité probable de cette figure terrestre entachait d'erreur les latitudes et longitudes calculées géodésiquement. Le présent chapitre, qui n'expose pas une théorie d'un usage habituel en géodésie, a pour but l'indication d'un procédé autre que celui de déterminations astronomiques directes de latitudes et longitudes, permettant de reconnaître l'importance des erreurs commises dans la transformation qui s'appuie sur une forme ellipsoïdale hypothétique. Il étudie aussi cette importance, en la niánt, toutefois, au point de vue de l'exécution graphique d'une carte, et enfin, il donne le moyen de trouver les déformations partielles estimées par rapport à l'ensemble de la surface environnante.

146. Considérations générales. — La précession des équinoxes et les perturbations lunaires ont appris que, si la terre est un ellipsoïde de révolution, l'ellipse qui l'engendre doit avoir un aplatissement égal à $\frac{1}{305}$. Mais on n'a ainsi déterminé qu'un équivalent des ménisques qui engendrent ces perturbations, sans pouvoir certifier que la forme de ces ménisques est celle qui répond à la figure terrestre supposée.

Les considérations purement théoriques développées d'abord par Newton, puis perfectionnées par ses successeurs, considérations basées sur la combinaison de la pesanteur et de la force centrifuge agissant sur une masse fluide, ont précisé l'ellipsoïde de révolution comme étant la figure qu'a dû prendre le sphéroïde terrestre.

Si ces deux méthodes étaient rigoureusement exactes, le problème serait complétement résolu par leur combinaison.

Mais en est-il ainsi de la seconde de ces méthodes qui raisonne sur la masse fluide terrestre, en lui supposant une densité croissant régulière-

ment de la surface au centre, comme cela aurait lieu, du reste, pour un liquide permanent? En admettant cette fluidité probable de la terre, on est obligé de convenir qu'elle se rapporte à un état de formation provenant d'un refroidissement qui devait, à chaque instant, changer les densités relatives des liquides passant à l'état solide, et qui, de plus, devait amener la condensation de nouvelles vapeurs répandues dans l'espace, condensation qui s'effectuait d'une manière hétérogène sur les différentes parties déjà solidifiées.

La forme ellipsoïdale ne s'applique donc probablement pas à la masse terrestre composée, à la surface, d'éléments si complexes.

C'est en effet ce que prouvent les mesures géodésiques d'arcs de méridiens et de parallèles. Les différentes combinaisons de ces mesures appliquées à l'hypothèse de l'ellipsoïde de révolution, conduisent à des formes différentes pour l'ellipse génératrice, tandis que si l'uniformité des méridiens existait, elles devraient toutes fournir le même résultat, après avoir fait la part des erreurs d'observation.

La combinaison de toutes les mesures géodésiques effectuées jusqu'à ce jour, et offrant de sérieuses garanties d'exactitude, a donné un aplatissement probable de $\frac{1}{300}$. Mais que faut-il conclure de ce résultat? Rien de plus que ce qui suit. Cet aplatissement de $\frac{1}{300}$ est probable *si la forme ellipsoïdale existe*, et si les dissemblances des résultats provenant des mesures géodésiques prises deux à deux, ne doivent leur existence qu'à *l'inexactitude des mesures effectuées.*

Les résultats ainsi obtenus ne sont donc qu'une conséquence de l'hypothèse même de l'ellipticité uniforme du méridien, et elles donnent seulement la forme la plus probable de ce méridien hypothétique, non pour la figure terrestre tout entière, mais seulement pour les portions de cette figure qui ont été sillonnées par les mesures employées.

En supposant qu'on augmente encore indéfiniment ces mesures et qu'on les combine toutes de nouveau, à quoi peut-on prétendre arriver? Évidemment à cette forme hypothétique $\left(\frac{1}{305}\right)$ fournie par l'astronomie, forme qui satisfait l'explication de phénomènes bien plus généraux que ceux qui sont représentés par quelques mesures restreintes d'arcs géodésiques.

Pourquoi donc toujours effectuer ces mesures quand la conséquence des longs travaux qu'elles exigent, peut être prévue à l'avance? Ne sont-elles pas déjà assez nombreuses pour que l'aplatissement astronomique $\frac{1}{305}$ soit vérifié par les résultats géodésiques obtenus, résultats qui gravitent autour de ce nombre et qui ne parviendront jamais à exprimer aussi bien que lui, la généralité de la surface terrestre supposée représentée par un ellipsoïde de révolution.

Ce qui précède s'applique à la forme générale seulement. S'il s'agit

au contraire de préciser une forme locale, les mesures géodésiques ont de l'importance, et c'est la combinaison des mesures effectuées dans le même pays qu'il y aurait lieu d'employer; mais comment les appliquer ?

Pour l'ensemble du sphéroïde, la figure de l'ellipsoïde de révolution, sans être rigoureusement exacte, exprime assez bien la forme terrestre, parce que l'action de l'immense noyau liquide domine de beaucoup l'action de la croûte solide à laquelle seule on doit attribuer la déformation de l'ellipsoïde. Mais pour les formes locales il n'en est plus de même, et à quelle hypothèse faut-il rapporter les mesures géodésiques, si elles doivent appartenir à une surface complétement irrégulière ? A moins de les multiplier beaucoup, dans le même pays, pour tâcher d'en conclure une forme géométrique quelconque sur laquelle elles s'adapteraient assez bien, et d'admettre ensuite que les portions non mesurées sont assez rapprochées des premières pour que cette forme leur convienne également, on ne voit pas à quoi peuvent servir quelques mesures isolées.

La présente note a pour but de parer à cette difficulté en indiquant un moyen de trouver en chaque point géodésique important la correction qu'il faut faire subir à la forme de l'ellipsoïde général pour rentrer dans la réalité.

Avant de traiter ce sujet, il est bon de dire encore quelques mots de la forme générale qui rendrait ce travail inutile, si elle existait sous une figure géométrique régulière.

Les discordances des résultats géodésiques appliqués à l'ellipsoïde de révolution, ont prouvé que celui-ci n'existe pas rigoureusement. On a essayé alors, dans ces derniers temps, de faire concorder ces mesures avec la forme d'un ellipsoïde à trois axes.

En se servant d'éléments de calcul qu'on met plus ou moins en suspicion, qu'on rejette ou qu'on conserve à sa guise, on peut arriver à tout. Mais est-il logique de diriger ses efforts vers un tel but ? le simple bon sens ne doit-il pas dominer le calcul, quand les éléments de ce calcul ne peuvent être qu'incomplets et plus ou moins erronés ?

A propos de quoi, en effet, songer à un ellipsoïde à trois axes ? l'idée théorique basée sur la combinaison de la force centrifique et de la pesanteur est satisfaisante ; les modifications partielles apportées par l'irrégularité des solidifications successives arrivées à la surface, et par de nouvelles condensations de gaz plus permanents que les premiers condensés, se conçoivent aisément. L'esprit reste frappé de ces deux faits : « *forme ellipsoïdale du noyau liquide* », « *irrégularités partielles de cette forme dues à l'enveloppe solide.* »

Comment faire intervenir l'ellipsoïde à trois axes ? Pourquoi cette forme plutôt qu'une autre ? Comment concevoir un corps régulier provenant des causes irrégulières qui ont pu modifier la figure primitive de la masse liquide ?

En résumé, il semble logique d'admettre que la forme générale est bien celle d'un ellipsoïde de révolution, que cet ellipsoïde est celui que

fournit l'astronomie, et que de simples irrégularités locales dues à des différences de densités, apportent quelques modifications à cette forme générale.

Malheureusement, ces irrégularités locales entachent d'erreur les résultats géodésiques, en tant du moins qu'on traduit ceux-ci en latitudes et longitudes, ce qu'il est indispensable de faire.

Des discordances assez sensibles existent souvent entre les coordonnées géographiques fournies par la géodésie et celles qui proviennent d'observations astronomiques directes. Faut-il en conclure que les opérations géodésiques sont mauvaises?

D'abord est-on certain de l'exactitude des observations astronomiques effectuées dans un temps nécessairement restreint, avec des instruments de petite dimension? Cette cause n'expliquerait pas complétement les dissemblances remarquées, qui ont une autre explication qui laisse intacte la régularité des deux sortes d'opération.

La transformation du canevas géodésique en coordonnées géographiques exige en effet la connaissance de la surface sur laquelle est placé ce canevas. Cette surface, connue dans son ensemble, est presque inconnue dans ses détails. On est porté à croire, par exemple, que pour une partie de la France, la forme aplatie vers le pôle devrait être remplacée par la forme opposée donnant un aplatissement vers l'équateur.

Le calcul basé sur l'hypothèse de l'existence de l'ellipoïde de révolution s'appliquant à tous les lieux de la terre, ne peut donc conduire qu'à des résultats erronés, quoique partant d'un canevas géodésique exact. Ainsi, comme exemple, soient donnés les éléments suivants :

Un premier point de latitude $54^g,2840'',8$.
Un côté géodésique de 27010^m.
Formant avec le méridien du premier point un azimut de $304^g,2423$.

En supposant la surface terrestre représentée uniformément par l'ellipsoïde de révolution (adopté pour l'exécution de la carte de France), dont les éléments sont,

$$\text{Aplatissement} = \frac{1}{309}, \qquad \text{rayon de l'équateur} = 6376937^m$$

on arrive à trouver pour les deux points comparés, des différences

en latitude, de $-186'',7.....$, en longitude $-4081''5$

Si, par hasard, au lieu où se trouvent situés les deux points étudiés, la figure terrestre se trouvait une sphère de rayon 6370000^m environ, moyen entre les rayons polaire et équatorial de l'ellipsoïde adopté, figure très-possible, on trouverait des différences,

en latitude $-184'',5.....$, en longitude $-4093''$.

Les résultats comparés donnent des erreurs

en latitude $-2'',2.....$, en longitude $-11'',5$.

Si on fait des calculs analogues pour un coté dirigé dans un sens se rapprochant du méridien, dans les circonstances suivantes :

Latitude connue = 54g,2840″, 8.
Côté géodésique, 11448m.
Azimut au méridien connu, 235g,3979″.

Les résultats sont d'une part,

en latitude — 3515″...... longitude — 3315″,4

et de l'autre,

— 3513″,5...... — 3325″

avec des erreurs de

1″,5 en latitude, et 9″,6 en longitude.

On voit par ce qui précède que les erreurs provenant d'une fausse appréciation de la figure terrestre locale sont considérables. Que serait-ce donc si la forme arbitraire mais possible qui, dans les calculs précédents, a été substituée à l'ellipsoïde adopté, se prolongeait pendant l'étendue de plusieurs côtés successifs? Que serait-ce, à plus forte raison, si les surfaces réelles n'avaient pas leurs centres sur la ligne des pôles? Les erreurs, toujours dans le même sens, s'ajouteraient les unes aux autres, les compensations ne pouvant se présenter que si la déformation supposée à l'ellipsoïde cédait la place à une déformation en sens inverse.

Les dissemblances trouvées entre les coordonnées géographiques fournies par la géodésie et celles qui proviennent d'observations astronomiques directes n'infirment donc en rien l'exactitude du canevas géodésique, exactitude qui ne peut être contrôlée que par des bases de vérification. Ce contrôle une fois effectué, ces dissemblances donnent un démenti formel à la figure prêtée arbitrairement à la surface locale du lieu de l'opération.

Il ne sera donc possible de traduire exactement en coordonnées géographiques tout un canevas géodésique, même exact, que lorsqu'on saura sur quelle surface particulière chaque côté doit être placé. Tant qu'il n'en sera pas ainsi, ce qu'il y aura de mieux à faire sera de déterminer astronomiquement un grand nombre des latitudes et longitudes, et de calculer géodésiquement seulement celles des points intermédiaires.

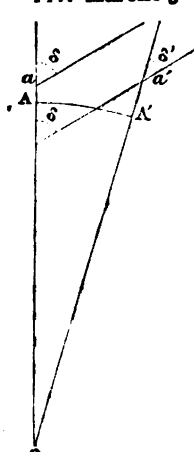
On a proposé pour éviter ce grand nombre d'observations astronomiques, de déterminer la déviation que subit le fil à plomb répondant à la forme ellipsoïdale, en vertu des attractions locales. Cette déviation connue permettrait de passer des éléments géographiques calculés géodésiquement à ceux qui existent en réalité. Mais cette méthode, qui exige un levé et un nivellement préalables, est-elle réellement applicable? N'a-t-elle pas de plus un défaut d'exactitude très-apparent? Elle ne peut en effet tenir compte que des volumes du relief environnant, volumes auxquels il faut prêter une densité uniforme. A quelle distance supposera-t-on que peut s'étendre l'action attractive perturbatrice? Où

apparaîtra l'influence des augmentations de densités et des cavités qui peuvent se trouver dans l'enveloppe terrestre? Si cette méthode était exacte, c'est-à-dire si les déviations de la verticale provenaient seulement du relief environnant, on devrait trouver les plus grandes anomalies en comparant les observations faites des deux côtés d'une grande chaîne de montagnes. En est-il ainsi?

La méthode qui va être exposée pourra, peut-être, aider d'une manière efficace à trouver en un lieu quelconque, pour un côté géodésique de longueur connue, la correction qu'il y a lieu de faire subir à la forme adoptée préalablement.

Que fera-t-on ensuite de cette correction? Devra-t-on la faire subir aux coordonnées géodésiques destinées à l'exécution d'un canevas graphique? Non, et cela ressortira des raisonnements exposés à la fin de ce chapitre. Les résultats obtenus ne seront utiles que pour atteindre le but scientifique de la détermination de la figure de la terre, et *peut-être*, plus tard, pourraient-ils servir à faire connaître quelques accidents intérieurs de la couche terrestre.

147. Marche générale des observations. — Soient A et A' deux points du canevas géodésique, séparés par un côté connu K = AA' de moyenne grandeur, c'est-à-dire assez grand pour que les observations à faire en A et A' diffèrent suffisamment, et assez petit pour que les verticales aillent se rencontrer et pour que l'arc AA' puisse être assimilé à celui de son cercle osculateur.



Ce côté est supposé connu comme faisant partie d'un réseau géodésique dont le calcul a pu se faire exactement sans la connaissance de la figure terrestre.

Pour traduire en différences de latitude et de longitude ce côté géodésique, accompagné des autres éléments nécessaires, il faut encore connaître la sphère qui convient le mieux à la représentation de la petite partie terrestre étudiée, c'est-à-dire le rayon de cette sphère. On y arrivera simplement par la formule $R = \frac{K}{0}$ si on peut mesurer l'angle formé par les deux verticales. Celui-ci ne peut pas être pris directement. Mais si l'on fait deux stations en a et a' sur les verticales de A et A', et qu'on y observe les distances zénithales d'une même ligne ou de deux lignes parallèles situées dans le vertical AA', on aura

$$\delta - \delta' = 0, \quad \text{ou} \quad \delta + \delta' = 0$$

Le second cas, qui répondrait à l'observation de distances zénithales

dirigées en sens inverse et toutes deux plus petites que l'angle au centre, ne peut servir à rien, comme cela ressortira plus tard ; mais on peut toujours se servir du cas beaucoup plus général $\delta - \delta' = 0$.

La nature n'offre-t-elle pas une infinité de ces lignes parallèles dont on peut mesurer les distances zénithales aux deux points extrêmes du côté géodésique ? Tous les rayons visuels menés au *même instant*, à une étoile quelconque, sont dans ce cas. Pour le problème à résoudre, il n'y a donc qu'à viser *simultanément*, des deux stations, une étoile quelconque, lorsqu'elle passe *dans le vertical des deux points*.

Chaque observation double (corrigée comme il sera indiqué plus loin) donnera naissance à une équation qui, en exprimant $\delta - \delta'$ en secondes, pourra s'écrire, $R = \frac{K}{(\delta - \delta') \sin. 1''}$ équation de laquelle on pourra tirer la valeur du rayon. Des observations analogues faites, autour du point A, dans différents verticaux dirigés dans le sens d'autres côtés géodésiques, feront connaître les rayons des cercles osculateurs à ces différentes sections, et, par suite, elles donneront une idée de la figure terrestre à l'entour de ce point. Si, de plus, on compare les résultats avec ceux que fournirait l'ellipsoïde de révolution, on pourra connaître les déformations que celui-ci doit subir, pour pouvoir représenter la surface locale étudiée. Malheureusement, tous les azimuts de ces verticaux ne sont pas également convenables pour l'exactitude des observations.

On arriverait évidemment au résultat annoncé si les éléments qui entrent dans la formule pouvaient être connus exactement, ce qui n'arrive jamais dans aucune observation. Il est bon de se demander si les erreurs inévitables commises donneront encore une appréciation suffisamment exacte du rayon de courbure ;

On a $$R = \frac{K}{(\delta - \delta') \sin. 1''}$$

Le côté géodésique K est toujours déterminé assez exactement pour que l'incertitude qui provient de lui soit négligeable. On peut en effet, en géodésie, déterminer les côtés à $\frac{1}{10000}$ ou $\frac{1}{10000}$ de leur longueur. Mais quelle est l'influence d'une erreur commise sur δ et δ', et par suite sur $\delta - \delta'$? Évidemment, d'abord, elle est indépendante de la distance des deux stations, et il y aura avantage à opérer sur de longues bases.

En différentiant l'équation ci-dessus, on a

$$-\frac{dR}{R} = \frac{d(\delta - \delta')}{\delta - \delta'}$$

On peut approximativement, pour cette recherche, prendre $\delta - \delta' = 1'$ centésimale, par kilomètre de côté (ce qui répondrait à une terre sphérique de 10 millions de mètres de longueur du quart du méridien). On aurait donc

$K = 1000^m$ $\frac{dR}{R} = \frac{d(\delta - \delta')}{1'}$, et pour connaître le rayon à $\frac{1}{1000}$ de sa

valeur, il faudrait que $d(\delta - \delta') = \frac{1'}{1000} = 0'',1$

$K = 10000^m$ *id.* $1''$

$K = 10000^m$ *id.* $4''$

Pour que l'erreur commise dans la mesure de $\delta - \delta'$ n'ait pas une trop grande influence, on ne peut donc pas employer des côtés de 1000^m et même de 10000^m. D'autre part, pour pouvoir admettre que les verticales extrêmes sont dans un même plan, et que, de plus, l'arc géodésique peut être assimilé à un arc de cercle, il ne faut pas prendre de trop grands côtés, qu'un réseau géodosique, même de premier ordre, ne fournirait du reste que très-rarement. On peut donc admettre qu'il faudrait utiliser des côtés de 8 à 10 lieues. Mais pour avoir la valeur du rayon de courbure de la section à $\frac{1}{1000}$ de sa valeur, on voit qu'il faudrait, dans l'approximation des distances zénithales, ne pas dépasser 2" d'erreur, puisque les deux stations sont indépendantes l'une de l'autre.

Peut-on prétendre à cette exactitude, et n'y aurait-il pas encore quelque avantage à connaître le rayon de courbure avec une approximation plus faible que le $\frac{1}{1000}$?

Avant d'étudier les causes d'erreur qui peuvent fausser les distances zénithales, et de chercher un aperçu de l'exactitude à laquelle on peut arriver, sans préciser pourtant celle-ci, il est bon d'indiquer la marche des opérations, en s'arrêtant à celle qui s'accorde le mieux avec les conditions qui résulteront de la discussion des causes d'erreur.

Deux observateurs opéreront simultanément aux deux stations. Munis tous les deux d'un cercle répétiteur (ou d'un autre instrument analogue), ils mettront les colonnes verticales et les limbes verticaux avec tout le soin possible. Ils vérifieront également le parallélisme des limbes et des lunettes, parallélisme qui sera utile, mais non indispensable.

On dirigera ensuite les plans des limbes dans le vertical AA', de telle manière que le limbe se trouve à droite pour des visées à faire du côté du sud. Pour cela, on visera A' de la station A et réciproquement. La position ainsi obtenue sera marquée par un arrêt très-vigoureusement serré sur le cercle azimutal, arrêt contre lequel viendra buter un appendice faisant corps avec l'enveloppe extérieure de la colonne. On aura ainsi l'avantage de pouvoir suivre les étoiles dans leur mouvement, l'instant du passage au vertical étant précisé par l'arrêt.

Les lectures des quatre verniers étant faites sur chaque instrument, on visera successivement différentes étoiles (convenues d'avance) ayant des hauteurs moyennes d'environ 50^g à leur passage au vertical.

Au lieu de prendre les distances zénithales, ce qui exigerait un retournement du limbe, et ce qui, par suite, influerait sur l'instantanéité des opérations et sur la fixité du vertical qui ne se retrouverait plus déterminée pour une nouvelle visée d'une autre étoile, on prendra seulement

la hauteur simple de chaque étoile, hauteur qui s'ajoutera, pour la lecture, à celles précédemment obtenues. On aura encore ainsi l'avantage d'éviter l'erreur due à l'usure des centres, si on a soin de faire les lectures aux quatre verniers, ou au moins à deux d'entre eux diamétralement opposés.

Il faudra, pour opérer ainsi, que la lunette soit munie d'un niveau à bulle, qui donnera naissance à une erreur de collimation due à l'existence d'un angle formé par l'axe optique de la lunette et par la tangente au milieu de la bulle, quand elle est dans ses repères.

Cette collimation se détruira d'elle-même, au résultat, par une combinaison convenable des opérations ; cependant il sera bon de la connaître, pour parer au cas où cette combinaison convenable n'aurait pas été entièrement exécutée. On la trouvera, comme cela se fait dans l'usage habituel du théodolite ou du cercle répétiteur, par la combinaison des deux manières d'obtenir les hauteurs, c'est-à-dire avec ou sans retournement du limbe. Cette opération, faite de jour sur un pointé terrestre, serait entachée de l'erreur due à l'usure des centres, si les distances zénithales obtenues par le retournement du limbe étaient répétées. On fera mieux de les réitérer et de prendre la moyenne des lectures faites sur tous les verniers pour la comparer à la lecture moyenne des opérations faites sans retournement, c'est-à-dire entachées de la collimation.

Cette méthode exige l'adjonction d'un second niveau à bulle d'air armé d'un mouvement particulier indépendant de la lunette, comme celui qui existe, du reste, sur la lunette inférieure du cercle répétiteur.

La recherche ainsi faite de l'erreur de collimation ne sera jamais complétement exacte, d'abord, parce qu'on n'obtient jamais de tels résultats en quoi que ce soit, mais encore en vertu d'une cause perturbatrice. Les visées devront se faire dans la journée, sur un pointé terrestre bien déterminé ; elles exigeront un certain laps de temps pendant lequel il se présentera des variations de réfraction qui entacheront d'une légère erreur l'assimilation faite des résultats obtenus par les deux méthodes, l'une indépendante et l'autre dépendante de la collimation.

Du reste, peu importera, puisque, comme il a déjà été dit, on peut, au résultat final, annuler l'influence de cette collimation.

Les hauteurs des passages étant observées dans la portion du vertical dirigé vers le sud, on observera la nuit suivante les nouveaux passages des mêmes étoiles, mais, en plaçant le limbe à gauche et déterminant d'abord sa direction, comme la veille, par une visée faite sur le signal opposé, soit de nuit, au moyen d'un réverbère, soit de jour, ce qui sera préférable pour éviter les réfractions latérales qui fausseraient la direction de ce vertical.

Cette seconde série d'observations présente une difficulté tenant à ce que le niveau se trouve retourné ; mais cette difficulté (qui n'existerait pas si on observait, au lieu des mêmes étoiles sud, d'autres étoiles nord, à peu près symétriques aux premières par rapport au zénith, ce qui serait

désavantageux pour l'atténuation des erreurs) peut être levée, en apportant à la construction du niveau bulle une modification qui sera indiquée plus tard.

Soient h, h_1.... h', h_1'..... les hauteurs des étoiles observées aux deux stations, hauteurs qui auront peu varié pendant l'intervalle qui séparera les deux séries d'observations, ce qui est, du reste, indifférent pour la question actuelle. Les lectures des premières séries d'observations (limbe à droite) donneront, en désignant par n le nombre d'opérations, et par l les lectures finales.

$$l_d = h + h_1 \ldots, \qquad l'_d = h' + h'_1 \text{ angle des normales. } O = \frac{l_d - l'_d}{n}$$

Celles des secondes séries seront, p désignant un nombre entier quelconque.

$$l_g = p.\,400^g - h - h_1 \ldots\ldots \qquad l'_g = p.\,400^g - h' - h'_1 \ldots\ldots$$

$$\text{ou} \quad (h + h_1 \ldots\ldots) = p.\,400^g - l_g \qquad \text{et} \qquad (h' + h'_1 \ldots\ldots) = p.\,400^g - l'_g$$

Par suite $\quad n.O = -(h' + h'_1 \ldots\ldots) + (h + h_1 \ldots\ldots) = -l_g + l'_g.$

On prendra, pour valeur finale de l'angle au centre,

$$O = \frac{l_d - l'_d + l'_g - l_g}{2.n}$$

Il faudra recueillir chaque jour les lectures finales ; mais il sera en même temps nécessaire de recueillir celles qui se rapporteront à chaque opération isolée (avec un peu moins de soin, si l'on veut) pour voir si les résultats partiels concorderaient sensiblement avec le résultat final ; ces lectures partielles auront encore l'avantage de permettre d'obvier à l'inobservation d'une des étoiles convenues, à l'une des stations.

Enfin, elles sont encore nécessaires à connaître approximativement pour la réfraction.

148. Causes d'erreur. — Les résultats obtenus par la méthode indiquée ci-dessus ne seront évidemment exacts qu'autant que les distances zénithales ou les hauteurs observées seront exactes elles-mêmes.

Les causes qui engendreront des erreurs sur ces hauteurs sont les suivantes :

1° La réfraction ;

2° La déviation, dans le sens horizontal, du vertical de visée sur le vertical géodésique;

3° La déviation verticale du plan de visée;

4° L'existence d'une erreur de collimation;

5° Les erreurs de pointé, de lecture, du niveau, etc.

Chacune de ces causes va être examinée successivement.

1° *Réfraction.* — Si les verticales étaient parallèles, et si les indications barométriques et thermométriques étaient les mêmes, il est évident que

l'influence de la réfraction serait la même aux deux stations pour chaque couple d'observations relatives à la même étoile, et qu'il n'y aurait pas lieu de la calculer, puisque les distances zénithales d'une même étoile apparaissent, au résultat, sous forme de différence.

Il n'en sera réellement pas ainsi, mais les faibles variations de hauteurs, d'indications barométriques et thermométriques donneront lieu à des corrections très-peu différentes l'une de l'autre, avec des erreurs isolées presque identiques et une erreur finale négligeable.

Simultanéité des opérations. — Les observations d'une même étoile, aux deux stations, doivent être simultanées et répondre au moment du passage au vertical. On peut arriver à ce résultat par deux moyens, l'un de beaucoup préférable à l'autre.

Le premier consisterait dans l'emploi de deux chronomètres réglés sur l'heure d'un même lieu, Paris, par exemple ; il faudrait préalablement déterminer, par le calcul, l'heure de l'une des deux stations répondant au passage au vertical déterminé par son azimut, fourni approximativement par le canevas géodésique au moyen de la formule

$$\text{tang. D cos. L} = \text{sin. L cos. P} + \text{sin. P cot. } z$$

L représentant la latitude de l'un des points d'observations. Combinant la valeur de P réduite en temps, avec la longitude de ce même point, on en conclurait l'heure que devraient marquer les deux chronomètres, pour que les observations fussent simultanées et répondissent, au passage, au vertical.

Mais si on différentie l'équation, $\cos.\delta = \sin.Z \sin.D + \cos.L \cos.D \cos.P$, on trouve, $d\delta = \frac{\cos.\ L \cos.\ D \sin.\ P}{\sin.\ \delta} dP = \sin.\ z \cos.\ L\, dP$, formule qui donnerait l'erreur commise sur la distance zénithale en fonction de celle commise sur P, c'est-à-dire sur l'appréciation de l'instant où les opérations doivent être faites.

Il existe deux causes d'erreurs sur P, l'une provenant du calcul qui a déterminé celui-ci, calcul basé sur l'emploi de la déclinaison, de l'azimut du côté et des latitude et longitude d'une des stations, éléments erronés par le fait même de la question, et l'autre provenant de la différence d'indications des chronomètres supposés identiques et de la difficulté d'apprécier exactement sur ceux-ci le moment précis convenu pour les deux observations.

La première cause donnerait naissance à deux erreurs de distances zénithales de même signe, en sorte que l'élément final du calcul de l'angle au centre $\delta - \delta'$ serait erroné de

$$d(\delta - \delta') = \sin.\ z\ (\cos.\ L - \cos.\ L')\ dP$$

résultat très-faible, par suite du rapprochement des points géodésiques.

Mais si l'on considère la seconde cause d'existence de dP provenant de la non-simultanéité des opérations, on a seulement

$$d\,(\delta - \delta') = \sin.\ z \cos.\ L\ dP$$

dont la valeur devient considérable, même pour une faible erreur commise sur l'appréciation du temps. Par exemple, pour une erreur de 1ˢ de temps, dP devient 15″ sexagéminales ou environ 45″ centésimales, et la valeur de l'angle au centre est grossièrement faussée pour tous systèmes d'opérations faites hors du méridien ou loin du pôle.

Il y donc lieu de rejeter l'emploi des deux chronomètres.

La seule méthode réellement applicable est celle qui consiste à déterminer, aux deux extrémités du côté géodésique, le plan vertical, par des visées directes faites sur les deux points signalés, au moyen d'une lunette dont l'axe optique soit parallèle au plan du limbe mis préalablement vertical, et pivotant autour d'une colonne verticale.

Mais cette manière de déterminer le vertical de visée donne lieu à deux genres d'erreurs qu'il convient de signaler.

2° *Déviation, dans le sens horizontal, du vertical de visée.* — Admettant d'abord la parfaite verticalité du limbe de chaque station, sa direction dépendra de la visée effectuée sur le signal opposé, visée toujours entachée d'une certaine erreur ; d'autre part, l'axe optique de la lunette ne sera jamais rigoureusement parallèle au limbe. Il y aura donc, pour la première cause, une erreur constante d'azimut, et pour la seconde un peu de variabilité dans cette erreur.

Il s'agit d'examiner l'influence de ces sortes de déviations d'azimut et d'indiquer les moyens de la neutraliser en partie.

La formule fondamentale de trigonométrie sphérique, appliquée au triangle pôle, zénith, étoile, donne

$$\sin.\ D = \sin.\ L \cos.\ \delta + \cos.\ L \sin.\ \delta \cos.\ z$$

différentiée par rapport à δ et z, elle fournit

$$d\delta = \frac{\cos.\ L \sin.\ \delta \sin.\ z}{\cos.\ L \cos.\ \delta \cos.\ z - \sin.\ L \sin.\ \delta}\ dz = \frac{\sin.\ z\ dz}{\cot.\ \delta \cos.\ z - \text{tang.}\ L}.$$

L'azimut z est, dans cette formule, compté à partir du nord du méridien, en allant vers l'est ou l'ouest indifféremment.

Si on suppose actuellement que z soit compté alternativement, soit à partir du nord, soit à partir du sud, suivant qu'on fait les observations sur des étoiles placées vers le nord ou vers le sud, par rapport aux observateurs, la formule reste telle pour les visées faites dans le sens nord. Mais si on observe dans le côté sud du vertical, z devient $200 - z$, et dz change de signe, en sorte qu'on a, pour ce cas, l'expression plus avantageuse, dans laquelle les facteurs sont tous positifs,

$$d\delta = \frac{\sin.\ z\ d\ z}{\cot.\ \delta \cos.\ z + \text{tang.}\ L}$$

Les observations seront d'autant plus exactes qu'elles seront faites

près du méridien et près du zénith, et toutes circonstances égales d'ailleurs, les observations sud seront préférables à celles qui seraient faites en regardant vers le nord.

Il a été dit qu'après avoir visé des étoiles une première nuit, on les visera de nouveau le lendemain. Cela a pour but de chercher à compenser certaines erreurs. Mais ces doubles opérations peuvent se faire de deux manières :

1° En mettant toujours le limbe à droite, et observant une nuit des étoiles au sud du zénith, et le lendemain des étoiles symétriques au nord. Il y aura eu, en opérant ainsi, deux déviations horizontales du plan vertical de visée, en sorte qu'en chaque station, chaque couple d'observations donnera lieu à une erreur sur la valeur simple de l'angle au centre, représentée par

$$\frac{\alpha}{\text{cot. } \delta \text{ cos. } z - \text{tang. L}} - \frac{a}{\text{cot. } \delta \text{ cos. } z + \text{tang. L}} \text{ sin. } z$$

En désignant les deux déviations azimutales de signes quelconques, par a et α, et en supposant que les deux étoiles accouplées sont symétriquement placées dans le vertical.

En admettant que α soit le maximum absolu de la déviation, cette erreur peut prendre une des deux formes :

$$\frac{2\,\alpha \text{ tang. L sin. } z}{\text{cot.}^2 \delta \text{ cos.}^2 z - \text{tang.}^2 \text{L}} \text{ et } \frac{\alpha \text{ cot. } \delta \text{ sin. } 2\,z}{\text{cot.}^2 \delta \text{ cos.}^2 z - \text{tang.}^2 \text{L}} = \frac{2\,\alpha \text{ cot. } \delta \text{ cos. } z \text{ sin. } z}{\text{cot.}^2 \delta \text{ cos.}^2 z - \text{tang.}^2 \text{L}}$$

suivant que les déviations sont de mêmes signes ou de signes contraires.

Pour que le cercle de déclinaison de l'étoile coupe le vertical, il faut que $\text{cot. } \delta \text{ cos.} z > \text{tang L}$, quel que soit δ ; la seconde erreur est donc plus forte que la première.

Les déviations α et a étant les mêmes pour toutes les étoiles observées, toutes les erreurs seront de même sens, et ne varieront qu'en raison des distances zénithales. Les compensations ne pourront se présenter (toutes ou aucune) que dans les résultats obtenus à la station opposée, sans que celles-ci puissent amener des aggravations.

2° On peut doubler les opérations en n'observant que les mêmes étoiles sud, le limbe étant successivement à droite et à gauche, pendant deux nuits différentes.

En chaque station prise isolément, l'erreur commise sur une valeur simple de l'angle au centre, sera

$$\frac{\text{sin. } z. \ (a + \alpha)}{\text{cot. } \delta \text{ cos. } z + \text{tang. L}}$$

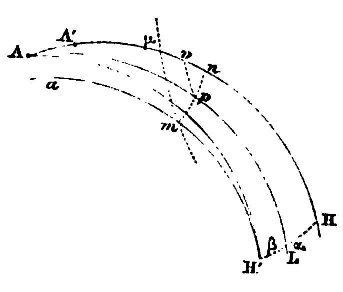
expression qui va de 0 à $\dfrac{2\,\alpha. \text{ sin. } z}{\text{cot. } \delta \text{ cos. } z + \text{tang. L}}$

Ce second système est évidemment plus avantageux que le premier.

L'expression de l'erreur trouvée ci-dessus est incomplète si l'axe op-

tique de la lunette n'est pas *parallèle au plan du limbe*, car alors celui-ci décrit un cône au lieu de décrire le plan supposé incliné sur le vertical choisi de la déviation α.

L'intersection de ce cône avec la voûte céleste sera un arc de petit cercle parallèle à celui de grand cercle dû à la section par le limbe, et distant de celui-ci d'un arc mesurant l'angle β, formé par l'axe optique avec ce limbe.



Soient AA'H le vertical des deux stations; AH' la ligne de visée horizontale (due à l'imperfection de la visée du point géodésique opposé);

α, la déviation horizontale du limbe, mesurée par l'arc HH' à l'horizon;

β, l'angle de l'axe optique et du limbe supposé vertical, ainsi que la colonne.

La lunette, dans son mouvement, décrira le petit cercle H'α parallèle au limbe AL, et distant de lui d'un arc constant = H'L mesurant β. Lorsqu'une étoile observée passera à la croisée des fils en m, elle ne sera pas dans le vertical AA', et sa distance zénithale sera Am, tandis que, décrivant le cercle de déclinaison $m\,\mu$, elle aurait dû être observée en μ, avec une distance A μ. L'erreur $d'\delta = Am - A\mu = An - A\mu$, si $m\,p\,n$ est un arc de grand cercle perpendiculaire au limbe et sensiblement au vertical AA', vu la petitesse des déviations. En effet, la lecture sur le limbe, répondant à l'observation m, sera A p, et celle-ci peut être regardée comme égale à An. Si on mène $p\nu$ parallèle au cercle de déclinaison $\mu\,m$, on peut écrire $d'\delta = An - A\mu = \mu n = \mu\nu + n\nu$, équation dans laquelle $n\nu$ sera le $d\delta$ du calcul précédent, répondant à une déviation d'azimut égale à $\alpha - \beta$.

$$n\nu = \frac{(\alpha - \beta)\,\text{sin.}\,z}{\text{cot.}\,\delta\,\text{cos.}\,z \pm \text{tang.}\,L}$$

Les points μ, ν, n, p, m, sont infiniment rapprochés, par suite de la petitesse des déviations, en sorte qu'on peut regarder la figure qu'ils déterminent sur la sphère céleste comme sensiblement plane, et on peut alors employer la proportion

$$\mu\nu = \frac{n\nu.\,pm}{pn} = d\delta.\,\frac{pm}{pn} = d\delta\,\frac{\beta}{pn}$$

Le triangle nAp, rectangle en p et sensiblement en n donne

$$\text{sin.}\ np = pn = \text{sin.}\,(\alpha - \beta)\ \text{sin.}\ \delta = (\alpha - \beta)\ \text{sin.}\ \delta$$

par suite $\mu\nu = d\delta\,\dfrac{\beta}{(\alpha - \beta)\ \text{sin.}\ \delta}$; substituant $\mu\nu$ et $n\nu$ dans $d'\delta$ on a

$$d'\delta = d\delta \left(1 + \frac{\beta}{(\alpha - \beta)\,\text{sin.}\,\delta}\right)$$

$$= \frac{(\alpha - \beta)\,\text{sin.}\,z}{\text{cot.}\,\delta\,\text{cos.}\,z \pm \text{tang. L}} \left(1 + \frac{\beta}{(\alpha - \beta)\,\text{sin.}\,\delta}\right)$$

$$= \frac{\text{sin.}\,z}{\text{cot.}\,\delta\,\text{cos.}\,z \pm \text{tang. L}} \left(\alpha - \beta + \frac{\beta}{\text{sin.}\,\delta}\right)$$

$$d'\delta = \frac{\alpha\,\text{sin.}\,z}{\text{cot.}\,\delta\,\text{cos.}\,z \pm \text{tang. L}} + \frac{\text{sin.}\,z}{\text{cot.}\,\delta\,\text{cos.}\,z \pm \text{tang.L}}\;\frac{1 - \text{sin.}\,\delta}{\text{sin.}\,\delta}\cdot\beta$$

Le premier terme exprimant la portion de l'erreur qui provient du défaut de visée du point géodésique, et le second, représentant l'influence due au non-parallélisme de la lunette.

Les compensations dues au doublement des opérations ont été examinées pour la première cause ; il y a lieu d'étudier ce qu'elles deviennent en vertu de la seconde, et, pour cette étude, on peut supposer la première nulle, par suite de l'indépendance des deux résultats.

Dans chacune des trois figures ci-jointes, AV représente le quart du vertical formé par les deux points géodésiques. En visant à l'horizon, la lunette prend la même direction (indépendamment de l'erreur de visée déjà examinée) ; le limbe est dirigé suivant AL, faisant avec AV l'angle β de déviation de la lunette sur le limbe.

Une étoile parcourant le cercle de déclinaison $m\,\mu$, au lieu d'être vue en μ, est visée en m quand elle coupe le cône que décrit l'axe optique de la lunette.

En comparant les trois figures (dans lesquelles la flèche d'orientation a par erreur été renversée), on voit que si l'on combine deux opérations sud, le limbe à droite, puis à gauche, les erreurs A μ—A m sont de signes opposés. Le contraire a lieu si les opérations combinées sont S et N, le limbe du même côté. La forme de la fonction qui exprime cette erreur,

$$\frac{\text{sin.}\,z}{\text{cot.}\,\delta\,\text{cos.}\,z \pm \text{tang. L}} \times \frac{1 - \text{sin.}\,\delta}{\text{sin.}\,\delta} \times \beta$$

combinée avec les remarques faites ci-dessus, prouve que si β conserve la même valeur pendant les deux nuits d'observations, c'est-à-dire *si on ne dérange pas l'axe optique par rapport au limbe,* les observations sud combinées donnent deux erreurs égales et de signes contraires, qui se neutralisent au résultat final, puisque dans ce cas les observations s'ajoutent.

Les opérations faites au nord et au sud, le limbe du même côté, con-

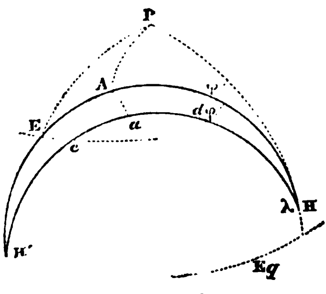
duisent à la même conséquence, parce que les erreurs de même signe appartiennent à deux distances zénithales qui doivent se retrancher.

Il n'y a donc pas lieu de se préoccuper de l'obliquité de la lunette par rapport au limbe, et il ne reste d'erreur due à la déviation de visée du point géodésique qui a servi à déterminer le vertical, que l'expression

$$d\delta = \frac{(\alpha - a) \sin. z}{\cot. \delta \cos. z + \tang. L}$$

se rapportant à deux observations sud, expression dans laquelle α et a sont les deux déviations de signes quelconques.

3° *Déviation verticale du plan de visée.* — En supposant maintenant le plan de visée exactement dirigé dans le sens horizontal, il y a lieu d'examiner l'influence de sa non-verticalité. Soit $d\varphi$ l'angle qu'il forme avec le vertical géodésique; au lieu d'observer les passages d'étoiles au vertical HAH', on les observera dans le plan HaH' ayant le même diamètre horizontal, en e au lieu de E; par suite on obtiendra une distance zénithale ae (différente de AE), si Aa est un arc sensiblement perpendiculaire à HA et Ha.



Il y a évidemment une certaine analogie entre ce cas et celui qui a été précédemment étudié : dans le premier, la verticale restait fixe et l'horizontale était déplacée; dans le second, les rôles sont intervertis. On a utilisé le triangle pôle, zénith, étoile, en supposant une erreur sur l'angle dont le sommet est au zénith; il y a lieu maintenant d'employer le triangle, pôle, horizon, étoile, en prêtant la variation à l'angle dont le sommet est à l'horizon. Les autres éléments de ce triangle seront PE $= 100 - $ D, EH $= 100^g \pm \delta$, PH $= 100 - \lambda$, en désignant par λ la hauteur au-dessus de l'équateur, du point de l'horizon du lieu, situé dans le vertical géodésique, élément analogue à la latitude, mais essentiellement variable avec l'azimut, et qui atteint cette latitude à la limite $z = o$.

Le triangle PEH donne, en désignant par φ l'angle du vertical avec le méridien qui passe par le point H de l'horizon

$$\sin. = - \sin. \lambda \sin. \delta + \cos. \lambda \cos. \delta \cos. \varphi$$

différentiant $d\delta = \dfrac{- \sin. \varphi \, d\varphi}{\tang. \delta \cos. \varphi + \tang. \lambda}$ (1) ou $dh = \dfrac{\sin. \varphi \, d\varphi}{\cot. h \cos. \varphi + \tang. \lambda}$

Le triangle APH, dans lequel AH $= 100^g$, fournit d'autre part

$$\cot. AP. \sin. AH = \cos. AH. \cos. z + \sin. z \cot. \varphi \quad \text{ou} \quad \tang. L = \sin. z. \cot. \varphi \quad (2)$$

Ce même triangle fournit encore $\cos. \lambda = \dfrac{\sin. z \cos. L}{\sin. \varphi}$ (3)

Il y aurait lieu d'éliminer φ et λ entre ces trois équations, mais cette élimination ne conduirait pas à un résultat facilement lisible.

L'équation principale dit que l'erreur commise sur la distance zénithale sera petite (indépendamment de $d\varphi$ qui exprime le déplacement de la verticale) lorsque φ et δ seront l'un petit et l'autre grand, ainsi que pour les observations faites avec λ grand.

L'équation (2) qu'on peut écrire $\cot.\ \varphi = \frac{\text{tang. L}}{\sin.\ z}$ dit que la condition utile φ petit, doit provenir de z petit et L grand, ce qui est d'accord avec les conditions de petitesse relatives au déplacement horizontal

$$d\delta = \frac{\sin.\ z\ dz}{\cot.\ \delta \cos.\ z + \text{tang. L}}$$

Mais δ petit qu'exige ce dernier cas est contredit par la nouvelle condition δ grand. Il ne faut donc pas compter sur δ pour annuler les erreurs, et il y a lieu de s'arrêter pour lui aux opérations faites vers 50^g de hauteur.

Enfin la dernière condition utile, λ grand, mise dans l'équation $\cos.\ \lambda = \frac{\sin.\ \text{L}}{\cos.\ \varphi}$ qui résulte de la combinaison de (2) et (3) fournit φ petit, comme précédemment, ainsi que L petit.

Il ne reste donc pour satisfaire à l'exactitude des opérations, relativement aux deux causes d'erreurs provenant du déplacement du vertical de visée dans les deux sens horizontal et vertical, que les observations ne s'écartant pas trop du méridien. Tout au moins ne faudra-t-il pas opérer sur des verticaux proches du perpendiculaire.

Dans de telles circonstances les équations (1) (2) (3) peuvent s'écrire grossièrement

$$\text{tang. } \varphi = \sin.\ \varphi = \frac{\sin.\ z}{\text{tang. L}}\ \cos.\lambda = \sin.\ \text{L, ou } \lambda = 100^g - \text{L},\ d\delta = \frac{-\sin.\ z\ d\varphi}{1 + \text{tang.L tang.}\delta}$$

équations certainement peu exactes quand on n'opère pas près du méridien, mais qui cependant peuvent donner un aperçu de l'importance des erreurs commises.

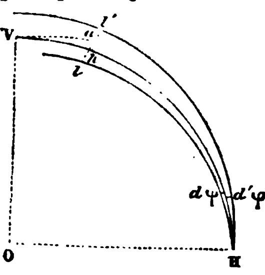
Pour le cas particulier $\delta = 50^g$ (ou pour les hauteurs avoisinantes, approximativement), les deux erreurs combinées donneront une erreur finale sur chaque opération, représentée à peu près par

$$\frac{\sin.\ z\ dz}{1 + \text{tang. L}} + \frac{\sin.\ z.d\varphi}{1 + \text{tang. L}}$$

Pour pouvoir se rendre compte du résultat produit, il est nécessaire d'étudier les causes qui peuvent donner naissance au déplacement vertical du plan vertical de visée.

Ces causes sont 1° la non-verticalité de la colonne ; 2° celle du limbe, et 3° l'obliquité de la lunette sur le limbe.

Soit VOH le plan dans lequel devrait se faire l'observation du passage; il est déterminé par la verticale OV et par la ligne géodésique de visée qu'on peut regarder comme horizontale OH.



Soit Oa l'axe de rotation faisant avec le limbe un angle χ mesuré par l'arc al perpendiculaire au plan du limbe.

Soient enfin $\psi = \mathrm{V}a$ l'écartement angulaire de la colonne sur la verticale, et μ l'angle $a\mathrm{V}h$ qui précise l'inclinaison du vertical qui contient la colonne, sur la verticale géodésique.

Le limbe sera dirigé suivant lOH faisant avec le vertical géodésique l'angle $d\varphi$ dont le sommet est en H, interceptant entre ses côtés l'arc de grand cercle lh perpendiculaire à VH et lH, par suite du peu d'écartement de ceux-ci.

Dans la seconde opération, faite le lendemain, le limbe aura tourné autour de la colonne de 200^g exactement, puisqu'on ne tient pas compte ici des déviations horizontales déjà étudiées, et le point l, projection de la colonne sur le limbe viendra en l' tel que $al = al'$, donnant lieu à une déviation $d\varphi'$ (de signe contraire à celui de $d\varphi$) interceptant entre ses côtés l'arc hl' qu'on peut, ainsi que hl confondre avec un arc de petit cercle dont le pôle serait H. On aura donc

$$d\varphi = \frac{hl}{\cos. \mathrm{V}h} \qquad -d\varphi' = \frac{hl'}{\cos. \mathrm{V}h}$$

Le triangle Vah, très-près d'être rectangle en h, est infiniment petit, et sa résolution peut être assimilée à celle d'un triangle plan. On en tirera

$$\mathrm{V}h = a\mathrm{V}. \cos. \mathrm{V} = \psi \cos. \mu \quad \text{et} \quad ah = a\mathrm{V}. \sin. \mathrm{V} = \psi \sin. \mu$$

d'autre part, $hl = al - ah = \chi - \psi \sin. \mu$ et $hl' = ah + al = \chi + \psi \sin. \mu$.

Par suite, les équations

$$d\varphi = \frac{\chi - \psi \sin. \mu}{\cos. (\psi \cos. \mu)} \quad \text{et} \quad d\varphi' = -\frac{\chi + \psi \sin. \mu}{\cos. (\psi \cos. \mu)}$$

donneront naissance à deux erreurs sur δ,

$$d\delta = \frac{\sin. z}{1 + \text{tang.L tang.}\ \delta} \ \frac{\chi - \psi \sin. \mu}{\cos. (\psi \cos. \mu)}$$

$$\text{et} \quad d\delta = \frac{\sin. z}{1 + \text{tang. L tang.}\ \delta} \ \frac{-(\chi + \psi \sin. \mu)}{\cos. (\psi \cos. \mu)}$$

Si on combine comme il a été dit les observations faites sur les mêmes étoiles, pendant le cours de deux nuits différentes, le limbe sera successivement à droite et à gauche, les résultats d'une même station devront s'ajouter et chaque valeur de l'angle au centre sera affectée d'une erreur approximative.

$$\frac{\sin. z}{1 + \text{tang. L tang. } \delta} \times \frac{2\,\psi \sin. \mu}{\cos. (\psi \cos. \mu)}$$

L'erreur finale est donc indépendante de l'inclinaison de la colonne sur le plan du limbe, si dans *les opérations combinées on a soin de ne pas faire varier cette inclinaison*; elle résulte seulement de l'existence de χ et μ, c'est-à-dire de l'inclinaison de la colonne sur la verticale et de l'angle du plan de ces deux lignes avec le vertical géodésique. Heureusement en est-il ainsi, car la condition qui serait le plus difficile à obtenir, la verticalité du plan du limbe, est indifférente.

On verrait facilement sur la figure qu'une inclinaison supposée de l'axe optique sur le limbe aurait simplement des influences égales sur les valeurs absolues de φ et φ' et par suite une influence nulle sur le résultat des deux observations combinées, pourvu toutefois *que cette inclinaison restât la même.*

Il y aura donc lieu, dans les opérations doubles faites à une même station, de laisser les différentes parties de l'instrument fixes, relativement les unes aux autres, c'est-à-dire de laisser *le limbe fixe par rapport à la colonne et à la lunette.*

Mais si on observe que l'expression algébrique de l'erreur

$$\frac{\sin. z}{\text{tang. L tang. } \delta + 1} \cdot \frac{2\,\psi \sin. \mu}{\cos. (\psi \cos. \mu)}$$

se rapporte au cas de la figure, cas dans lequel on a supposé la colonne fixe, les deux nuits d'observations, on verra qu'en calant la colonne de nouveau, la seconde nuit, et en désignant par ψ' et μ' les éléments analogues à ψ et μ, la véritable expression (grossière comme exactitude) devra être

$$\frac{\sin. z}{\text{tang. } \delta \text{ tang. L} + 1} \left\{ \frac{\psi \sin. \mu}{\cos. (\psi \cos. \mu)} + \frac{\psi' \sin. \mu'}{\cos. (\psi' \cos. \mu')} \right\}$$

ψ ψ', μ μ' pouvant, les deux premiers, être de signes contraires, les deux derniers avoir des valeurs relatives telles que les sinus et les cosinus changent de signes.

En agissant ainsi, il pourra donc se présenter des compensations sans chances d'aggravations.

Par suite, il sera convenable *de régler la verticalité de la colonne, chaque nuit d'observations.*

En résumé l'ensemble des erreurs commises sur la valeur de l'angle formé par les verticales des stations par suite du déplacement du plan de visée sur le vertical géodésique, dans les deux sens horizontal et vertical, est donné d'une manière approchée, par l'expression générale

$$d0 = \frac{(\alpha - a) \sin. z}{\cot. \delta \cos. z + \text{tang. L}} +$$
$$(1)$$

$$+\frac{\sin. z}{\text{tang.}\,\delta\ \text{tang. L}+1}\Big\}\ \frac{\psi \sin. \mu}{\cos. (\psi \cos. \mu)} + \frac{\psi' \sin. \mu'}{\cos. (\psi' \cos. \mu')}\Big\}$$
(2)

puisque tous les autres termes analogues provenant d'observations d'autres étoiles seront les mêmes, à l'exception de δ.

Chacun des termes (1) et (2) peut être atténué en lui-même par les signes relatifs des quantités qui y entrent. Ils peuvent également se compenser entre eux.

Les erreurs commises directement sur l'observation des hauteurs peuvent aussi établir des compensations qui pourront également être produites par les termes correspondant à (1) et (2), relatifs à la seconde station.

Pour se faire une idée de l'importance des erreurs commises, il est bon de prendre un exemple numérique.

Soit $L = 50^g\ \delta = 50^g$, l'erreur simple peut s'écrire, cos. (φ cos. μ) étant toujours très-proche de l'unité,

$$d\text{O} = \frac{(\alpha \pm a) \sin. z}{\cos. z \cot. \delta + \text{tang. L}} + \frac{\psi \sin. \mu + \psi' \sin. \mu'}{\text{tang.}\,\delta\ \text{tang. L}+1} \sin. z$$

$$= \sin. z \left\{\frac{\alpha \pm a}{1+\cos. z} + \frac{\psi \sin. \mu + \psi' \sin. \mu'}{2}\right\}$$

Si on se met dans les cicronstances les plus défavorables, c'est-à-dire si on suppose α et a de même signe, ainsi que ψ et ψ', et $\mu = 100^g$, on trouve que pour un azimut de 25^g, l'erreur sur une valeur simple isolée, de l'angle O des verticales serait d'environ 8″ centésimales, en prêtant à α et a une valeur de 10″.

L'erreur supposée 10″ n'est pas, il y a lieu de le croire, au-dessous de celles qu'on peut éviter; par conséquent, on peut raisonner, sans exagération sur le résultat qu'elle engendre sur une valeur isolée de l'angle des verticales.

Si cependant on ne pouvait pas obtenir celui-ci avec une approximation plus grande $\left(\frac{8''}{40'} = \frac{1}{500}\right.$ pour un côté de 10 lieues$\Big)$, l'exactitude serait complétement insuffisante, surtout avec un faible azimut de 25^g.

Mais en sera-t-il ainsi en réalité ? Non, car il faut observer qu'on a mis dans cette recherche toutes les conditions les plus défavorables; on a supposé toutes les erreurs de même signe et atteignant le maximum.

Il y a donc lieu de croire que l'approximation qui résulte de ce calcul sera de beaucoup dépassée dans des opérations sérieusement exécutées.

Il a été supposé que le côté géodésique était assez petit pour qu'on pût regarder les deux verticales comme se rencontrant, afin que le plan de visée fût unique : de là naît une chance d'erreur dont il n'a pas été tenu compte, car les observations ne sont pas alors faites dans le même plan. Soient AV, A′V′, les deux verticales; on observe, en A, le passage d'une étoile, dans le plan VAA′ et en A′ le passage de la même étoile dans le

plan V'AA' : si on projette V'A' suivant VA' formant avec V'A' un certain angle VA'V', celui-ci engendrera une erreur analogue à celle qui est due dans le cas précédent, à $d\varphi$, déviation verticale du plan de visée. Ya-t-il lieu de s'en préoccuper? Évidemment non, car on peut comprendre l'angle VAV' dans celui que forme toujours la colonne avec la verticale, celui-ci étant beaucoup plus important que le premier.

Il est bon d'observer que les répétitions faites par l'emploi de plusieurs étoiles n'ont aucune influence sur les erreurs qui viennent d'être étudiées, ces erreurs étant les mêmes pour chaque couple d'observations ; mais ces répétitions seront très-utiles pour les causes ordinaires d'erreurs, comme le pointé, la lecture, l'imperfection des divisions, l'excentricité de l'axe de rotation de la lunette, etc.

4° *Erreur de collimation.* — Les déviations qui ont été examinées sont des éléments d'erreur pour les hauteurs ; l'existence d'une collimation (ou d'un angle formé par l'axe optique de la lunette et la tangente au milieu de la bulle du niveau quand elle est dans ses repères) aurait pour effet de transporter celle-ci intégralement sur la distance zénithale, si on ne combinait pas les observations d'une manière convenable.

En effet, il a été dit dans l'exposé de la marche des opérations, pour les causes qui ont été expliquées en même temps, que les répétitions se feraient sans retournement, chaque nuit, sur des étoiles différentes, dont on mesurerait les hauteurs. Il faudra alors, pour chaque observation, caler le niveau porté par la lunette, par le mouvement général et viser par le mouvement particulier, et le résultat obtenu ne représentera la hauteur qu'autant que l'axe optique sera horizontal quand le niveau sera calé, et il sera entaché d'une erreur de collimation constante si celle-ci existe.

Il est vrai qu'on peut reconnaître cette collimation et l'apprécier comme on le fait dans l'emploi ordinaire du cercle répétiteur, lorsque, par une circonstance quelconque, l'observation de la distance zénithale d'un point géodésique ne peut pas se faire par retournement. Il sera bon d'employer ce moyen pour atténuer autant que possible cette collimation, mais sans avoir la prétention de la faire disparaître entièrement. Cette opération exigera l'emploi d'un second niveau à bulle mobile sur le limbe par un mouvement particulier indépendant de celui de la lunette, comme celui que porte ordinairement la lunette inférieure. Ce niveau aura encore l'avantage d'indiquer les entraînements du limbe qui pourraient être occasionnés par le mouvement particulier de la lunette passant de l'horizontalité à la hauteur visée.

L'influence de la collimation déjà ainsi corrigée, disparaîtra, du reste, par la combinaison des opérations doubles.

Il a été dit que pour atténuer les erreurs dues à des déviations horizontales et verticales du plan de visée, il fallait deux nuits différentes en chaque station.

1° Observer, le limbe à droite, deux séries d'étoiles à peu près symétriques par rapport à la verticale et situées, les unes vers le nord, les autres vers le sud du zénith;

2° Ou, ce qui a été reconnu préférable, observer des étoiles toutes au sud du zénith, d'abord le limbe à droite, puis le limbe à gauche.

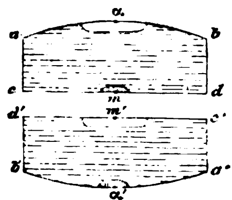
Quel que soit celui de ces deux modes que l'on emploie, l'erreur due à la collimation de la lunette disparaît si on a soin de faire autant d'observations d'un côté que de l'autre.

Dans le premier cas, le limbe étant toujours à droite, chaque hauteur est entachée de l'erreur de collimation dans le même sens, et comme au résultat ces hauteurs N. et S. doivent se retrancher, l'influence de cette erreur disparaît.

Dans le second cas, celui des doubles observations sud, le limbe placé successivement à droite et à gauche, la lunette doit être renversée dans les seconds pointés, et la collimation change de signe. Mais, au résultat, ces observations doivent s'ajouter, ce qui fait encore disparaître les erreurs dues à la collimation, en tant du moins qu'on peut regarder celle-ci comme constante dans tout l'intervalle de temps qui comprend les opérations.

Le double système d'observations sud, qui a été reconnu préférable au premier, présente une difficulté qu'il faut éluder; elle provient de ce que le limbe étant à gauche, le niveau n'est plus lisible, puisqu'il est renversé. Pour corriger cet inconvénient, on peut employer les deux moyens suivants.

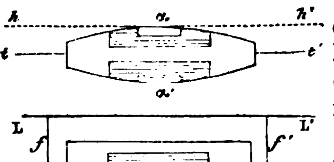
Niveau à bulle. Le limbe étant à droite, la portion transparente ab du niveau est à la partie supérieure, et on peut reconnaître la position α de la bulle d'air; mais lorsque le limbe passe à gauche et lorsque la lunette est retournée, cette partie transparente vient en $a'b'$ et la bulle monte en m'. On ne voit pas directement si dans les deux positions le niveau est placé de la même manière par rapport à la verticale. Cette condition serait satisfaite si, composant l'instrument d'un liquide et de deux bulles, l'une d'air, l'autre de mercure, cette dernière occupe dans la seconde figure la position α', qui était marquée en α, par la bulle d'air, dans la première.



Cette manière de tourner la difficulté aurait deux inconvénients. D'abord la lecture ou plutôt la constatation de la position de la bulle de mercure serait peu facile par suite de la position inférieure de celle-ci, et par suite encore de la forme de cette bulle, le mercure ne mouillant pas le verre.

En second lieu, la sensibilité du mercure ne serait pas aussi grande que celle de l'air, la dissemblance des densités du liquide et du mercure étant beaucoup plus faible que celle du liquide et de l'air; en sorte que par suite du frottement la bulle de mercure pourrait s'arrêter avant d'être parvenue au point le plus bas du verre, point qu'occupait précédemment la bulle d'air avant le retournement du niveau.

Le procédé suivant semble préférable. On laissera découvertes les deux parties supérieure et inférieure du niveau. Celui-ci, terminé par deux tourillons égaux $t\ t'$, sera placé sur le côté de la lunette, au moyen de deux branches $f\ f'$ portant deux entailles dans lesquelles s'encastreront les tourillons.



Le niveau étant calé, la bulle d'air sera en α ; pour pouvoir constater la symétrie de position lors du retournement, il faudrait connaître, sur la partie inférieure, le point répondant à une tangente à la surface du verre, parallèle à celle de α.

Lorsque le limbe étant à droite ou à gauche, une des deux indications α et α' sera donnée par la bulle, on sera certain que le niveau et tout ce qui fait corps avec lui est incliné d'une manière constante par rapport à la verticale ; il en sera donc ainsi de l'axe optique de la lunette.

Pour arriver à la connaissance de ces deux origines α et α' des graduations des deux faces du niveau, on réglera celui-ci comme le niveau d'un théodolite, c'est-à-dire qu'on rendra les deux bras th, $t'h'$, égaux entre eux, en même temps que la ligne des supports ff' sera mise horizontale, par une suite de tâtonnements exécutés en alternant les tourillons de place, et ramenant successivement la bulle dans ses repères, moitié par le mouvement particulier de la lunette ou le mouvement général, moitié par un mouvement particulier intérieur du niveau.

Il suffira ensuite, pour connaître α' symétrique de α, de retourner le niveau sur lui-même de 200^g et de lire l'indication α' donnée par la bulle. Ceci suppose implicitement la parfaite égalité des tourillons.

On obviera à une légère erreur pouvant provenir de leur inégalité et d'un règlement incomplet, en combinant les opérations de telle sorte que chaque nuit, il y ait autant d'observations faites avec chaque face du niveau en dessus, et avec chaque tourillon en avant.

Enfin, n'y aurait-il pas quelque avantage à combiner cette disposition du niveau à deux faces, avec celle indiquée en premier lieu, et qui consiste dans l'introduction d'une bulle de mercure ?

5° *Erreur de pointé, de lecture.* — Il resterait à examiner les erreurs qui proviennent de la lecture, du pointé, de l'imperfection des divisions du limbe, de son excentricité, de sa non-verticalité, de l'obliquité de la lunette par rapport à ce plan (ces deux dernières influant ici seulement

sur la lecture, puisqu'elles ont déjà été examinées comme agissant sur l'existence même de l'angle observé), et enfin celles qui proviennent des irrégularités du niveau à bulle.

Mais toutes ces erreurs sont communes aux observations de distances zénithales ordinaires et elles n'offrent rien de spécial à la solution du problème étudié. Il n'y a donc rien de particulier à en dire, et l'on doit se contenter de quelques appréciations sur l'influence de l'ensemble de ces causes.

Dans les observations géodésiques faites avec les instruments répétiteurs ordinaires, on ne peut généralement pas répondre des distances zénithales à moins de 15 à 20″ centésimales. Cette exactitude serait évidemment insuffisante pour le cas présent ; mais il faut observer que les circonstances ne sont pas les mêmes. La grande imperfection des observations de hauteur, en géodésie, provient surtout de ce que les rayons lumineux rasent le sol, c'est-à-dire sont soumis à une grande influence de la réfraction essentiellement variable dans de telles circonstances. La preuve en est, semble-t-il, dans la différence qui se présente dans l'emploi des instruments répétiteurs appliqués aux observations astronomiques. On a la prétention, peut-être exagérée, de déterminer la latitude d'un point, à 1″ près, par des combinaisons convenables d'étoiles placées de chaque côté du zénith. L'influence de la réfraction se trouve ainsi annulée en partie, il est vrai, et la plus grande exactitude provenant de la combinaison de deux séries N. et S. ne dirait rien de l'importance de la réfraction sur des observations isolées, soit N., soit S. Mais si on compare les latitudes obtenues dans chacun de ces sens avec la moyenne presque indépendante de cette réfraction, on trouve des écarts très-faibles qui dépendant essentiellement des distances zénithales, indiquent que ces distances zénithales astronomiques sont beaucoup plus exactes que celles qui résultent d'observations géodésiques faites nécessairement sur des rayons rasant le sol.

Il n'y a donc pas lieu de se préoccuper de ces écarts énormes de 15 à 20″, d'autant plus que les moyens d'opérer qui ont été indiqués sont de même nature que ceux employés dans la détermination de la latitude, et doivent par conséquent conduire à des résultats d'une même exactitude, indépendamment toutefois des causes spéciales qui ont été examinées.

On a étudié successivement les différentes causes d'erreurs, et on a trouvé qu'elles pouvaient devenir peu importantes si on opérait avec beaucoup de soin, et en combinant les opérations de manière convenable. Les formules données pour celles de ces erreurs qui sont propres au système proposé ont été traduites en formules approximatives, peu exactes en elles-mêmes, mais suffisantes pour donner une idée de l'importance de ces erreurs.

Il en est une, celle relative au déplacement horizontal du plan de visée sur le plan vertical géodosique (celle qui heureusement est d'une

exactitude suffisante), qui peut être appelée à donner autre chose qu'un aperçu de l'importance de l'erreur.

Déviation volontaire du vertical de visée. — Les deux verticaux observés des deux extrémités de la base devant être identiques, les signaux devraient être exactement sur les verticales passant par les cercles, ceux-ci pouvant à la rigueur ne pas se confondre avec les extrémités du côté géodésique. Si ce cas se présentait, l'erreur consisterait à appliquer à la base réelle séparant les deux observateurs, une longueur très-peu différente de sa vraie valeur ; si par exemple la base est de 40000^{m}, un déplacement de 1 à 2^{m} dans le sens du côté même, n'introduirait sur l'angle au centre qu'une erreur insignifiante de $\frac{1}{40000}$ ou $\frac{1}{20000}$.

Mais ceci supposerait toujours que les verticales des limbes ont été signalées, et comme ceux-ci doivent passer tantôt à droite, tantôt à gauche de la colonne, il faudrait changer les signaux chaque nuit. On comprend aisément qu'il soit plus commode de conserver comme signaux les points géodésiques eux-mêmes, et de corriger l'erreur résultant d'un déplacement latéral de l'instrument.

Soit AA′ le vertical géodésique, A″ une station fausse substituée à la station A′. L'observateur situé en A observera les passages dans le vertical AA′ ; l'observateur déplacé visera dans le plan A″A. Pour que les résultats obtenus par lui soient comparables à ceux obtenus en A, il suffira de ramener les premiers à ce qu'ils auraient été si on avait visé dans le plan A″*a*, parallèle à AA′.

Le déplacement angulaire dz sera alors égal à $\frac{m}{K}$; si on désigne par r et y la distance A′A″, et l'angle formé par le vertical d'observation avec celui qui, partant de la station fausse, irait passer par la station vraie, on aura

$$m = r \sin. y, \qquad dz = \frac{r \sin. y}{K \sin. 1''}$$

et la correction apportée à la distance zénithale devra être faite par la formule

$$d\delta = \frac{\sin. z \,.\, dz}{\cot. \delta \cos. z + \text{tang. } L} = \frac{\sin. z \,.\, \frac{r \sin. y}{K}}{\cot. \delta \cos. z + \text{tang. } L}$$

correction qu'il suffira de calculer approximativement avec des valeurs approchées des éléments qui la composent.

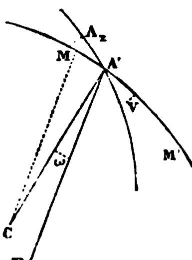
Il est même probable qu'il sera suffisant d'appliquer la formule à la moyenne des distances zénithales, au lieu de l'appliquer successivement à chacune de celles-ci, ce qui forcerait à faire des calculs différents pour chaque dénominateur. Si on s'arrêtait à cette dernière méthode, il faudrait connaître chaque distance zénithale ; mais là ne serait pas la diffi-

culté, car il a été dit que les lectures partielles devaient être faites, d'abord pour les corrections de réfraction, en second lieu pour suivre la marche des valeurs partielles de l'angle au centre, marche utile à connaître quoique le résultat à adopter soit celui qui provient de toutes les répétitions, et enfin, ces lectures, pouvant servir à obvier à l'omission ou à l'inexactitude d'une observation.

149. Utilisation des résultats obtenus. — Nous supposons qu'on a observé les éléments d'un canevas géodésique. Le calcul a transformé ces observations en longueurs de côtés, longueurs indépendantes de la figure terrestre, puis en coordonnées géographiques qui sont une conséquence de cette figure inconnue, sur laquelle on a été obligé de faire une hypothèse.

Calcul des déviations des verticales. — Avant d'expliquer comment la méthode d'observations indiquée précédemment peut conduire à la connaissance des déformations de la surface supposée et à celle des erreurs commises dans le calcul des latitudes et longitudes, il est bon de traiter quelques problèmes, dont on sera, plus tard, obligé d'invoquer les solutions. La nature même des questions à résoudre indique que, par suite de la petitesse des corrections que l'on cherche, il suffira de faire des calculs approximatifs.

1° *Transformation de la déviation absolue de la verticale en variations de latitude et longitude.*—Soit MM', le méridien adopté dans l'exécution du calcul géodésique, A'C, la normale hypothétique qui en résulte, A'D, la verticale réelle, formant avec la première un angle ω, situé dans un vertical d'azimut V. Si C est le centre du cercle osculateur de la section MM' au point A', et qu'on mène une parallèle CA_1' à la verticale réelle du point A', jusqu'à l'azimut V prolongé, les coordonnées géodésiques trouvées pour A' devront être remplacées par celles de A_1, qui est en effet placé sur la normale C'A, inclinée convenablement dans tous les sens et situé sur la sphère de rayon CA', qu'on peut regarder comme se confondant avec la surface terrestre hypothétique dans l'étendue du très-petit arc $A'A_1'$.



En menant par A_1' un grand cercle perpendiculaire à MM', on forme un triangle sphérique excessivement petit, qu'on peut assimiler à un triangle plan ; dans ce triangle, l'arc A'M mesure la variation de latitude et $A_1'M$ peut être confondu avec l'arc de parallèle, en sorte que si on désigne par dl et dm les corrections qu'il faut faire subir, par suite de la déviation de la verticale aux latitude et longitude l et m calculées géodésiquement pour le point A', on aura, en comptant les longitudes posi-

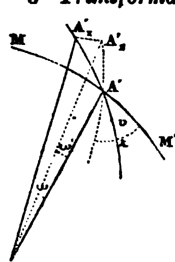
tives à l'ouest, et les azimuts à partir du sud du méridien, en allant vers l'ouest,

$$(1) \qquad dl = \omega \cos. V. \qquad dm = \frac{\omega \sin. V}{\cos. l}$$

2° *Transformation des variations de latitude et longitude en déviation absolue de la verticale.* — Les formules (1) résolvent ce problème inverse du précédent, en prenant ω et V comme inconnus.

$$(2) \qquad \text{tang. } V = -\frac{dm}{dl}\cos. l \quad \text{et} \quad \omega = \frac{dl}{\cos. V} = -\frac{dm \cos. l}{\sin. V}$$

3° *Transformation de la déviation absolue en déviation dans un vertical d'azimut donné.* — En projetant A′ par un arc de grand cercle sur le plan vertical (ou plutôt sur le plan passant par la normale CA′ à la surface hypothétique) dont l'azimut z est donné par rapport au méridien de convention, on a CA'_2, parallèle à la projection de la verticale, dans ce plan.



En désignant par ω′ sa déviation sur la normale supposée, on peut prendre, le triangle $A'A'_1A'_2$ étant sensiblement plan,

$$(3) \qquad A_2'A' = A_1'A' \cos. (z - V) \quad \text{ou} \quad \omega' = \omega \cos. (z - V)$$

4° *Passer de suite des variations en latitude et longitude à la déviation de la verticale, dans un azimut donné.* — Il suffit de combiner les formules des deux derniers cas,

$$\omega' = \omega \cos. (z - V) \quad \text{tang. } V = -\frac{dm \cos. l}{dl} \quad \omega = \frac{dl}{\cos. V} \quad \omega = -\frac{dm \cos. l}{\sin. V}$$

Elles donnent par leur combinaison :

$$(4) \quad \omega' = \frac{dl}{\cos. V}\cos. (z - V) = dl(\cos. z + \text{tang. } V \sin. z) = dl \cos. z - dm \cos. l \sin. z.$$

Les calculs numériques seraient plus simples en cherchant d'abord les valeurs de V et ω par la formule (2), pour les substituer ensuite dans la formule (3).

5° *Trouver la déviation absolue par la connaissance de ses deux projections dans deux azimuts.* — En désignant toujours par ω et V les déviation et azimut de la verticale, et par ω′, z′ et ω″, z″ les éléments correspondants des deux plans considérés, on a

$$\omega' = \omega \cos. (z' - V) \qquad \omega'' = \omega \cos. (z'' - V)$$

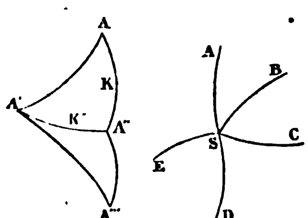
$$\frac{\omega'}{\omega''} = \frac{\cos. z' + \text{tang. } V \sin. z'}{\cos. z'' + \text{tang. } V \sin. z''}$$

$$(5) \qquad \text{tang. } V = \frac{\omega'' \cos. z' - \omega' \cos. z''}{\omega' \sin. z'' - \omega'' \sin. z'}$$

Cette formule donnera V, qui, substitué dans $\omega = \frac{\omega'}{\cos. (z - V)}$ permettra de calculer ω. Malheureusement la formule (5) n'est pas d'un emploi commode pour le calcul logarithmique. Elle nécessiterait l'emploi combiné des tables de logarithmes des nombres et de ceux des lignes trigonométriques.

Déviations. — Ces préliminaires posés, il reste à expliquer comment la connaissance des angles formés par les verticales des sommets géodésiques peut être utilement employée à la recherche des déviations totales des verticales et à celles des variations en latitude et longitude qui résultent de ces déviations.

Soient A, A', A'', A'''.... les sommets du réseau géodésique calculé. On a traduit les résultats en coordonnées géographiques rapportées à un ellipsoïde de révolution dont l'axe est parallèle à la ligne des pôles, ellipsoïde passant par le premier point A du réseau, point dont on a observé astronomiquement les latitude et longitude; l'azimut d'un premier côté AA' au méridien de A est également connu. Il faut encore, à l'extrémité A' de ce même côté AA', observer astronomiquement les latitude et longitude dont la connaissance n'avait pas été nécessaire pour le calcul géodésique. Les coordonnées géographiques de A', observées et calculées, différeront, si ce point n'est pas situé sur l'ellipsoïde adopté; soient L et M, les premières, indépendantes de toute hypothèse, et *l*, *m*, celles qui résultent du calcul géodésique.



Les différences $L - l = dl'$, $M - m = dm$ permettront, par l'emploi des formules (2) de connaître la déviation absolue de la verticale de A' par rapport à la normale de l'ellipsoïde, en angle ω et en azimut V,

$$\text{tang. } V = - \frac{dm \cos. L}{dl}, \quad \omega = \frac{dl}{\cos. V}$$

Si on traitait tous les points du réseau comme le point A', c'est-à-dire si on y observait les latitudes et longitudes, on aurait de même toutes les déviations de toutes les verticales. Mais de telles observations sont excessivement longues et délicates. Celles qu'on propose ici de leur substituer semblent plus expéditives et plus faciles.

On projettera alors cette déviation dans l'azimut A'A'' connu par le calcul géodésique, par la formule (3)

$$\omega_1 = \omega \cos. (z - V)$$

ou bien on fera les deux opérations précédentes, simultanément par la formule (4)

$$\omega_1 = dl \cos. z - dm \sin. z \cos. l$$

Ceci fait, la méthode d'observations indiquée permettra de connaître les déviations de tous les autres sommets du canevas. A cet effet, on calculera les rayons de courbure des sections AA″, A′A″ de l'ellipsoïde répondant aux azimuts z et z' de ces sections. Ces rayons de courbure seront donnés par la formule

$$R = \frac{\rho\rho'}{\rho \sin.^2 z + \rho' \cos.^2 z}$$

ρ étant le rayon de courbure de l'ellipse méridienne adoptée, et ρ' étant la grande normale de celle-ci à la latitude du point considéré.

Cette formule peut s'écrire :

$$R = a\,(1 - e^2 \cos.^2 z \cos.^2 L + \tfrac{1}{2} e^2 \sin.^2 L)$$

en désignant par a et e le rayon de l'équateur et l'excentricité.

En confondant les côtés géodésiques avec les arcs des cercles osculateurs, les angles des normales sur l'ellipsoïde seraient $\frac{K}{R}$, $\frac{K'}{R'}$; l'observation directe de ces angles a donné des valeurs O et O′.

Il suit de là qu'en exprimant les angles en secondes, la déviation de la verticale de A″, projetée dans le plan AA″, sera $\omega' = O - \frac{K}{R \sin. 1''}$ et $\omega'' = O' - \frac{K'}{R' \sin. 1''} - \omega$, sera sa projection dans le plan A′A″.

En désignant par z' et z'' les azimuts des côtés A″A, A″A′ au méridien de A″, azimuts calculés dans l'hypothèse de l'existence de l'ellipsoïde, les déviations partielles ω' et ω'', mises dans les formules (5)

$$\text{tang.}\,V = \frac{\omega'' \cos. z' - \omega' \cos. z''}{\omega' \sin. z'' - \omega'' \sin. z'} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{\omega'}{\cos. (z' - V)} = \frac{\omega''}{\cos. (z'' - V)}$$

feront connaître la déviation totale ω et son azimut V, de la verticale de A″, par rapport à la normale de l'ellipsoïde.

Les corrections des latitude et longitude de A″ seront ensuite fournies par les formules (1)

$$dl = \omega \cos. V. \qquad dm = -\omega \frac{\sin. V}{\cos. l}$$

La même opération se fera pour le point suivant, mais les points A′ et A″ alors employés pour l'étude de A‴ seront traités de la même manière, c'est-à-dire qu'on projettera les deux déviations absolues des verticales de A′ et A″, déjà connues, sur les plans A′A‴, A″A‴ dont les azimuts approchés aux méridiens elliptiques de A′ et A″, sont connus par le calcul géodésique.

Ces deux déviations partielles seront combinées avec les différences des angles sous-tendus par les côtés, différences obtenues, comme il a été dit, par des mesures directes et par l'emploi des rayons de courbure de l'ellipsoïde aux latitudes de A′ et A″ dans les azimuts de A′A‴, A″A‴ aux méridiens de A′ et A″.

Ces combinaisons feront connaître les déviations de la verticale de A‴ suivant les azimuts de A‴A′ et A‴A″ au méridien de A‴.

Et ainsi de suite, de proche en proche, on connaîtra les déviations des verticales des sommets de triangles employés, et les corrections à faire subir aux latitudes et longitudes obtenues par le calcul géodésique appliqué à l'ellipsoïde de révolution passant par le point de départ A. Mais rien ne dit que cet ellipsoïde soit celui qui convient le même à la généralité de la surface terrestre ; il a les mêmes dimensions et la même forme invoquées dans le calcul géodésique, mais il peut être désorienté, c'est-à-dire que son axe, toujours parallèle à la ligne des pôles, peut ne pas se confondre avec celle-ci.

En sorte que les déviations des verticales, ainsi trouvées, ne seront pas celles que fournirait l'ellipsoïde moyen, mais les latitudes et longitudes corrigées seront exactes ; elles le seraient même encore, si au lieu de supposer l'existence de l'ellipsoïde de départ identique de forme à l'ellipsoïde moyen, quoique déplacé, on en supposait un autre, ou même une figure quelconque, et que le calcul des coordonnées géodésiques fût fait, ainsi que celui du rayon de courbure, avec des changements convenables apportés aux formules géodésiques.

Les modifications reconnues dans la figure du canevas géodésique employé ne seront que relatives à la figure choisie au départ, et on peut se demander comment on pourra les apprécier par rapport à l'ellipsoïde général de la surface terrestre.

Il faudra pour cela supposer l'ellipsoïde du point de départ ayant les dimensions de cet ellipsoïde général et faire partir les opérations indiquées, d'un point employé dans une mesure d'arc de parallèle, mesure dont les résultats auront dû concorder exactement avec l'existence de cet ellipsoïde général. Et encore ne sera-t-on pas complétement assuré qu'un hasard heureux n'aura pas donné à l'arc de parallèle mesuré la même longueur qu'un arc correspondant de même latitude de la figure générale, arc répondant à la même différence de longitudes, ou, autrement dit, que l'arc de parallèle pourra appartenir à un ellipsoïde égal à l'ellipsoïde général, mais désorienté ou ayant son axe de rotation seulement parallèle à la ligne des pôles.

On n'aura donc pas la certitude de connaître les déviations des verticales par rapport à cette figure générale, mais on aura probabilité d'arriver à ce résultat si on a opéré comme il a été dit ci-dessus.

Mais ce qui importe plus que la connaissance des déviations absolues, c'est qu'on pourra connaître les déviations des verticales par rapport aux

normales de l'ellipsoïde employé, et par suite les déviations relatives des verticales entre elles pour l'ensemble du pays étudié.

On pourra donc apprécier les déformations locales et rechercher les causes accidentelles qui leur donnent naissance.

Si on n'a en vue que la recherche d'une déformation partielle isolée, on pourra se dispenser des observations de latitude et longitude du second point A', en opérant comme il suit :

Dans une région ABCDE (figure précédente) qui paraît présenter une déformation sensible, on connaîtra par le calcul géodésique les latitudes, longitudes et azimuts rapportés à l'ellipsoïde d'un point de départ quelconque ; on pourra donc trouver les rayons de coubure de ces côtés supposés appartenir à cet ellipsoïde.

En combinant une station centrale faite en S avec un certain nombre de stations latérales successivement faites en A.B,C,D,E, on pourra connaître les déviations des verticales des points A, B, C..... par rapport à la verticale de S, supposée confondue avec la normale à l'ellipsoïde, déviations projetées dans les plans SA, SB, SC.....

On comprend que l'étude de ces déviations projetées puissent conduire, de proche en proche, à la connaissance d'une cause locale de déformation de la figure de la contrée, déjà peut-être elle-même déformée par une cause plus générale.

150. **Conséquences.** — Il ne nous reste plus qu'à préciser et à restreindre les conséquences auxquelles peut conduire le procédé d'observations que nous avons indiqué. Malheureusement, comme dans toutes les questions qui ne sont pas absolument spéculatives, le raisonnement mathématique est subordonné à l'appréciation d'approximations plus ou moins entachées d'inexactitude, appréciation dans laquelle le sentiment joue un certain rôle.

Les résultats obtenus, dans certains calculs précédents, ont eu pour but de contrôler les erreurs commises ; seront-ils d'une exactitude suffisante?

L'expérience seule, par la concordance des résultats qu'elle fournirait, pourrait permettre de juger cette question. Une grande habitude des instruments de précision, jointe à une grande habileté dans l'emploi des calculs approximatifs, pourrait peut-être la faire préjuger.

En admettant une solution favorable, quelles conséquences pourra-t-on en tirer ? Il a été expliqué précédemment comment on arriverait à connaître les déviations des verticales relativement aux normales d'un ellipsoïde de départ auquel on pourrait donner les dimensions de celui qui convient pour la représentation de la généralité de la surface terrestre ; et qu'on pourrait peut-être même à la rigueur faire confondre avec celui-ci.

On aurait donc ainsi connaissance des déformations locales rapportées à la forme générale, ou tout au moins estimerait-on ces déformations comparées entre elles, ce qui pourrait peut-être indiquer certaines causes perturbatrices.

Il ne semble pas exister d'autres conséquences à tirer de la méthode indiquée.

Il paraît, à première vue, qu'il y aurait lieu de la faire servir à la modification des latitudes et longitudes des points d'un canevas géodésique sur lequel se trouve appliqué un levé topographique. Cela serait convenable pour l'inscription de ces coordonnées géographiques, mais non pour leur emploi dans l'exécution d'une carte topographique d'une grande étendue.

Celle-ci suppose en effet la projection de tous les points sur une surface horizontale, mais avec la restriction sous-entendue que cette surface possède une régularité de formes qui permet son développement approximatif sur un plan. Si on tenait compte des déformations locales, quel système de projection emploierait-on ? Les erreurs qu'il engendrerait ne l'emporteraient-elles pas sur celles qui proviennent de l'inexactitude des coordonnées géographiques rapportées à l'ellipsoïde adopté ? Et, d'ailleurs, y a-t-il nécessité absolue que la surface de projection soit parfaitement horizontale ? Le nivellement seul doit impérieusement se rapporter à cette dernière, et c'est en effet ce qui a lieu indépendamment des déformations locales. Relativement à la planimétrie, la carte exécutée sans tenir compte de ces déformations est bonne, et il n'y aurait, seulement pour tenir compte de celles-ci, qu'à changer un peu les notations portées en regard des méridiens et des parallèles, changements, du reste, très-faibles, qui pourraient donner lieu au tracé voisin d'autres méridiens ou parallèles affectant des formes irrégulières, mais n'influant en rien sur les détails de la planimétrie obtenus par suite de l'existence de l'ellipsoïde.

Les modifications de latitudes et de longitudes ne doivent trouver place que dans l'inscription faite dans un tableau définitif des coordonnées, tableau donné à titre de renseignement et pouvant servir au tracé d'un canevas géodésique partiel destiné à la confection d'un levé topographique isolé.

LIVRE IV

CHAPITRE Ier

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE

151. Rappel de définitions. — Notre but n'est pas d'enseigner entièrement les trigonométries, nous voulons seulement mettre à même de comprendre les formules de la trigonométrie sphérique dont l'emploi est usuel en géodésie et en astronomie.

Cependant, et pour éviter une confusion qui, à notre sens, se présente trop souvent, nous préciserons quelques définitions.

Angle. — Un angle est l'espace indéfini compris entre deux lignes droites qui se coupent. Il suit de là que tout angle est infini, et cependant, si on compare deux angles, on reconnaît à simple vue que quoique infinis tous deux, l'un est plus grand que l'autre ; il y a donc des infinis de diverses grandeurs, et le rapport peut exister entre eux comme entre les quantités finies.

Si l'angle entrait sous forme de surface, toujours infinie, dans les considérations mathématiques, on ne pourrait pas l'utiliser : mais heureusement, il n'y entre jamais ainsi, et il apparaît sous deux apsects, en divisions de la circonférence ou en rapport.

Sous la première forme, il résulte de sa comparaison avec un autre angle, qui, étant de même nature que lui, peut lui être comparé, et donner le nombre qui exprime le premier en prenant le second pour unité. Cette unité est, suivant les cas, l'angle droit, le grade, la minute ou la seconde ; le résultat, pour être apprécié, exige que l'unité employée soit elle-même appréciée ; tant qu'on laisse subsister la désignation de cette unité sans préciser autrement sa valeur, on n'a qu'un renseignement dont l'utilisation ne pourra avoir lieu qu'indirectement, par comparaison

avec d'autres angles ou d'autres renseignements énoncés dans la même hypothèse.

Si au contraire on précisait la valeur de l'unité employée, l'angle serait lui-même précisé d'une manière absolue ; mais d'après la définition même de l'angle, il est impossible qu'il en soit ainsi, et l'unité, comme tout angle qui en découlera par une simple multiplication, ne pourra elle-même être définie que par quelque chose qui lui sera proportionnel, sans lui être identiquement égal.

On prouve facilement que si du sommet d'un angle on décrit un nombre infini de cercles, le rapport de chacun des arcs compris entre les côtés de l'angle au rayon ayant donné naissance à cet arc, est constant. Ce rapport, qui est le même pour chaque angle, et qui varie proportionnellement quand l'angle varie, peut alors être pris comme mesure de celui-ci, c'est-à-dire que ces deux quantités, l'angle et le rapport sont proportionnels l'un et l'autre, ou, autrement dit, joints ensemble par un coefficient C constant et d'une valeur inconnue.

Il est souvent nécessaire de passer de l'expression d'un angle en rapport $\frac{a}{r}$ à son expression en unités de la circonférence, en secondes par exemple. Soit ainsi α le nombre de secondes qu'il devra contenir. Dans le premier cas, il sera égal à $C\frac{a}{r}$; dans le second, sa valeur sera $\alpha \times$ valeur de $1'' = \alpha \times C$. rapport $1'' = \alpha$ sin. C. sin. $1''$ approximativement. D'où on conclura

$$\frac{a}{r} = \alpha'' \sin. 1''$$

Il faut donc multiplier le nombre de secondes par sinus de $1''$, ou mieux par le rapport qui représente la seconde, pour avoir l'expression d'un même angle en rapport, et inversement.

Nous avons confondu le sinus et le rapport $1''$, ce qui est permis, ainsi qu'on le verra plus tard, par suite de la petitesse de l'angle, mais ce qui n'a pas d'autre avantage que de bien rappeler que le facteur introduit doit être un nombre abstrait.

On trouve la valeur de ce rapport en se rappelant que $\pi = 3{,}14159$ représente le rapport de la demi-circonférence au rayon, ou l'angle de 200^g, ce qui, par une simple division, permettra de passer à la seconde. On peut aussi rechercher, au moyen des tables de logarithmes des lignes trigonométriques, celui du sin. $10''$, et, regardant sin. $1''$ et sin, $10''$ comme se confondant avec les rapports qui représentent $1''$ et $10''$, prendre le logarithme de sin. $1'' = \log. \frac{\sin. 10''}{10} = \log. \sin. 10'' - 1$, ce qui, par le secours de la table des logarithmes des nombres, conduit, comme le premier procédé à, rapport $1'' = \sin. 1'' = 0{,}0000015703....$:

Lorsqu'un angle entre directement dans un calcul, il y apparaît toujours sous forme de rapport. Lorsqu'il s'agit de le désigner, on emploie au

contraire son expression en unités de la circonférence, expression qui parle mieux à l'esprit que le rapport correspondant ; ainsi, on se fera mieux une idée de l'angle de trois secondes, quoiqu'on sous-entende, en l'exprimant, la valeur de l'angle de une seconde, que de celui de 0,00000471 qui lui est pourtant égal. On aurait pu réunir les deux modes d'expression en un seul, en prenant l'unité angulaire de mesure égale à une fraction simple ; si par exemple on avait appelé *seconde* l'angle dont le rapport $=0,000001$, chaque angle aurait eu, pour ses deux désignations, les mêmes nombres, abstraction faite d'un facteur commun introduit dans l'une de ces mesures ; ainsi, un même angle aurait été exprimé par n secondes ou $0,00000n$ rapport, et on n'aurait pas été obligé de faire à chaque instant la transformation numérique que nous avons indiquée précédemment. L'inconvénient unique qui serait résulté de ce choix de l'unité primitive aurait été de donner l'angle droit sous une forme peu simple et incommensurable, 1,57029632... rapport $=$ 1570296,32... secondes $=$ 157,029632 unités 10000 fois plus grandes que la seconde admise hypothétiquement, tandis que les deux modes employés expriment cet angle droit sous les formes plus simples, $100^g = 90^o$, qui permettent la division exacte des limbes gradués.

La division centésimale du cercle introduite au même temps que le reste du système décimal a eu l'avantage de simplifier les opérations arithmétiques faites sur les angles exprimés en unités de la circonférence, tout en laissant la complication et l'incommensurabilité exister dans les mesures en rapport. Certainement beaucoup plus avantageuse que la division sexagésimale, elle a pourtant été presque partout abandonnée ; cela tient à deux causes ; la première est que la dernière méthode est adoptée par toutes les nations étrangères, ce qui facilite l'uniformité des résultats comparables ; la seconde vient du rapport simple qui existe entre les heures conservées à raison de 24 par jour et les degrés au nombre de 360 dans une révolution complète de quatre angles droits. Ce rapport $\frac{1}{15}$ reste ensuite le même pour les minutes et les secondes de temps et d'angles, par suite du même mode de subdivision par 60 employé pour les heures comme pour les degrés. Cette circonstance, qui permet la transformation simple des angles horaires en temps, jointe à l'établissement de toutes les tables astronomiques faites depuis les temps les plus reculés, dans ce mode de mesure, a engagé les astronomes à revenir à la division sexagésimale de la circonférence. Nous l'avons en conséquence introduite dans le livre III, tout en conservant la division centésimale dans les deux premiers parce que la Carte de France a été faite au moyen de celle-ci.

Lignes trigonométriques. — La résolution des problèmes de trigonométrie repose habituellement sur l'emploi des lignes ou rapports trigonométriques des angles et non sur celui des éléments analogues des arcs qui les mesurent.

En même temps qu'on observe que pour un même angle, le rapport

de l'arc au rayon est constant, on remarque qu'il existe d'autres rapports également invariables avec le même angle ; tel est celui du sinus de l'arc a, au rayon r de cet arc, rapport qu'on appelle *sinus de l'angle*.

$$\frac{\sin. a}{r} = \sin. \frac{a}{r}$$

Ce que nous disons du sinus se rapporte également aux autres lignes trigonométriques de l'angle, en sorte qu'il sera toujours permis d'écrire :

Le rapport qui représente une ligne trigonométrique de l'angle $\frac{a}{r}$ est égal au rapport de la même ligne trigonométrique de l'arc a, au rayon r.

On a trouvé avantageux, dans beaucoup de circonstances, de substituer aux considérations d'angles, celles de leurs lignes trigonométriques qui en sont des fonctions déterminées et dont les six formes distinctes offriront plus de ressources que la forme unique représentant l'angle lui-même.

Malheureusement, ces nouvelles fonctions, qui sont parfaitement précisées par l'angle, ne le précisent pas également bien, et si l'angle n'a qu'un sinus, par exemple, l'inverse n'a pas lieu ; en sorte que les conséquences que l'on tirera de certaines formules conduiront à d'autres conséquences non-seulement vraies pour les angles qui auront donné naissance au problème, mais encore pour d'autres angles, qui heureusement seront dans des relations simples avec les premiers.

La recherche des propriétés des lignes trigonométriques exigeant l'emploi des figures, on comprend de suite qu'en vertu de la relation générale précédente, il suffira de rechercher ces propriétés relativement aux arcs et de remplacer dans l'équation finale qui en résultera, la ligne trigonométrique de l'arc par celle de l'angle multipliée par le rayon.

Les lignes trigonométriques des angles sont, on le sait, au nombre de six, mais il ne faut pas croire qu'elles expriment six idées distinctes ; elles expriment au contraire la même sous six formes différentes ; c'est ce qui résulte des relations qui les lient entre elles et qui les déterminent toutes quand une seule est connue.

152. Triangle sphérique. — Pyramides directe et supplémentaire. — Un triangle sphérique est celui qui est formé, sur une sphère, par trois arcs de grands cercles. On nomme côtés de ce triangle, les arcs compris entre ses sommets ; ses angles sont ceux formés par ces mêmes arcs ou par leurs tangentes.

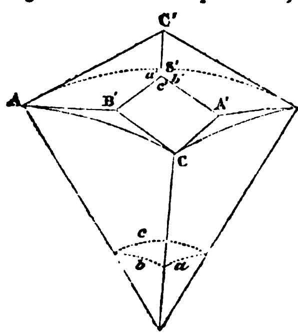
Pyramide directe. — Si l'on conçoit les trois sommets d'un triangle sphérique joints au centre de la sphère à laquelle il appartient, on aura l'idée d'une pyramide triangulaire, dont les six éléments ont des relations simples avec ceux du triangle sphérique. Les angles plans de la pyramide sont en effet mesurés par les côtés du triangle, arcs d'un cercle

dont le rayon est celui de la sphère, tandis que les angles dièdres de cette même pyramide étant ceux que forment entre eux les plans qui la composent, sont les mêmes que les angles du triangle, les uns et les autres étant compris entre les tangentes aux arcs du triangle.

Les relations mathématiques fournies par la trigonométrie sphérique s'appliquent rigoureusement aux six éléments angulaires de la pyramide, mais ils ne s'appliquent qu'indirectement au triangle sphérique; pour que cette application puisse se faire il faut modifier la définition des côtés, en les regardant non plus comme les longueurs linéaires des arcs de grands cercles, mais comme les rapports de ces longueurs au rayon de la sphère, ce qui leur donne pour définition la mesure même des angles plans de la pyramide triangulaire, en sorte que les six éléments de l'une deviennent identiques avec ceux de l'autre.

C'est toujours dans ce sens qu'il faut entendre la valeur des côtés des triangles sphériques qui entrent dans les formules, en sorte que ces formules ne fourniront que des relations communes à tous les triangles formés sur des sphères de rayons quelconques, par les trois plans qui composent la pyramide dont le sommet serait au centre commun de toutes ces sphères.

Pyramide supplémentaire. — Si par les sommets A, B, C, on mène 3 plans tangents à la sphère, ils forment une nouvelle pyramide que l'on nomme supplémentaire, parce que ses angles plans sont suppléments des angles dièdres de la première, et réciproquement.



Ces trois plans tangents contenant les tangentes aux arcs de cercle, les points A', B', C', appartiendront aux intersections de ces plans pris deux à deux.

Comme trois plans ne peuvent se rencontrer qu'en un point, soit S', ce point qui pourra être considéré comme le sommet d'une pyramide dont les arêtes seront S'A', S'B', S'C', et dont les angles plans seront a', b', c'; quant à ses angles dièdres, ils ne seront autres que AB'C, CA'B, AC'B. En effet, S'B', intersection des deux plans tangents en A et C, tous deux perpendiculaires à ASC, sera perpendiculaire à ce plan, et par suite aux lignes AB' et CB' qu'il renferme.

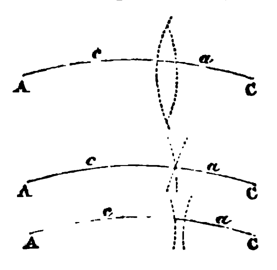
La ligne S'C' sera de même perpendiculaire à AC' et BC'. En considérant les quadrilatères plans SAB'C et AB'S'C', on verra qu'ils renferment chacun deux angles droits, et que par conséquent les deux autres angles sont supplémentaires, c'est-à-dire que $B' = 200^g - b$, $a' = 200^g - A$.

On pourra donc écrire, en appelant A, B, C, a, b, c, les éléments de l'une, et A', B', C', a', b', c', ceux de l'autre.

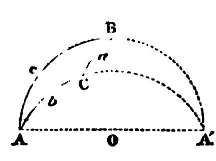
$a=200^g-A'$, $b=200^g-B'$. $c=200^g-C'$, $a'=200^g-A$, $b'=200^g-B$, $c'=200^g-C$

153. Conditions d'existence d'un triangle sphérique. — Ces conditions sont au nombre de trois.

Un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres. — Désignons par a, b, c, les trois côtés linéaires opposés aux angles plans A, B, C. Le côté b étant celui représenté par AC sur la figure, pour former le triangle il suffit de décrire des points A et C comme pôles deux arcs de petits cercles, dont les rayons mesurés sur un arc de grand cercle soient c et a. La courbure d'un arc de grand cercle étant constante pour une même sphère, il est évident que si $b=a+c$, les deux petits cercles seront tangents l'un et l'autre et réduiront le triangle à un arc A'C'. Si $b<a+c$, ces deux petits cercles ne se rencontrant pas, ne donneront naissance à aucune figure et le triangle n'existera pas. Il est donc nécessaire que $b<a+c$.



La somme des trois côtés est plus petite qu'une circonférence de grand cercle. — Les arcs AB, AC qui forment l'angle A appartenant à deux grands cercles, vont se rencontrer en A' à l'extrémité du diamètre qui passe par A. Les arcs ABA', ACA', sont donc des demi-circonférences. En appliquant au triangle supplémentaire BCA', la première propriété démontrée, on doit avoir $a < BA' + CA'$ ou $a+b+c < BA' + CA' + b + c$ ou $< ABA' + ACA'$ ou enfin $a+b+c <$ qu'une circonférence de grand cercle.



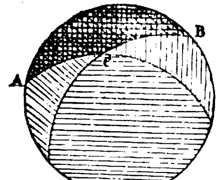
Remarquons que les deux propriétés que nous venons de démontrer s'appliquent aux longueurs linéaires des côtés du triangle, différant en cela des formules que nous trouverons plus tard. Du reste, elles s'appliquent aussi aux valeurs angulaires de ces côtés ou, autrement dit, aux angles plans de la pyramide; il suffit pour s'en convaincre de se rappeler que ces côtés linéaires appartiennent tous à des cercles de même rayon, en sorte que la première propriété $b<a+c$ qui peut s'écrire $\frac{b}{r} < \frac{a}{r} + \frac{c}{r}$, en désignant par r le rayon de la sphère, revient à la suivante, ***un angle plan quelconque de la pyramide triangulaire est plus petit que la somme des deux autres,*** puisque ces angles sont mesurés par les rapports $\frac{a}{r}\,\frac{b}{r}\,\frac{c}{r}$. Quant à la seconde exprimée algébriquement par $a+b+c<$ circonférence de grand cercle ou de rayon r, elle peut également s'écrire $\frac{a}{r}+\frac{b}{r}+\frac{c}{r} < \frac{2\pi r}{r}$ ou $<2\pi$, ce qui appliqué à la pyra-

mide signifie que *la somme de ses trois angles plans est plus petit que* 400^g.

La somme des trois angles est plus petite que 600^g *et plus grande que* 200^g. — La première condition est évidente d'elle-même, chacun des angles devant être $< 200^g$. La seconde résulte de l'emploi de la pyramide supplémentaire ; en appliquant à celle-ci la condition relative aux trois angles plans, on a $a' + b' + c' < 400^g$, d'où il résulte

$$200^g - A + 200^g - B + 200^g - C < 400^g \quad \text{ou} \quad A + B + C > 200^g.$$

154. Surface d'un triangle sphérique. — En faisant la somme des fuseaux dont les angles sont ceux du triangle sphérique ABC, et en désignant par T la surface de celui-ci, on a



$$f\,(A) + f\,(B) + f\,(C) = \tfrac{1}{2}\ \text{sphère} + 2\,T = 2\,\pi\,r^2 + 2\,T$$

Mais la surface d'un fuseau est proportionnelle à son angle ; en désignant par M le coefficient de la proportionnalité, coefficient dont la valeur dépendra de l'unité qui sera employée dans la mesure de l'angle, on aura

$$f\,(A) = M.A$$

Le coefficient étant constant, il suffit, pour le trouver, d'appliquer cette formule à un cas pour lequel la surface est connue sans son secours ; il en est ainsi de la demi-sphère qui n'est autre qu'un fuseau dont l'angle est de 200^g. En exprimant l'angle avec le grade pour unité, on a donc

$$f\,(200) = M.200 \qquad \text{et} \qquad f\,(200) = 2\,\pi\,r^2$$

d'où $\quad M = \dfrac{2\,\pi\,r^2}{200}$. En substituant cette valeur dans l'équation primitive transformée en

$$M\,(A + B + C) = 2\,\pi\,r^2 + 2\,T$$

on aura

$$\frac{2\,\pi\,r^2}{200}\,(A + B + C) = 2\,\pi\,r^2 + 2\,T$$

$$T = \frac{\pi\,r^2}{200}\,(A + B + C - 200)$$

Mais $\dfrac{\pi}{200}$ est le rapport qui représente le grade, et $A + B + C - 200$ est ce qu'on appelle *l'excès sphérique* ; si nous désignons celui-ci par e^g, en le supposant exprimé par le nombre de grades qu'il renferme, nous aurons

$$T = r^2.\,e^g.\ \text{rapp.}\ 1^g$$

Si l'excès sphérique, comme cela arrive très-souvent en géodésie, est

représenté par le nombre de secondes qu'il renferme, le résultat deviendra 10000 fois plus grand, ce qui ne doit pas être, puisque l'expression de la surface du triangle doit être constante tant que l'unité linéaire employée dans la mesure de r reste la même ; il faut donc diviser ce premier résultat par 10000, ce qui se fait immédiatement en remplaçant le rapport qui représente le grade, par celui qui exprime la seconde. On serait arrivé au même résultat, en employant de suite la seconde comme unité d'angle, dans la recherche du coefficient M.

La surface du triangle sphérique pourra donc s'écrire

$$T = r^2 e''. \text{ rapp. } 1'' \text{ ou approximativement} = r^2 e''. \sin. 1''.$$

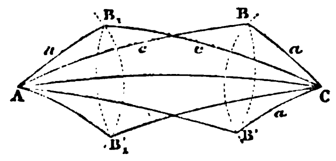
155. Cas d'égalité des triangles sphériques. — Deux triangles sphériques sont égaux, c'est-à-dire qu'ils ont tous leurs éléments égaux entre eux, dans les quatre cas suivants :

1° Lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux ;
2° — un angle égal compris entre deux côtés égaux ;
3° — les trois côtés égaux ;
4° — les trois angles égaux.

Il est sous-entendu qu'il faut pour cela qu'ils appartiennent à la même sphère, ou que l'on entende par côtés, les angles plans de la pyramide.

Les deux premiers cas se démontrent par des considérations analogues à celles qu'on peut employer pour la démonstration des deux derniers que nous nous contenterons d'étudier.

Pour s'assurer que deux triangles sont égaux quand ils ont leurs trois côtés égaux, il suffit de voir si avec trois côtés donnés en longueur, on peut, sur la même sphère, décrire plusieurs triangles ayant quelques éléments différents. Soit AC l'un des côtés. Si de A et C comme pôles, avec des longueurs égales aux deux autres côtés, on décrit deux petits cercles, ils se rencontreront en B et B' et donneront naissance à deux triangles. Si on alterne les côtés on pourra obtenir deux nouveaux triangles dont



les sommets seraient en B_1 et B_1'. On peut donc ainsi faire naître quatre triangles ayant les trois mêmes longueurs de côtés ; mais n'est-il pas évident que quoique placés sur la sphère, en des lieux différents, ces triangles, quoique non superposables, auront les mêmes angles ? ils ne diffèrent entre eux, en effet, qu'en ce que les uns sont à droite, les autres à gauche du côté primitif BC, et qu'en ce que les rôles de A et C sont alternés ; mais sur une sphère, la droite et la gauche jouent le même rôle par suite de l'uniformité de courbure, et aucune propriété géométrique ne distingue un point A d'un point C, quand ces deux points sont simplement en regard l'un de l'autre. Il n'en serait plus de même pour toute surface autre que la sphère ou le plan.

L'égalité n'est pas toujours de même nature sur ces deux surfaces;

sur le plan elle entraîne la possibilité de superposition ; sur la sphère il peut y avoir égalité de tous les éléments de deux triangles comme ceux de la figure, sans que cette superposition puisse se faire. Il y a alors symétrie.

Quant au dernier cas d'égalité, il est une conséquence du précédent, car si les angles A,B,C sont égaux dans les deux triangles ou dans les deux pyramides directes qui répondent à ces triangles, les angles plans des pyramides supplémentaires seront égaux entre eux. Ces derniers se trouveront donc, d'après ce qui précède, avoir aussi leurs angles dièdres égaux ; mais ceux-ci étant les suppléments des angles plans des pyramides directes, l'égalité de ces angles plans, ou des côtés des triangles sphériques, devra également exister.

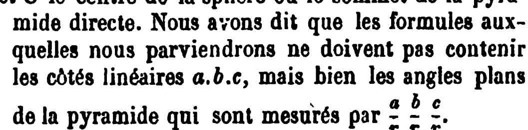
Nous arriverons algébriquement aux mêmes conséquences, lorsque nous résoudrons les différents cas possibles de triangles sphériques donnés par trois de leurs éléments, en reconnaissant que les quatre cas énoncés ne comportent qu'une seule solution.

156. Formules générales. — Nous venons de voir que trois éléments étaient toujours nécessaires (et nous reconnaîtrons leur insuffisance dans certains cas) pour la détermination d'un triangle sphérique. Afin de pouvoir trouver successivement chacune des trois inconnues, il nous suffit donc de rechercher une relation entre quatre des éléments, dont trois seront donnés et le quatrième inconnu. Mais comme les données peuvent être quelconques ainsi que les inconnues, nous devrons avoir autant d'équations qu'il est possible de faire de combinaisons quatre à quatre, avec six quantités. Nous verrons plus tard que ces combinaisons sont au nombre de quinze; mais chacun des angles et chacun des côtés jouant les mêmes rôles dans un triangle, ces quinze combinaisons se réduisent à quatre essentiellement distinctes.

Les quatre circonstances possibles se résument comme il suit, en se servant des notations habituelles.

1° A.*a*.*b*.*c*—2° A *a* B.*b*—3° *a*.A.B.C—4° A.*a*.B.*c*.

Relation entre un angle et les trois côtés. A a.b.c. **— Soit A.B.C le triangle sphérique et O le centre de la sphère ou le sommet de la pyramide directe. Nous avons dit que les formules auxquelles nous parviendrons ne doivent pas contenir les côtés linéaires *a*.*b*.*c*, mais bien les angles plans de la pyramide qui sont mesurés par $\frac{a}{r}\,\frac{b}{r}\,\frac{c}{r}$.**



Pour simplifier les écritures, supposons que *a*.*b*.*c* sont la représentation abrégée de ces rapports; quand, dans une autre circonstance, les côtés seront donnés linéairement ou en longueur, les formules ne devront contenir que les rapports de ces longueurs au rayon.

Par le point A menons les deux tangentes AB′, AC′ jusqu'à leur rencontre avec les deux rayons OB, OC, et joignons B′C′.

Appliquant aux deux triangles plans AB′C′, OB′C′, la formule de trigonométrie rectiligne qui donne une relation entre un angle et les trois côtés, nous aurons successivement

$$\overline{B'C'}^2 = \overline{AB'}^2 + \overline{AC'}^2 - 2.AB'.AC'.\cos. A \quad \text{et} \quad \overline{B'C'}^2 = \overline{OB'}^2 + \overline{OC'}^2 - 2.OB'.OC'.\cos. a$$

$$AB' = r \text{ tang. } b, \quad AC' = r \text{ tang. } c, \quad OB' = r \sec. b, \quad OC' = r \sec. c$$

Substituant dans les deux formules précédemment établies et égalant les deux seconds membres, on a après suppression du facteur commun r^2,

$$\text{tang.}^2 b + \text{tang.}^2 c - 2 \text{ tang.} b \text{ tang.} c \cos. A = \sec.^2 b + \sec.^2 c - 2 \sec. b \sec. c \cos. a$$

$$\text{ou} \quad \sec.^2 b - \text{tang.}^2 b + \sec.^2 c - \text{tang.}^2 c = 2 \sec. b. \sec. c. \cos. a$$
$$- 2 \text{ tang. } b. \text{ tang. } c. \cos. A$$

$$1 = \sec. b \sec. c \cos. a - \text{tang. } b \text{ tang. } c \cos. A$$

$$\cos. b \cos. c = \cos. a - \sin. b \sin. c \cos. A$$

$$\cos. a = \cos. b \cos. c + \sin. b \sin. c \cos. A$$

Telle est la relation fondamentale qui, combinée avec la propriété de la pyramide supplémentaire, suffit à donner naissance à toutes les formules de la trigonométrie sphérique.

Relation entre deux côtés et les angles opposés. A.a.b.c. — La première formule donne $\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\sin. b \sin. c}$, d'où $\sin.^2 A = 1 - \frac{(\cos. a - \cos. b \cos. c)^2}{\sin.^2 b \sin.^2 c}$ et par une suite de transformations simples

$$\sin.^2 A = \frac{\sin.^2 b \sin.^2 c - (\cos. a - \cos. b \cos. c)^2}{\sin.^2 b \sin.^2 c}$$

$$= \frac{\{\sin. b \sin. c + \cos. a - \cos. b \cos. c\} \{\sin. b \sin. c - \cos. a + \cos. b \cos. c\}}{\sin^2 b \sin.^2 c}$$

$$= \frac{\{\cos. a - \cos. (b + c)\} \{\cos. (b - c) - \cos. a\}}{\sin.^2 b \sin.^2 c}$$

En divisant par $\sin.^2 a$, et en remplaçant les différences de cosinus par les produits qu'enseigne à connaître la trigonométrie rectiligne, on a

$$\frac{\sin.^2 A}{\sin.^2 a} =$$

$$= \frac{4 \sin. \frac{1}{2}(a + b + c) \sin. \frac{1}{2}(b + c + a) \sin. \frac{1}{2}(a + c - b) \sin. \frac{1}{2}(a + b - c)}{\sin.^2 a \sin.^2 b \sin.^2 c}$$

Si nous remarquons que le second membre est symétrique en a, b, c, nous pourrons écrire,

$$\frac{\sin.^2 A}{\sin.^2 a} = \frac{\sin.^2 B}{\sin.^2 b} = \frac{\sin.^2 C}{\sin.^2 c} \quad \text{ou} \quad \frac{\sin. A}{\sin. a} = \frac{\sin. B}{\sin. b} = \frac{\sin. C}{\sin. c}$$

en faisant abstraction du double signe, ce qu'on est en droit de faire, car toutes les quantités qui entrent dans cette suite de rapports sont des sinus d'angles plus petits que 200^g et sont par conséquent positifs.

Cette formule est dite des quatre sinus.

Relation entre trois angles et un côté. A.B.C.a. — Pour avoir cette relation, il suffit d'appliquer la première à la pyramide supplémentaire, ce qui donne

$$\cos. a' = \cos. b' \cos. c' + \sin. b' \sin. c' \cos. A'$$

$$\cos. (200 - A) = \cos. (200 - B) \cos. (200 - C) + \sin. (200 - B) \sin. (200 - C) \times \cos. (200 - a)$$

$$-\cos. A = \cos. B \cos. C - \sin. B \sin. C \cos. a$$

Relation entre deux côtés et deux angles dont l'un est compris et l'autre adjacent. A.B.a.c. — Il faut faire disparaître b de la formule fondamentale, et y introduire la nouvelle donnée B.

Cette formule $\cos. a = \cos. b \cos. c + \sin. b \sin. c \cos. A$, renferme le sinus et le cosinus de b.

Mais nous savons que

$$\cos. b = \cos. a \cos. c + \sin. a \sin. c \cos. B \quad \text{et} \quad \sin. b = \frac{\sin. a \sin. B}{\sin. A}$$

En substituant ces deux valeurs, on a

$$\cos. a = \cos. a \cos.^2 c + \sin. a \sin. c \cos. c \cos. B + \frac{\sin. a \sin. B}{\sin. A} \sin. c \cos. A$$

qui devient successivement

$$\cos. a \sin.^2 c = \sin. a \sin. c \cos. c \cos. B + \sin. a \sin. B \sin. c \cot. A$$

$$\cot. a. \sin. c = \cos. c \cos. B + \sin. B \cot. A.$$

157. Triangles rectangles. — Modifions les formules générales précédentes pour le cas où le triangle à résoudre est rectangle.

Puisque la somme des trois angles d'un triangle sphérique est comprise entre 200^g et 600^g, il s'ensuit qu'un triangle peut avoir un, deux et même trois angles droits ; mais nous n'aurons à nous occuper que du premier cas. En effet, s'il est bi-rectangle, les côtés opposés aux angles droits sont égaux entre eux et au quart de la circonférence ; le troisième angle et le troisième côté se mesurent l'un l'autre, et il faut que l'un des deux soit connu pour que le triangle soit déterminé.

Si le triangle est tri-rectangle, ses trois côtés sont eux-mêmes égaux à

un quart de circonférence ou à un angle droit, et sa surface est le huitième de la surface totale de la sphère.

En supposant donc un seul angle $A = 100^g$, on doit transporter $\sin. A = 1$, $\cos. A = 0$, dans les quatre formules générales.

La première devient $\cos. a = \cos. b \cos. c$, et elle indique que le cosinus de l'hypoténuse égale le produit des cosinus des deux autres côtés.

La deuxième se réduit à

$$\sin. a \sin. B = \sin. b \quad \text{ou} \quad \sin. a = \frac{\sin. b}{\sin. B}$$

c'est-à-dire, que le sinus de l'hypoténuse est égal au rapport de ceux de l'un des côtés de l'angle droit et de l'angle opposé.

La troisième devient $\cos. a = \text{cotang. } B \text{ cotang. } C.$

La quatrième ..... $\text{cotang. } a = \text{cosin. } B \text{ cotang. } c.$

Ces quatre formules ne sont pas les seules que l'on puisse déduire des quatre ou du moins des troisième et quatrième. Il est indifférent que, dans la seconde, ce soit A ou B qui vaille 100^g, puisqu'elle est symétrique par rapport à ces deux angles. La première ne renfermant que A, n'éprouvera aucune modification dans l'hypothèse de B ou C droits.

Supposons actuellement $B = 100^g$, dans les deux dernières, elles donneront

$$\cos. A = \sin. C \cos. a \qquad \text{cotang. } a \sin. c = \text{cotang. } A.$$

Pour les pouvoir comprendre dans les mêmes notations que les précédentes où a représente l'hypoténuse et A l'angle droit, changeons dans les deux dernières A en B, a en b, et écrivons

$$\cos. B = \sin. C \cos. b \quad \text{et} \quad \text{cotang. } b \sin. c = \text{cotang. } B.$$

Il est inutile de supposer $C = 100^g$, puisque la troisième équation fondamentale est symétrique par rapport à B et C, et que C n'entre pas dans la quatrième.

Rapprochant ces formules, nous avons donc pour la résolution des triangles rectangles, indépendamment de celles que ne modifie pas l'hypothèse,

$$\sin. a \times \sin. B = \sin. b. \qquad \text{cotang. } a = \cos. B \times \text{cotang. } c.$$
$$\cos. a = \cos. b \times \cos. c. \qquad \cos. B = \sin. C \times \cos. b.$$
$$\cos. a = \cot. B \times \cot. C. \qquad \text{cotang. } b \sin. c = \text{cotang. } B.$$

Nous remarquons que, composées de facteurs seulement, elles sont favorables à l'emploi des logarithmes.

158. Méthodes de résolution des triangles sphériques. — Les quatre formules générales sont théoriquement suffisantes pour satisfaire à tous les cas de résolution des triangles sphériques. Mais si l'on remarque que les lignes trigonométriques des angles ne nous sont connues que

par leurs logarithmes, on verra qu'excepté la seconde, les autres ne peuvent pas être résolues par logarithmes, du moins directement.

Trois procédés peuvent être employés pour cette résolution.

1° On peut se servir des formules mêmes trouvées jusqu'à présent. Pour cela on chercherait les logarithmes des lignes trigonométriques connus au moyen des tables. La table des logarithmes des nombres ferait connaître les nombres répondant à ceux-ci, dont on aurait eu soin de retrancher 10 à la caractéristique, le rayon ayant été supposé égal à 10^{10} dans la construction de ces tables pour simplifier les écritures. Les nombres ou rapports qui représentent les lignes trigonométriques qui entrent dans la formule, étant connus, on calculerait séparément chacun des termes qui la composent et on ajouterait les résultats avec leurs signes. On connaîtrait ainsi le nombre qui exprime la ligne trigonométrique de l'inconnue. La table des logarithmes des nombres en donnerait le logarithme, et celle des lignes trigonométriques ferait connaître définitivement l'angle correspondant après avoir eu soin de rétablir l'hypothèse du rayon égal à 10^{10}. Pour diminuer la longueur des calculs, on effectuerait les produits partiels au moyen même des logarithmes en ajoutant les logarithmes trouvés pour les lignes trigonométriques, avant de chercher le nombre correspondant.

Ce moyen de résolution est long et peu commode ; aussi devra-t-on en éviter l'emploi toutes les fois que cela sera possible. Cette possibilité existe pour la résolution des triangles sphériques, mais il peut se présenter des circonstances dans lesquelles on ait à appliquer une formule quelconque non préparée pour l'usage des logarithmes, et dans ce cas il pourra être employé. Ce n'est qu'en prévision de cette circonstance que nous l'avons indiqué, et que nous y ajoutons un exemple numérique propre à en rendre la marche plus évidente.

Soit à appliquer la formule $\cos. a = \cos. b \cos. c + \sin. b \sin. c \cos. A$ dans laquelle $b = 75^{G},1726''$ $c = 88^{G},3009$ $A = 13^{G},1965$

		log. sin. b	$= 9,9661012$
log. cos. b	$= 9,5799860$	log. sin. c	$= 9,9926250$
log. cos. c	$= 9,2618252$	log. cos. A	$= 9,9906048$
log. cos. b cos. c	$= \bar{2},8418112$	log. sin. b sin. c cos. A	$= \bar{1},9493280$
cos. b cos. c	$= 0,0694722$	sin. b sin. c cos. A	$= 0,889873$
		cos. b cos. c	$= 0,069472$
		cos. a	$= 0,9593452$
		log. cos. a	$= 9,9819750$
		a	$= 18^{G},2151'',5$

2° Le procédé indiqué ci-dessus n'est pas toujours applicable, parce que l'inconnue peut entrer souvent sous deux formes différentes dans l'équation générale ; il en est ainsi, par exemple, du cas dans lequel b serait l'inconnue et a, c, A les données de la question traitée numérique-

ment. Il est vrai qu'il existe entre sin. b et cos. b, la relation $\sin.^2 b + \cos.^2 b = 1$ qui permettrait d'éliminer soit le sinus, soit le cosinus pour n'avoir plus qu'une inconnue ; mais en opérant ainsi, on aurait une équation finale très-compliquée du 2e degré.

On a de préférence recours à un des deux systèmes qui nous restent à mentionner ; le premier consiste à décomposer le triangle donné en triangles rectangles, ou, ce qui revient au même, à employer des inconnues auxiliaires qui permettent une résolution directe par l'emploi des logarithmes.

Nous reviendrons plus tard sur ce procédé à propos de l'étude des cas possibles qui peuvent se présenter dans la résolution d'un triangle sphérique.

3° Le troisième procédé consiste à rechercher quelques nouvelles formules qui soient immédiatement calculables par logarithmes.

159. Recherches des formules directement calculables par logarithmes. — La formule qui donne une relation entre les sinus des angles et ceux des côtés $\frac{\sin. A}{\sin. a} = \frac{\sin. B}{\sin. b} = \frac{\sin. C}{\sin. c}$ est immédiatement calculable par logarithmes. Deux nouvelles formules et leurs analogues déduites de la propriété de la pyramide supplémentaire, nous suffiront pour résoudre, conjointement à la précédente, tous les cas qui peuvent se présenter.

Formules qui donnent un angle en fonction des trois côtés. — Reprenons la formule fondamentale

$$\cos. a = \cos. b \cos. c + \sin. b \sin. c \cos. A$$ de laquelle on tire

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\sin. b \sin. c}$$

Nous en avons déjà conclu

$$\sin. A = \frac{2\sqrt{\sin. \frac{1}{2}(a+b+c) \sin. \frac{1}{2}(a+b-c) \sin. \frac{1}{2}(a+c-b) \sin. \frac{1}{2}(b+c-a)}}{\sin. b \sin. c}$$

qui est calculable par logarithmes et pourrait servir à trouver les trois angles connaissant les trois côtés. On n'emploie pourtant jamais cette formule, parce qu'on peut lui en substituer trois autres qui exigent un calcul un peu moins long.

Au lieu de chercher sin. A en fonction de cos. A, cherchons successivement cos. $\frac{1}{2}$ A et sin. $\frac{1}{2}$ A en fonction de cette même quantité.

On sait qu'on a généralement

$$\cos.^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{1 + \cos. A}{2} \qquad \sin.^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{1 - \cos. A}{2}$$

Substituant d'abord dans la première, on aura

$$2 \cos.^2 \tfrac{1}{2} A = 1 + \cos. A = 1 + \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\sin. b \sin. c}$$

$$= \frac{\sin. b \sin. c + \cos. a - \cos. b \cos. c}{\sin. b \sin. c.}$$

$$= \frac{\cos. a - \cos. (b+c)}{\sin. b \sin. c} = \frac{2 \sin. \frac{1}{2}(a+b+c) \sin. \frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin. b \sin. c}$$

$$\cos. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2}(a+b+c) \sin. \frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin. b \sin. c}}$$

On aurait de même en employant la seconde relation

$$2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} A = 1 - \cos. A = 1 - \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\sin. b \sin. c}$$

$$= \frac{\sin. b \sin. c - \cos. a + \cos. b \cos. c}{\sin. b \sin. c}$$

$$= \frac{\cos. (b-c) - \cos. a}{\sin. b \sin. c} = \frac{2 \sin. \frac{1}{2}(a+b-c) \sin. \frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin. b \sin. c}$$

$$\sin. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2}(a+b-c) \sin. \frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin. b \sin. c}}$$

En divisant ces deux formules l'une par l'autre, on en obtient une troisième

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2}(a+b-c) \sin. \frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin. \frac{1}{2}(a+b+c) \sin. \frac{1}{2}(b+c-a)}}$$

Ces trois formules peuvent être employées presque indifféremment pour trouver les angles en fonction des côtés. Remarquons cependant que la dernière est plus avantageuse dans le cas où la recherche doit s'étendre aux trois angles, car pour les valeurs de tang. $\frac{1}{2}$ B, tang. $\frac{1}{2}$ C, on devrait employer les mêmes facteurs que pour tang. $\frac{1}{2}$ A, en les combinant seulement d'une manière différente, tandis que la recherche des sinus ou cosinus de $\frac{1}{2}$ B et $\frac{1}{2}$ C exigerait l'emploi des logarithmes de ces quatre mêmes facteurs, et en outre ceux de sin. a, sin. b, sin. c. Remarquons encore que les tangentes variant plus rapidement que les sinus et les cosinus, pour des mêmes variations de l'angle, la même erreur absolue commise sur sin. $\frac{1}{2}$ A, cos. $\frac{1}{2}$ A ou tang. $\frac{1}{2}$ A répondra pour la dernière à une plus petite variation de l'angle, et donnera par conséquent cet angle à une plus grande approximation.

Formule qui donne un côté en fonction des trois angles. — En opérant sur la troisième des formules fondamentales, nous arriverions de même à trouver un côté en fonction des trois angles, mais il est plus simple d'appliquer à la pyramide supplémentaire les relations que nous venons de trouver plus haut entre les trois côtés et un angle quelconque. La marche à suivre serait la même pour les trois lignes trigonométriques cos. $\frac{1}{2} a$, sin. $\frac{1}{2} a$, tang. $\frac{1}{2} a$: aussi nous contenterons-nous de l'appliquer à la plus favorable, à la tangente. On a, en désignant toujours par

les lettres accentuées les éléments de la pyramide supplémentaire, $\text{tang.}\,\frac{1}{2}\,A' = \sqrt{\frac{\sin.\frac{1}{2}(a'+b'-c')\,\sin.\frac{1}{2}(a'+c'-b')}{\sin.\frac{1}{2}(a'+b'+c')\,\sin.\frac{1}{2}(b'+c'-a')}}$. Mais on sait que $A' = 200 - a$, $a' = 200 - A$, $b' = 200 - B$, $c' = 200 - C$; donc, en substituant, on aura,

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}(200-a) =$$

$$= \sqrt{\frac{\sin.\frac{1}{2}(200-A+200-B-200+C)\,\sin.\frac{1}{2}(200-A+200-C-200+B)}{\sin.\frac{1}{2}(200-A+200+B+200-C)\,\sin.\frac{1}{2}(200-B+200-C-200+A)}}$$

$$\text{tang.}\,(100-\tfrac{1}{2}a) = \sqrt{\frac{\sin.\,(100-\frac{1}{2}[A+B-C])\,\sin.\,(100-\frac{1}{2}[A+C-B])}{\sin.\,(300-\frac{1}{2}[A+B+C])\,\sin.\,(100-\frac{1}{2}[B+C-A])}}$$

Rappelons-nous que $\sin.\,(100-\alpha) = \cos.\,\alpha$, $\sin.\,(300-\alpha) = -\cos.\,\alpha$ et $\text{tang.}\,(100-\alpha) = \cot.\,\alpha$.

La formule deviendra alors

$$\cot.\,\tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{\cos.\frac{1}{2}(A+B-C)\,\cos.\frac{1}{2}(A+C-B)}{-\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)\,\cos.\frac{1}{2}(B+C-A)}}$$

Il ne nous reste plus à trouver que deux formules remarquables, et leurs analogues déduites de la pyramide supplémentaire, pour être à même de satisfaire à tous les cas possibles de résolution de triangles sphériques.

Analogies de Néper, formules qui donnent deux angles en fonction de deux côtés et de l'angle compris.—Reprenons encore les trois formules fondamentales symétriques

$$\cos.\,a = \cos.\,b\,\cos.\,c + \sin.\,b\,\sin.\,c\,\cos.\,A,$$

$$\cos.\,b = \cos.\,a\,\cos.\,c + \sin.\,b\,\sin.\,c\,\cos.\,B,\quad \cos.\,c = \cos.\,a\,\cos.\,b + \sin.\,a\,\sin.\,b\,\cos.C$$

et substituons la dernière successivement dans chacune des deux premières, on aura, pour la première substitution,

$$\cos.\,a = \cos.\,b\,(\cos.\,a\,\cos.\,b + \sin.\,a\,\sin.\,b\,\cos.\,C) + \sin.\,b\,\sin.\,c\,\cos.\,A$$

$$\cos.\,a\,\sin.^2\,b = \sin.\,a\,\sin.\,b\,\cos.\,b\,\cos.\,C + \sin.\,b\,\sin.\,c\,\cos.\,A$$

$$\cos.\,A.\,\sin.\,c = \cos.\,a\,\sin.\,b - \sin.\,a\,\cos.\,b\,\cos.\,C$$

La seconde substitution, faite au moyen d'une formule symétrique en a et b, dans une autre formule ne différant de la première employée qu'en ce que a est remplacé par b, A par B, et réciproquement, conduirait à un résultat analogue à celui qui vient d'être trouvé et n'en différant que par le changement de a en b et A en B. On aurait donc de même

$$\cos.\,B\,\sin.\,c = \cos.\,b\,\sin.\,a - \sin.\,b\,\cos.\,a\,\cos.\,C$$

En ajoutant les deux équations terme à terme, on obtient

$$(\cos.\,A + \cos.\,B)\,\sin.\,c = \sin.\,(a+b)\,(1-\cos.\,C)$$

Abandonnons un instant cette formule et prenons les rapports

$\frac{\sin. A}{\sin. a}=\frac{\sin. B}{\sin. b}=\frac{\sin. C}{\sin. c}$ qui peuvent nous fournir

$$\frac{\sin. A+\sin. B}{\sin. a+\sin. b}=\frac{\sin. A}{\sin. a}=\frac{\sin. C}{\sin. c}$$

$$\frac{\sin. A-\sin. B}{\sin. a-\sin. b}=\frac{\sin. A}{\sin. a}=\frac{\sin. C}{\sin. c}$$

$$(\sin. A+\sin. B)\sin. c=(\sin. a+\sin. b)\sin. C$$

$$(\sin. A-\sin. B)\sin. c=(\sin. a-\sin. b)\sin. C$$

Reprenant la première équation trouvée et la divisant successivement par les deux dernières, on aura d'abord

$$\frac{\cos. A+\cos. B}{\sin. A+\sin. B}=\frac{\sin. (a+b)}{\sin. a+\sin. b}\quad\frac{1-\cos. C}{\sin. C}$$

Mais on sait que

$$\cos. A+\cos. B=2\cos. \tfrac{1}{2}(A+B)\cos. \tfrac{1}{2}(A-B),$$

$$\sin. A+\sin. B=2\sin. \tfrac{1}{2}(A+B)\cos. \tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$1-\cos. C=2\sin.^2 \tfrac{1}{2}C \qquad \sin. C=2\sin. \tfrac{1}{2}C\cos. \tfrac{1}{2}C.$$

En appliquant ces formules au cas actuel, on aura

$$\frac{2\cos. \frac{1}{2}(A+B)\cos. \frac{1}{2}(A-B)}{2\sin. \frac{1}{2}(A+B)\cos. \frac{1}{2}(A-B)}=\frac{2\sin. \frac{1}{2}(a+b)\cos. \frac{1}{2}(a+b)}{2\sin. \frac{1}{2}(a+b)\cos \frac{1}{2}(a-b)}\ \frac{2\sin.^2 \frac{1}{2}C}{2\sin. \frac{1}{2}C\cos. \frac{1}{2}C}$$

$$\cot. \tfrac{1}{2}(A+B)=\operatorname{tang.} \tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos. \frac{1}{2}(a+b)}{\cos. \frac{1}{2}(a-b)}$$

$$\operatorname{tang.} \tfrac{1}{2}(A+B)=\cot. \tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos. \frac{1}{2}(a-b)}{\cos. \frac{1}{2}(a+b)}$$

Opérant de même pour la seconde division indiquée, on aura successivement

$$\frac{\cos. A+\cos. B}{\sin. A-\sin. B}=\frac{\sin. (a+b)}{\sin. a-\sin. b}\quad\frac{1-\cos. C}{\sin. C}$$

$$\frac{2\cos. \frac{1}{2}(A+B)\cos. \frac{1}{2}(A-B)}{2\sin. \frac{1}{2}(A-B)\cos. \frac{1}{2}(A+B)}=\frac{2\sin. \frac{1}{2}(a+b)\cos. \frac{1}{2}(a+b)}{2\sin. \frac{1}{2}(a-b)\cos. \frac{1}{2}(a+b)}\ \frac{2\sin.^2 \frac{1}{2}C}{2\sin. \frac{1}{2}C\cos. \frac{1}{2}C}$$

$$\operatorname{tang.} \tfrac{1}{2}(A-B)=\cot. \tfrac{1}{2}C\,\frac{\sin. \frac{1}{2}(a-b)}{\sin. \frac{1}{2}(a+b)}$$

Telles sont les deux formules connues sous le nom d'analogies de Néper, qui permettent de trouver deux angles par leur somme et leur différence quand on connaît le troisième angle et les côtés qui le comprennent.

Formules qui donnent deux côtés en fonction du troisième et des angles adjacents. — La pyramide supplémentaire va encore nous permettre de

résoudre le problème inverse. Il nous suffira pour cela d'appliquer à cette pyramide les deux analogies déjà trouvées. La première donnera :

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A'+B') = \text{cot.}\ \tfrac{1}{2}C' \frac{\cos.\ \frac{1}{2}(a'-b')}{\cos.\ \frac{1}{2}(a'+b')}$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(200-a+200-b) = \text{cot.}\ (100-\tfrac{1}{2}c) \frac{\cos.\ \frac{1}{2}(200-A-200+B)}{\cos.\ \frac{1}{2}(200-A+200-B)}$$

$$-\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(a+b) = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}c \frac{\cos.\ \frac{1}{2}(B-A)}{-\cos\ \frac{1}{2}(A+B)}$$

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(a+b) = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}c \frac{\cos.\ \frac{1}{2}(A-B)}{\cos.\ \frac{1}{2}(A+B)}$$

On trouverait de même pour la seconde

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(a-b) = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}c \frac{\sin.\ \frac{1}{2}(A-B)}{\sin.\ \frac{1}{2}(A+B)}$$

160. Résolution des triangles sphériques. — Les formules que nous avons trouvées suffisent à l'intelligence des cours de géodésie et d'astronomie, mais de plus elles sont encore suffisantes pour résoudre tous les cas que peuvent présenter les triangles sphériques.

Trois éléments sont nécessaires pour que le triangle sphérique soit défini ; il faut donc connaître trois de ces éléments. Les six quantités qui composent un triangle donnent vingt combinaisons trois à trois, mais qui se réduisent à six essentiellement distinctes seulement, en raison de la similitude des rôles joués par chacun des côtés, ainsi que de ceux des angles.

Ces six cas se résument de la manière suivante :

données	$a.b.c.$	$a.b.$A.	$a.b.$C.	A.B.C.	A.B.a.	A.B c.
inconnues	A.B.C.	B.C.c.	A.B.c.	$a.b.c.$	$b.c.$A.	$a.b.$C.

Passons-les successivement en revue, en indiquant la marche à suivre dans chacun d'eux.

Résolution du triangle dont les trois côtés sont connus. — Chacun des trois angles pourra être déterminé par une quelconque des formules qui donnent sin. $\frac{1}{2}$ A, cos. $\frac{1}{2}$ A, tang. $\frac{1}{2}$ A $=\sqrt{\ldots\ldots}$, de préférence par la dernière. Le signe + du radical conviendra seul, car chaque angle devant être plus petit que 200^g, la ligne trigonométrique de sa moitié devra être positive.

Le sinus qu'on trouvera répondrait également à deux angles supplémentaires, le cos. à deux angles supplémentaires à 400^g et la tangente à deux angles différents de 200^g, mais pour la même raison que précédemment, une seule valeur est convenable pour chacun des angles A.B.C, c'est celle qui serait plus petite que 100^g.

Ce cas ne donne donc lieu qu'à une seule solution.

Résolution du triangle dont deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux sont connus. — Les données étant $a.b.$A, on déterminera d'abord B au moyen de la proportion des quatre sinus, $\sin. B = \frac{\sin. A \sin. b}{\sin. a}$. Mais à ce sinus répondront deux valeurs B et B′, supplémentaires l'une de l'autre, convenables toutes deux, quelquefois du moins.

Pour déterminer le troisième angle C, on se servira d'une des analogies de Néper,

$$\cot. \tfrac{1}{2} C = \text{tang}. \tfrac{1}{2} (A + B) \frac{\cos. \frac{1}{2} (a + b)}{\cos. \frac{1}{2} (a - b)}$$

dans laquelle on substituera, outre les données, successivement les deux valeurs de B trouvées précédemment. Chacune d'elles fournira une valeur correspondante de cot. $\frac{1}{2}$ C. Mais observons que C, devant être $< 200^{g}$, $\frac{1}{2}$ C sera plus petit que 100^{g}, sa cotangente devra être positive et ne correspondre qu'à un seul angle pouvant appartenir à un triangle sphérique.

Il pourra donc se faire que les substitutions des deux valeurs de B, donnant pour cot. $\frac{1}{2} c$, soit deux valeurs positives, soit une positive, soit deux négatives, conduisent à deux solutions, à une seule, ou à aucune.

Enfin, la dernière inconnue c pourra être déterminée par la formule

$$\sin. c = \frac{\sin. C. \sin. a}{\sin. A}$$

qui donnera autant de valeurs pour sin. c qu'on en aura trouvé pour C, c'est-à-dire 2.1 ou 0. Chaque sinus ainsi trouvé répondra à deux angles supplémentaires, et cependant un seul des deux conviendra au triangle ; pour s'en assurer, il faut retourner à l'analogie

$$\text{tang}. \tfrac{1}{2} c = \text{tang}. \tfrac{1}{2} (a - b) \frac{\sin. \frac{1}{2} (A + B)}{\sin. \frac{1}{2} (A - B)} \text{ ou à son analogue.}$$

Cette formule fait voir que chaque valeur de B n'en donne qu'une de tang. $\frac{1}{2} c$, et comme $\frac{1}{2} c < 100^{g}$, il n'y a pas lieu de prendre l'autre angle répondant à la même tangente et qui différerait du premier de 200^{g}.

Quand rien n'aura pu faire connaître d'avance la valeur approchée de c, il faudra agir comme ci-dessus, quoique l'application de la formule $\sin. c = \frac{\sin. c \sin. a}{\sin. A}$ soit plus simple que celle de l'analogie.

En résumé, le cas actuel pourra donc fournir deux solutions, une seule, ou pas du tout.

Résolution du triangle dont deux côtés et l'angle compris sont connus. — Les données sont $a.b.c$. Les analogies de Néper feront connaître tang. $\frac{1}{2}$ (A + B) et tang. $\frac{1}{2}$ (A — B), par suite les deux angles $\frac{1}{2}$ (A + B) et $\frac{1}{2}$ (A — B). Les tangentes répondent à la vérité à deux angles différents entre eux de 200^{g}, mais observons que A et B devant chacun être $< 200^{g}$, on aura

$$200^g > \tfrac{1}{2}(A+B) > 0 \qquad 100^g > \tfrac{1}{2}(A-B) > -100^g$$

Ce qui fait que chacun de ces angles $\frac{1}{2}(A+B)$, $\frac{1}{2}(A-B)$ ne pourra avoir deux valeurs dont la cotangente soit la même, puisque les angles qui ont même cotangente doivent différer de 200^g.

La valeur à prendre sera toujours la plus petite en grandeur absolue.

La dernière inconnue c sera donnée par $\sin. c = \frac{\sin. C \sin. a}{\sin. A}$ qui répondra à deux angles supplémentaires paraissant convenir tous les deux, mais dont un seul pourra appartenir au triangle. Pour s'en assurer, il faudrait, comme dans le cas précédent, retourner à l'analogie de Néper, $\text{tang.} \frac{1}{2} c = \text{tang.} \frac{1}{2} a - b) \frac{\sin. \frac{1}{2}(A+B)}{\sin. \frac{1}{2}(A-B)}$ qui, pour un seul couple de valeur de A et B, ne donne qu'une valeur de c.

En résumé, ce troisième cas ne donne lieu qu'à une seule solution. Il nous resterait trois cas à examiner : ce sont ceux analogues aux trois que nous avons étudiés, dans lesquels les côtés remplacent les angles, et réciproquement. La grande analogie des rôles joués par les côtés et par les angles fait que la marche à suivre doit être identiquement la même : aussi nous croyons pouvoir nous dispenser de la détailler, et nous nous bornerons à indiquer les résultats auxquels conduiraient ces diverses circonstances.

Trois angles connus. Données A.B.C. — Ne donne lieu qu'à une seule solution.

Deux angles et le côté opposé à l'un d'eux. Données A.B.a. — Peut donner deux solutions, une seule, ou aucune.

Deux angles et le côté compris. Données A.B.c. — Ne donne qu'une seule solution.

Observons que les 1[er], 3[e], 4[e] et 6[e] cas, ne donnant qu'une solution, sont précisément ceux d'égalité des triangles sphériques, ce qui confirme ce que nous avons dit à ce sujet. Quant aux 2[e] et 5[e], ils peuvent quelquefois donner naissance à l'égalité : c'est le cas où les données sont telles qu'elles ne fournissent qu'une solution, mais cette égalité n'existe pas nécessairement lorsque deux solutions sont possibles.

161. Emploi d'inconnues auxiliaires. — Nous avons dit que les quatre formules principales qui fournissent toutes les relations qui peuvent exister entre trois quelconques des éléments connus d'un triangle sphérique et un quatrième pris pour inconnue étaient théoriquement suffisantes pour tous les cas de résolution qui peuvent se présenter, mais que leur forme ne se prêtait pas toujours au calcul logarithmique, et que, de plus, certains angles y apparaissant sous des formes trigonométriques diverses, l'emploi direct de ces formules serait souvent embarrassant.

En employant des inconnues auxiliaires, on peut résoudre dans tous les cas ces quatre formules principales :

1° Dans la formule fondamentale $\cos. a = \cos. b \cos. c + \sin. b \sin. c \cos. A$, l'inconnue peut être A, *a* ou *c*, le troisième côté *b* jouant le même rôle que ce dernier.

L'angle A sera fourni par l'une des formules logarithmiques que nous avons trouvées.

Les deux autres quantités *a* ou *c* seront obtenues par le calcul suivant :

$$\cos. a = \cos. b\,(\cos. c + \sin. c \operatorname{tang}. b \cos. A) = \cos. b\,(\cos c + \sin. c \cot. \varphi)$$

$$= \frac{\cos. b \sin. (c + \varphi)}{\sin. \varphi}$$

en posant $\cot. \varphi = \operatorname{tang}. b \cos. A$.

Si *b* et A sont connus, la formule précédente donnera φ, qui, transportée dans la première, permettra de connaître *a* ou $c + \varphi$ et par suite *c*, suivant que *c* ou *a* sont connus;

2° La proportion des quatre sinus immédiatement calculable par logarithmes n'exige aucune transformation ;

3° La presque similitude qui existe entre l'équation $\cos. A = -\cos. B \cos. C + \sin. B \sin. C \cos. a$ et la formule fondamentale nous permettrait d'omettre l'indication de la marche à suivre. Indiquons-la néanmoins.

$$\cos. A = \cos. B\,(-\cos. C + \sin. C \operatorname{tang}. B \cos. a) = \cos. B\,(-\cos. C + \sin. C \cot. \varphi)$$

$$\cot. \varphi = \sin. B \cos. a \quad \text{et} \quad \cos. A = \frac{\cos. B}{\sin. \varphi} \sin. (C - \varphi)$$

Si *a* est l'inconnue, elle sera trouvée par une formule logarithmique que nous avons précédemment indiquée. Si l'inconnue est A ou C, on la trouvera par la combinaison des deux formules précédentes ;

4° L'inconnue peut jouer quatre rôles différents dans la dernière des formules principales,

$$\cot. a \sin. c = \cos. c \cos. B + \sin. B \cot. A$$

Si cette inconnue est l'une des deux quantités *a* ou B, on opérera de la manière suivante :

$$\cot. a \sin. c = \cos. c \left(\cos. B + \sin. B \frac{\cot. A}{\cos. c}\right)$$

$$\frac{\cot. A}{\cos. c} = \cot. \varphi, \qquad \cot. a = \frac{\cot. c}{\sin. \varphi} \sin.. (A + B)$$

Le calcul de *b* sera fait par suite de la connaissance de A et *c*, et la dernière équation fournira *a* ou B suivant les cas.

Si l'inconnue est *c* ou A, on disposera le calcul un peu différemment.

$$\cot. A = \frac{\cos. B}{\sin. B}\left(\sin. c \frac{\cot. a}{\cos. B} - \cos. c\right) \qquad \frac{\cot. a}{\cos. B} = \cot. \varphi$$

$$\cot. A = \frac{\cot. B \sin. (c - \varphi)}{\sin. \varphi}$$

La dernière équation donnant A ou $c - \varphi$, et par suite c, lorsque φ aura été préalablement calculé par le secours de la précédente.

CHAPITRE II

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES

162. Binôme de Newton. — La théorie dont nous allons nous occuper a pour but de rechercher suivant quelle loi se forme le développement d'une puissance quelconque d'un binôme, en fonction des deux termes de ce binôme et de l'exposant de la puissance.

Essayons d'abord la multiplication de plusieurs binômes n'ayant que le premier terme commun, et cherchons à distinguer la loi de formation du produit

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)\,x + ab$$

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 &+ (a+b)\,x^2 + abx \\ &+ \quad c\; x^2 + (ac+bc)\,x + abc\end{aligned}$$

Sans pousser plus loin les essais qui, en augmentant les écritures, ne nous apprendraient rien de nouveau, nous pourrons reconnaître que :

1° Le nombre des termes égale celui des facteurs plus un ;

2° L'exposant de x va en diminuant d'une unité depuis le nombre des facteurs jusqu'à zéro ;

3° Les coefficients de x sont formés comme il suit : le premier est l'unité, le deuxième est la somme des seconds termes des binômes, le troisième est la somme des produits différents de ces seconds termes pris deux à deux..... Enfin le dernier terme est le produit de tous ces seconds termes.

Ces lois, essayées sur un très-petit nombre de facteurs, se vérifieraient pour un nombre quelconque de ceux-ci. Cependant, cet essai ne pouvant pas être effectué indéfiniment, nous retirerons tout doute qui pourrait subsister à cet égard en prouvant que la loi reconnue vraie, par la vérification directe, pour un nombre quelconque de facteurs, l'est également pour ce même nombre augmenté d'une unité.

Supposons donc cette loi vérifiée pour n facteurs, de sorte que le développement du produit

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots.. + Mx + N$$

satisfasse aux conditions que nous avons posées précédemment.

Multiplions ce produit par un nouveau facteur $(x + \alpha)$; nous aurons comme résultat

$$\begin{array}{l} x^{n+1} + Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots.. + Mx^2 + Nx \\ \quad + ax^n + Aax^{n-1} + \ldots.. \qquad + Max + Na \end{array}$$

qui, en se reportant aux valeurs hypothétiques de A, B... M, N, sera reconnu être formé suivant la même loi. La règle indiquée pour la formation du produit est donc générale.

Pour arriver au but vers lequel nous nous dirigeons, la formation d'une puissance, il nous faut supposer que tous les facteurs du produit que nous avons examiné deviennent égaux. Faisons donc cette hypothèse, et le produit de m facteurs égaux à $x + a$, ou la puissance m de ce binôme deviendra

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots.. + Mx + N$$

développement dans lequel, A représentant primitivement la somme des seconds termes des binômes, sera devenu ma quand tous ces seconds termes seront devenus égaux à a. Le second coefficient B représentait primitivement la somme des produits différents de ces seconds termes pris deux à deux ; devenus égaux, leurs produits sont le carré de chacun d'eux, et ce carré doit être répété autant de fois qu'il y avait de produits différents, c'est-à-dire autant de fois qu'on peut former de combinaisons différentes avec m lettres $a.b.c.....$ et ainsi de suite. En sorte que le développement peut s'écrire

$$(x + a)^m = x^m + max^{m-1} + B'a^2x^{m-2} + C'a^3x^{m-3} + \ldots.. M'ax^{m-1} + N'a^m$$

B', C'....., M', N' étant les *nombres* de combinaisons ou de produits différents qu'on peut former avec m choses ou lettres, en les prenant 2 à 2, 3 à 3..... $m-1$ à $m-1$ et enfin m à m, ce dernier nombre étant évidemment égal à l'unité.

Afin de pouvoir préciser la valeur exacte de chacun de ces coefficients, il est indispensable d'étudier encore subsidiairement certaines théories algébriques que nous allons passer en revue.

Arrangements. — Soient $a.b.c.d.....$ m lettres différentes. Si on prend chacune d'elles isolément, on a m arrangements un à un.

Si, prenant une quelconque de ces m lettres, on la place successivement après chacune des $m-1$ autres, on a $m-1$ arrangements deux à deux. La même opération pouvant se faire pour chaque lettre, le nombre total des arrangements deux à deux sera de $m(m-1)$.

De même si, prenant un quelconque des arrangements deux à deux, on le porte à côté des $m-2$ lettres restantes prises isolément, on aura autant d'arrangements trois à trois, qu'il y a de lettres disponibles, c'est-à-dire $m-2$: mais comme l'opération peut se répéter de même pour chacun des arrangements deux à deux, il est possible de faire un nombre total d'arrangements trois à trois marqué par $m(m-1)(m-2)$.

En généralisant la loi évidente qui résulte des trois essais qui viennent d'être tentés, on pourra dire que le nombre d'arrangements possibles n à n avec m lettres différentes est de

$$m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)$$

Mais cependant comme cette loi n'a été qu'un résultat d'expériences qui n'ont pas pu être poussées très-loin, il convient de prouver sa généralité en faisant voir que, vraie par expérience pour un certain nombre, elle le sera encore pour le nombre plus fort d'une unité. Ainsi supposons qu'elle ait été reconnue exacte comme nous l'avons écrite plus haut, et prouvons qu'elle le sera encore pour le nombre d'arrangements $n+1$ à $n+1$.

Prenons un des arrangements n à n et portons-le successivement à la suite de chacune des lettres restantes qui sont au nombre de $m-n$. Cette opération donnera le même nombre $m-n$ d'arrangements $m-n+1$ à $m-n+1$. Mais comme on peut la répéter autant de fois qu'il y a d'arrangements n à n, il s'ensuit que le nombre total des arrangements $n+1$ à $n+1$ est de $m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)(m-n)$. La loi de formation est donc générale.

Permutations. — Parmi les arrangements obtenus comme nous venons de l'indiquer, plusieurs sont formés par les mêmes lettres placées dans un ordre différent : ainsi dans les arrangements trois à trois, se trouvent successivement *abc, acb, bac, bca, cab, cba,* tandis que dans la formation des coefficients A'B'C'. M'. N' du développement dont nous voulons connaître la formation, il n'entre que les nombres de produits différents. Pour avoir ces nombres, il est évident qu'il suffit de diviser les nombres d'arrangements par les nombres de ceux qui sont semblables dans chaque groupe et qu'on appelle permutations. Il nous faut donc rechercher ces derniers nombres. Pour cela dans l'expression générale

$$m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)$$

qui représente le nombre d'arrangements de m lettres prises n à n, il suffit de supposer $m=n$, ce qui donne pour les permutations n à n.

$$n(n-1)\ldots\ldots 2.1.$$

Combinaisons. — L'expression générale du nombre de combinaisons est donc

$$\text{Combinaisons de } m \text{ lettres, prises } n \text{ à } n = \frac{\text{arrang. de } m \text{ lettres } n \text{ à } n}{\text{permutat. de } n \text{ lettres}}$$

$$= \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n}$$

Puissance du binôme. — Revenant au développement de la puissance m du binôme $x+a$, nous n'aurons qu'à faire n successivement égal à $2.3\ldots\ldots m$ pour avoir les valeurs des coefficients $A'.B'.C'\ldots\ldots M'.N'$, ce qui donnera pour la formule complète

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2}$$

$$+\ldots\ldots\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots\ldots n}a^nx^{m-n}+\ldots\ldots+a^m.$$

163. Généralisation de la formule. — Pour arriver au résultat précédent, nous nous sommes appuyé sur une suite de multiplications directes dont le nombre est marqué par n. La formule ne s'applique donc, du moins jusqu'à présent, qu'au cas où l'exposant de la puissance est entier et positif. Il s'agit actuellement de prouver qu'elle est également vraie, quand cet exposant est fractionnaire ou négatif, ou l'un et l'autre à la fois.

Pour la facilité de la démonstration, transformons l'équation prouvée exacte pour m entier et positif, en la suivante

$$\left(1+\frac{a}{x}\right)^m = 1 + m\frac{a}{x} + \frac{m(m-1)}{2}\frac{a^2}{x^2} + \ldots . + \frac{a^m}{x^m}, \text{ ou en posant } \frac{a}{x} = z$$

$$\left(1+z\right)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2}z^2 + \ldots\ldots + z^m$$

Si nous supposons actuellement que m est quelconque, nous ne serons plus en droit d'égaler les deux membres de l'équation.

Cherchons ce que peut représenter le second membre, et désignons-le, pour simplifier les écritures, par $f(m)$,

$$1 + mz + \frac{m(m-1)}{2}z^2 + \ldots\ldots + z^m = f(m)$$

Prenons une seconde fonction de même forme

$$1 + nz + \frac{n(n-1)}{2}z^2 + \ldots\ldots + z^n = f(n)$$

dans laquelle n est aussi quelconque, et essayons leur multiplication Leur produit $f(m) \times f(n)$ sera

$$\begin{array}{l} 1 + m\,z + \frac{m(m-1)}{2}z^2 + \ldots\ldots + z^m \\ \quad + n\,z + \quad mn \quad z^2 \ldots\ldots \\ \qquad + \frac{n(n-1)}{2}z^2 \ldots\ldots \\ \qquad\qquad \ldots\ldots + z^{m+n}. \end{array}$$

Le coefficient de la 2e puissance de z peut s'écrire $\frac{m(m-1)+n(n-1)+2mn}{2}$ $=\frac{m(m+n-1)+n(m+n-1)}{2}=\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}$, en sorte que ceux des termes du produit que nous avons cherchés produisent en résultat

$$f(m).f(n)=1+(m+n)z+\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}z^2+\ldots\ldots+z^{m+n}$$

En admettant que les coefficients non inscrits suivent toujours la même loi de formation, ce dont on s'assurerait en poussant plus loin les multiplications directes, on peut remarquer que le second membre est un développement de même forme que $f(m)=1+mz+\ldots\ldots+z^m$, dans lequel m est remplacé par $m+n$. On est donc en droit d'écrire

$$f(m)\,f(n)=f(m+n)$$

le signe $f()$ désignant toujours un développement de la forme de celui dont nous cherchons la signification. On aurait de même

$$f(m)\,f(n)\,f(p)\ldots\ldots=f(m+n+p+\ldots\ldots)$$

En égalant $m.n.p\ldots$, on aura $f(m)^\alpha=f(m\alpha)$, équation dans laquelle m est quelconque, et α entier et positif puisqu'il exprime le nombre de multiplications effectuées, mais illimité depuis un jusqu'à l'infini.

Exposant fractionnaire. — L'exposant m étant supposé fractionnaire, on peut le représenter par une fraction dont les deux termes sont entiers. Choisissons α pour le dénominateur de cette fraction et posons $m=\frac{a}{\alpha}$, a et α étant entiers. Appliquons ici la formule $f(m)^\alpha=f(m\alpha)$, elle deviendra $f\left(\frac{a}{\alpha}\right)^\alpha=f(a)$. Mais a étant entier, la loi du développement du binôme lui est applicable, et $f(a)=(1+z)^a$, ce qui conduit à $f\left(\frac{a}{\alpha}\right)^\alpha=\left(1+z\right)^a$ ou $f\left(\frac{a}{\alpha}\right)=\left(1+z\right)^{\frac{a}{\alpha}}$. La loi applicable à l'exposant entier, l'est donc également à l'exposant fractionnaire.

Exposant négatif. — Nous avions trouvé d'abord l'équation $f(m)\,f(n)=f(m+n)$ dans laquelle m et n sont quelconques. On peut donc y supposer $m=-n$. D'où

$$f(m)\,f(-m)=f(o).$$

Si nous nous reportons à la forme du développement $1+mz+\ldots+z^m$ qui représente le signe f, nous verrons qu'en y faisant $m=o$, il se réduit à $f(o)=1$. Donc

$$f(m)\,f(-m)=1.\quad f(-m)=\frac{1}{f(m)}$$

mais si on suppose m positif (entier ou fractionnaire), la loi du binôme applicable à $f(m)$ donne $f(m)=(1+z)^m$. Par suite

$$f(-m)=\frac{1}{(1+z)^m}=\left(1+z\right)^{-m}$$

Donc enfin le développement

$$(1+z)^m=1+mz+\ldots\ldots+z^m$$

ou $$(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+\ldots\ldots+a^m,$$

qui n'en est que la reproduction, est applicable à une puissance quelconque d'un binôme.

Observations. — Le résultat auquel nous venons d'arriver ne s'applique qu'à la formule écrite et non pas aux lois énoncées au paragraphe précédent; on voit facilement, en effet, que si m est fractionnaire ou négatif, il ne peut jamais y avoir un dernier terme z^m puisque les exposants de z sont les nombres naturels entiers commençant à l'unité; les coefficients formés de facteurs de la forme $m-n$ dans lesquels n est entier, ne peuvent jamais devenir nuls, et par suite le nombre des termes du développement est infini.

Lors donc que m ne sera pas entier et positif, on ne pourra pas avoir la valeur exacte d'une puissance, et le binôme de Newton ne pourra servir qu'à trouver une valeur approximative d'autant moins différente de la valeur vraie, que la suppression des derniers termes aura moins d'influence, c'est-à-dire que z sera petit par rapport à l'unité en regard de laquelle il se trouve placé. C'est dans cette seule circonstance, hors le cas de m entier et positif, qu'il y aura lieu d'employer ce développement.

Si z est très-petit, on peut dans beaucoup de cas se contenter de prendre $(1+z)^m=1+mz$, ce qui est surtout avantageux pour des extractions de racine. L'hypothèse de $m=-1$ conduit à celle des formules approximatives qui est le plus généralement employée de la manière suivante :

$$\frac{1}{1+z}=(1+z)^{-1}=1-z+z^2-z^3\ldots\ldots \quad \frac{1}{1-z}=(1-z)^{-1}=1+z+z^2+z^3\ldots\ldots$$

équations qui, lorsque z est excessivement petit, peuvent être remplacées par $\frac{1}{1-z}=1+z$, résultat auquel on peut arriver, du reste, de cette autre manière,

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1+z}{(1-z)\,(1+z)}=\frac{1+z}{1-z^2}=1+z$$

si z^2 est négligeable. La première méthode est plus générale et plus avantageuse en ce sens qu'elle permet de tenir compte de z^2 et même des autres puissances lorsque z n'est pas assez petit pour qu'on puisse se contenter de conserver sa première puissance seulement.

164. Développements des sinus et cosinus en séries. — Les formules dans lesquelles entrent des lignes trigonométriques d'un angle offrent souvent de grandes difficultés de résolution. Pour tourner ces difficultés on a cherché des formules qui, ne renfermant que des puissances de l'angle lui-même, pussent être substituées avec avantage aux lignes trigonométriques.

Telle est l'origine des développements en séries des sinus et cosinus, en fonction de l'angle. Les formules que nous allons trouver sont d'un grand secours en géodésie : malheureusement elles ne sont applicables, comme nous le verrons plus tard, qu'à des angles petits, et elles ne sont avantageuses que lorsque ces angles sont très-petits.

Supposons qu'on puisse développer le sinus et le cosinus d'un angle en séries composées de termes renfermant en facteurs les puissances ascendantes de l'angle. Si, appliquant une propriété essentielle de ces lignes trigonométriques, nous arrivons à trouver des valeurs rationnelles des coefficients inconnus, notre supposition aura été fondée. C'est ce qui a lieu, en effet.

Pour éviter des écritures inutiles, observons d'abord que les sinus ne faisant que changer de signe en gardant leurs valeurs absolues, quand l'angle change lui-même de signe, le développement suivant les puissances de l'angle, ne devra renfermer, s'il est possible d'opérer ce développement, que les puissances impaires de l'angle. De même, dans des circonstances pareilles, le cosinus restant identiquement le même, ne devra contenir que les puissances paires.

Les développements ne pourront donc être que des formes suivantes :

$$\sin. x = Ax + Bx^3 + Cx^5 + \dots.$$
$$\cos. x = 1 + A'x^2 + B'x^4 + C'x^6 + \dots..$$

A.B.C..... A'.B'.C'..... étant des coefficients numériques rationnels si les développements sont possibles. Les séries que nous venons d'écrire devant s'appliquer à tout angle, on doit avoir de même

$$\sin. h = Ah + Bh^3 + Ch^5 + \dots..$$
$$\cos. h = 1 + A'x^2 + B'x^4 + C'x^6 + \dots..$$

Le coefficient du terme indépendant a été pris égal à l'unité, parce que l'angle devenant nul, il faut que le cosinus devienne lui-même égal à un.

En appliquant la même loi de développement à l'angle $x+h$, on aura encore

$$\sin. (x+h) = A\,(x+h) + B\,(x+h)^3 + C\,(x+h)^5 \dots..$$
$$\cos. (x+h) = 1 + A'\,(x+h)^2 + B'\,(x+h)^4 + C'\,(x+h)^6 \dots..$$

Si les six séries que nous venons d'écrire sont vraies, leurs combinaisons le seront également. Les deux dernières qui représentent les sinus et cosinus d'une somme peuvent être remplacées par les deux suivantes :

$$\sin. x \cos. h + \cos. x \sin. h = A(x+h) + B(x+h)^3 + C(x+h)^5.....$$

$$\cos. x \cos. h - \sin. x \sin. h = 1 + A'(x+h)^2 + B'(x+h)^4 + C'(x+h)^5.....$$

Substituons dans les premiers membres, aux sinus et cosinus, leurs valeurs en séries, nous aurons

$$\begin{aligned} A(x+h)+B(x+h)^3+C(x+h)^5+\ldots &= (Ax+Bx^3+Cx^5\ldots)(1+A'h^2+B'h^4+\ldots) \\ &+ (Ah+Bh^3+Ch^5.....)(1+A'x^2+B'x^4+.....) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1+A'(x+h)+B'(x+h)^4+C'(x+h)^6\ldots &= (1+A'x^2+B'x^4\ldots)(1+A'h^2+B'h^4\ldots) \\ &- (Ax+Bx^3+Cx^5.....)(Ah+Bh^3+Ch^5.....) \end{aligned}$$

Effectuons les multiplications indiquées, développons les puissances des binômes suivant la loi de Newton et ordonnons suivant les puissances ascendantes d'une des deux lettres x et h, nous aurons

$$\begin{array}{llll} Ax & +A & h+3Bx & h^2+.....= \\ +Bx^3 & +3Bx^2 & +10Cx^3 & \\ +Cx^5 & +5Cx^4 & » & \\ » & » & » & \end{array} \begin{array}{llll} Ax & +A & h+AA'x & h^2+..... \\ +Bx^3 & +AA'x^2 & +BA'x^3 & \\ +Cx^5 & +AB'x^4 & +CA'x^5 & \\ » & » & » & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} 1 & +2A'x & h+A' & h^2+.....= \\ +A'x^2 & +4B'x^3 & +6B'x^2 & \\ +B'x^4 & » & » & \\ » & » & » & \end{array} \begin{array}{llll} 1 & -A^2x & h+A' & h^2+..... \\ +A'x^2 & -ABx^3 & +A'^2x^2 & \\ +B'x^4 & -ACx^5 & +A'B'x^4 & \\ » & » & » & \end{array}$$

Si une équation $M+Nx+Px^2+.....=o$ doit être satisfaite par toute valeur attribuée à la variable, il faut nécessairement que tous les coefficients des différentes puissances de cette variable soient nuls séparément. En effet, satisfaite par la valeur $x=o$, cette équation donne $M=o$, et il reste pour sa forme générale $Nx+Px^2+......=o$, qu'on peut remplacer par $N+Px+.....=o$, dans laquelle la supposition $x=o$, donne encore $N=o$ et ainsi de suite.

En appliquant ce genre de considérations aux deux développements suivant les puissances de h précédemment écrits, nous verrons que les coefficients de cette variable doivent être égaux dans les deux membres, ce qui donne

$$Ax+Bx^3+Cx^5.....=Ax+Bx^3+Cx^5....$$

identité qui ne conduit à rien, puis

$$\begin{aligned} A+3Bx^2+5Cx^4+..... &= A+AA'x^2+AB'x^4+....., \\ 3Bx+10Cx^3+..... &= AA'x+BA'x^3+CA'x^5..... \\ 2A'x+4B'x^3+..... &= -A^2x-ABx^3-ACx^5...., \\ A'+6B'x^2+..... &= A'+A'^2x^2+A'B'x^4+..... \end{aligned}$$

L'application du même principe à ces équations ordonnées suivant les puissances de la variable x, donnera, en égalant les coefficients des mêmes puissances de x

$$3B = AA' \qquad 5C = AB' \qquad 10C = BA'.....$$
$$2A' = -A^2 \qquad 4B' = -AB \qquad 6B' = A'^2.....$$

Remarquons encore que le développement du sinus, vrai dans tous les cas, doit l'être pour la limite possible zéro, donc $A = 1$, car vers cette limite l'angle et le sinus tendent à devenir égaux; les équations de condition doivent donc devenir,

$$A' = -\frac{1}{2} \quad B = -\frac{1}{2.3} \quad B' = \frac{1}{4} AB = \frac{1}{2.3.4}, \; C = \frac{1}{5} AB' = \frac{1}{2.3.4.5}......$$

Si l'on avait pris dans les développements un plus grand nombre de termes, on aurait trouvé un plus grand nombre des coefficients, mais ceux que nous avons obtenus sont suffisants pour faire reconnaître la loi de leur formation. En définitive, les deux développements des sinus et cosinus sont

$$\sin. x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + ...$$

$$\cos. x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + ...$$

Ces formules ne sont applicables qu'aux angles et non aux arcs par suite de l'hypothèse qui nous a fait prendre l'unité pour le cosinus de l'angle zéro. Pour avoir leurs analogues relatives aux arcs, il faudrait y rétablir le rayon. L'angle doit y être exprimé en rapport et non en unités angulaires quelconques, par suite de la seconde hypothèse qui a donné $A = 1$, en s'appuyant sur ce que la limite du rapport $\frac{\sin. x}{x}$ est l'unité quand l'angle est zéro, hypothèse qui a implicitement exigé que l'angle fût exprimé de la même manière que son sinus qui est forcément un rapport.

Les développements des sinus et cosinus ne seront utiles qu'autant qu'il sera permis de s'en tenir à un petit nombre de termes du développement, c'est-à-dire, que l'expression de l'angle en rapport sera petite, car alors les puissances iront en diminuant quand l'exposant augmentera. Plus l'angle sera grand, plus on devra conserver de termes, par conséquent plus la formule deviendra compliquée et d'un usage moins commode.

165. Développement de la tangente d'un angle petit. — Quoique moins souvent employé que les précédents, qui sont d'un usage très-fréquent, celui de la tangente est pourtant utile à connaître. Cherchons-le au moyen des deux précédents, pour le seul cas réellement utile, c'est-à-dire, pour celui où l'angle est assez petit pour qu'on puisse négliger un grand nombre de ses puissances, et bornons-nous seulement à la conservation de celles qui sont inférieures à la sixième. Nous aurons la suite des calculs très-simples.

$$\text{tang.}^2\, x = \frac{\sin.^2 x}{\cos.^2 x} = \frac{\sin.^2 x}{1-\sin.^2 x} = \sin.^2 x\,(1-\sin.^2 x)^{-1}$$

$$= \sin.^2 x\,(1+\sin.^2 x+\sin.^4 x)$$

$$\text{tang.}\, x = \sin.\, x\,(1+\sin.^2 x+\sin.^4 x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sin.\, x\left(1+\frac{\sin.^2 x}{2}+\frac{\sin.^4 x}{2}-\frac{1}{2.4}\sin.^4 x\right)$$

$$= \sin.\, x+\frac{\sin.^3 x}{2}+\frac{3}{8}\sin.^5 x$$

En substituant $\sin.\, x = x - \frac{x^3}{2.3}+\frac{x^5}{2.3.4.5}$, on aura

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang.}\, x = x - \dfrac{x^3}{2.3}+\dfrac{x^5}{2.3.4.5}\\ \qquad +\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{3x^5}{2.2.3}\\ \qquad\qquad +\dfrac{3x^5}{8}\end{array}\right\} = x+\frac{x^3}{3}+x^5\left(\frac{1}{2.3.4.5}-\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\right) = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{3.5}$$

La loi de formation du développement n'est pas aussi simple que celles des relatives aux sinus et cosinus. En cherchant le terme suivant, on le trouverait égal à $\frac{17x^7}{3.3.5.7}$ encore plus irrégulier que les précédents.

166. **Séries diverses.** — Le calcul différentiel donne les moyens d'arriver promptement aux développements de séries quelconques. Quoique ce genre de calcul soit étranger à un certain nombre des personnes qui auront à chercher des renseignements dans cet ouvrage, nous allons exposer succinctement la marche générale à suivre. Ceux qui n'en pourront pas suivre les détails trouveront du moins l'indication de séries autres que celles des sinus et cosinus, séries dont on peut avoir besoin, même alors qu'on n'en saurait pas découvrir la marche soi-même.

Le calcul différentiel est riche des deux théorèmes de Taylor et de Maclaurin; le premier se résume dans la formule

$$f(x+h) = y + y'\frac{h}{1}+y''\frac{h^2}{1.2}+y'''\frac{h^3}{1.2.3}+\cdots\cdots$$

dans laquelle y représente $f(x)$, et y', y', y'''..... sont les dérivées première, seconde, troisième....., ou les coefficients différentiels du 1er ordre, du 2e ordre..... de $f(x)$.

Le théorème de Maclaurin, qui n'est qu'une conséquence de celui de Taylor, se résume de même par la formule

$$f(x) = f(o)+\frac{x}{1}f'(o)+\frac{x^2}{1.2}f''(o)+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(o)+\cdots\cdots$$

$f(o)$, $f'(o)$, $f''(o)$..... étant les valeurs particulières de la fonction con-

sidérée $f(x)$, et de ses dérivées première, seconde, troisième..... lorsqu'on y introduit l'hypothèse $x = o$.

L'usage de ces deux théorèmes conduit rapidement aux principales séries en usage.

Développement du sinus. — Appliquons le théorème de Maclaurin.

$f(x) = \sin. x$ donne immédiatement par la différentiation

$$f'(x) = \cos. x,\ f''(x) = -\sin. x,\ f'''(x) = -\cos. x. \ldots.$$

L'hypothèse $x = o$, conduit à

$$f(o) = \sin. o = o,\ f'(o) = 1,\ f''(o) = o,\ f'''(o) = -1,$$
$$f''''(o) = o,\ f'(o) = 1. \ldots.$$

La substitution dans la formule de Maclaurin donne de suite

$$\sin. x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5}. \ldots.$$

Développement du cosinus. — On a successivement

$$f(x) = \cos. x, f'(x) = -\sin. x,\ f''(x) = -\cos. x,\ f'''(x) = \sin. x,\ f''''(x) = \cos. x$$
$$f(o) = 1,\ f'(o) = o,\ f''(o) = -1,\ f'''(o) = o,\ f''''(o) = 1. \ldots.$$

et la substitution donne

$$\cos. x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4}. \ldots.$$

Développement de la tangente. — L'application du même théorème de Maclaurin donne

$$f(x) = \text{tang}. x,\quad f'(x) = \frac{1}{\cos.^2 x},\quad f''(x) = \frac{2\sin. x}{\cos.^3 x},$$
$$f'''(x) = \frac{2\cos.^2 x + 6\sin.^2 x}{\cos.^4 x}. \ldots$$

l'hypothèse $x = o$, conduit à

$$f(o) = o,\ f'(o) = 1,\ f''(o) = o,\ f'''(o) = 2,\ f''''(o) = 8. \ldots$$

qui, substitués, donnent

$$\text{tang}. x = x + \frac{x^3}{1.3} + \frac{2x^5}{1.3.5} + \frac{17x^7}{3.3.5.7}. \ldots.$$

Développement de l'exponentielle e^x. — Toutes les dérivées sont égales à la fonction elle-même

$$f(x) = e^x = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \ldots.$$

L'hypothèse $x = o$ donne alors

$$f(o) = f'(o) = f''(o) = \ldots. = 1$$

et l'application de la formule de Maclaurin donne

$$e^x = 1 - x - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3}.$$

Développement de l'exponentielle a^x. — On a successivement

$$f(x) = a^x,\ f'(x) = a^x \log.\ a,\ f''(x) = a^x \log.^2 a,\ f'''(x) = a^x \log.^3 a \ldots\ldots$$

le logarithme de a étant pris dans la base e.

L'introduction de $x = o$ dans ces diverses dérivées donne

$$f(o) = 1,\ f'(o) = \log.\ a,\ f''(o) = \log.^2 a,\ f'''(o) = \log.^3 a \ldots\ldots$$

et la substitution conduit de suite à

$$a^x = 1 - x \log.\ a - \frac{x^2}{1.2} \log.^2 a - \frac{x}{1.2.3} \log.^3 a - \ldots\ldots$$

Développement du logarithme en fonction du nombre. — Le théorème de Maclaurin conduit à un résultat dans lequel les termes sont l'infini positif et l'infini négatif, ce qui ne fait rien connaître. Il faut remonter à l'emploi du théorème de Taylor, dont nous transcrivons de nouveau l'expression algébrique,

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\frac{h}{1} + f''(x)\frac{h^2}{1.2} + f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3} \ldots\ldots$$

Au lieu d'y supposer $x = o$, ce qui conduirait au théorème de Maclaurin, posons $x = 1$, nous aurons

$$f(1+h) = f'(1) + f(1)\frac{h}{1} + f''(1)\frac{h^2}{1.2} + f'''(1)\frac{h^3}{1.2.3} \ldots\ldots$$

Le cas à traiter actuellement est celui de la fonction logarithmique népérienne ; cherchons-en les dérivées successives.

$$f(x) = \log.\ x,\ f'(x) = \frac{1}{x},\ f''(x) = -\frac{1}{x^2},\ f'''(x) = \frac{2}{x^3},\ f''''(x) = -\frac{h^3}{1.2.3} \ldots\ldots$$

L'introduction de l'hypothèse $x = 1$ donne à ces dérivées les valeurs particulières

$$f(1) = o,\ f'(1) = 1,\ f''(1) = -1,\ f'''(1) = 2,\ f''''(1) = -2.3 \ldots\ldots$$

dont la substitution dans $f(1+h)$ donne

$$f(1+h) = \log.\ (1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} \ldots\ldots$$

Le changement de signe de h donnerait

$$\log.\ (1-h) = -h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} \ldots\ldots$$

Le développement d'un logarithme pris dans la base a se déduira des

précédents en les multipliant par le module M, qui représente le logarithme de e pris dans le système dont la base est a.

$$\log. (1 \pm h) = \left\{ \pm h - \frac{h^2}{2} \pm \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{3} \cdots\cdots \right\} \times M$$

Développement du binôme. — Pour bien faire comprendre l'extrême facilité offerte dans certains cas par le théorème de Taylor, nous retrouverons en quelques lignes la loi du développement du binôme de Newton.

Soit $f(x) = x^m$. La formule de Taylor,

$$f(x+h = f(x) + f'(x)\frac{h}{1} + f''(x)\frac{h^2}{1.2} + \cdots\cdots$$

donnera, par la substitution des valeurs

$$f(x) = x^m,\ f'(x) = mx^{m-1},\ f''(x) = m(m-1)x^{m-2}\cdots\cdots$$

le développement

$$f(x+h) = (x+h)^m = x^m + mhx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}h^2x^{m-2} +, \text{ etc.}$$

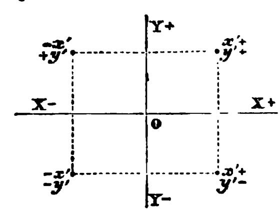
CHAPITRE III

NOTIONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

167. Nous avons vu en géodésie que la terre étant sensiblement un ellipsoïde de révolution, il était nécessaire de tenir compte de cette forme dans le développement de ses méridiens elliptiques et de ses parallèles circulaires ; pour rapporter ensuite les sommets de triangles, nous avons dit qu'il fallait préalablement obtenir les latitudes et longitudes de ces points. Cette recherche exigeant la connaissance de certaines lignes remarquables de l'ellipse génératrice, il est nécessaire d'étudier celle-ci pour en déduire les quantités qui nous sont indispensables ; nous le ferons au moyen de l'analyse appliquée qui, établissant des formules au moyen de propriétés géométriques, permet ensuite de manœuvrer algébriquement en formules, et d'en tirer des conséquences qui eussent été

d'une recherche difficile sans son secours, c'est-à-dire, par le seul emploi des considérations géométriques.

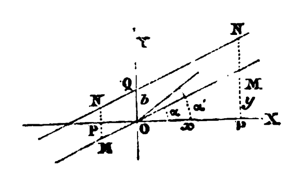
Si l'on trace deux lignes droites perpendiculaires OX, OY, on a un système de coordonnées orthogonales, le seul que nous emploierons, dans l'exposé très-succinct des notions de géométrie analytique que nous donnons dans le seul but spécial de leur emploi à la géodésie. Ces deux lignes sont dites axes des coordonnées, et on appelle abscisses et ordonnées les longueurs mesurées dans le sens OX et OY, en désignant habituellement ces longueurs par les signes génériques x et y supposés toujours conjugués, c'est-à-dire se rapportant à un même point et liés entre eux par une formule analytique. Les mêmes signes accentués, x' et y', seront supposés se rapporter à un point particulier précisé d'une manière quelconque.



Équation du point, de la ligne droite et du cercle. — Un point M sera connu, dans le système dont nous venons de parler, si on connaît ses distances x' et y' aux deux axes ; cependant comme rien n'indiquerait laquelle des quatre positions symétriques situées dans les quatre quadrans lui convient, on a établi la convention que les mêmes valeurs de x et y comptées en sens inverses sur les axes, seraient algébriquement affectées de signes contraires.

Une ligne étant composée d'une suite infinie de points contigus, toute équation à deux inconnues $f(x,y)=o$ pourra représenter une ligne dont la forme dépendra de la nature de la fonction ; en effet, si donnant à x toutes les valeurs possibles et croissant d'une manière insensible, on cherche les valeurs correspondantes de y, on obtiendra par cette suite de couples de x' et y', une suite continue de points composant une ligne continue. Cela est vrai généralement, mais il faut avoir pu déduire la forme de la fonction $f(x,y)=o$ d'une propriété bien définie de la courbe, et encore faut-il, pour pouvoir en tirer des conséquences utiles, que cette fonction soit d'une interprétation facile. Ces conditions sont satisfaites par un certain nombre de lignes dont les plus remarquables nous occuperont seules.

Ligne droite. — Par l'origine O menons une ligne droite OM formant un angle α avec la partie positive de l'axe des abscisses, et désignons par a la tangente de cet angle. Cette ligne sera précisée de telle sorte que le triangle rectangle MOP répondant à un point M quelconque de cette ligne, aura toujours le même angle α tel que



$$\text{tang. } \alpha = a = \frac{y}{x} \quad \text{ou} \quad y = ax$$

Cette équation, en supposant que les x et y soient toujours conjugués, c'est-à-dire qu'ils se rapportent au même point, appartiendra à tous les points de la ligne et à eux seuls ; elle la caractérisera par conséquent et elle sera son équation.

Si par le point Q tel que $OQ = b$, on mène une parallèle à OM, il est évident que les abscisses x restant les mêmes, toutes ses ordonnées y devront être augmentées de b, et par suite l'équation d'une ligne droite quelconque sera de la forme $y = ax + b$, équation dans laquelle a, coefficient de x quand celui de y est l'unité, représentera la tangente de l'inclinaison sur l'axe des x, et b la portion de l'axe des y comprise entre l'origine O et le point de rencontre de la ligne avec cet axe.

Angles de deux droites. — Soient $y = ax + b$, $y = a'x + b'$ les équations des deux droites, équations dans lesquelles x et y de chacune d'elles sont conjugués, mais diffèrent l'une de l'autre, si ce n'est pour le point de rencontre où ces valeurs sont précisées par la simultanéité, et qui s'obtiendraient facilement par la résolution des équations à deux inconnues.

Pour avoir l'angle des deux droites, menons-leur, par l'origine, deux parallèles inclinées d'angles α et α' tels que tang. $\alpha = a$, tang. $\alpha' = a'$. L'angle cherché sera $\alpha' - \alpha$ et sa tangente sera fournie par

$$\text{tang. } (\alpha' - \alpha) = \frac{\text{tang. } \alpha' - \text{tang. } \alpha}{1 + \text{tang. } \alpha' \text{ tang. } \alpha} = \frac{a' - a}{1 + aa'}.$$

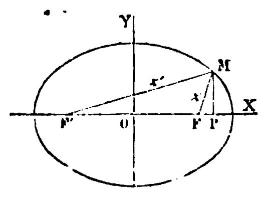
Pour que les lignes soient parallèles, il faut que $\alpha' - \alpha = o$ ou tang. $(\alpha' - \alpha) = o$, condition qui est satisfaite quand $a = a'$.

Pour qu'elles soient perpendiculaires, il faut que tang. $(\alpha' - \alpha) = \infty$, ce qui aura lieu avec $1 + aa' = o$ ou $a' = -\frac{1}{a}$

Équation du cercle. — La propriété fondamentale du cercle consiste en ce que tous les rayons sont égaux. Si son centre est à l'origine des coordonnées, cela conduit de suite à l'équation $r^2 = x^2 + y^2$. Si ce centre est placé en un point dont les coordonnées sont précisées par $x = x'$, $y = y'$, l'équation évidente de ce même cercle est

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$$

168. Équation de l'ellipse. — La propriété géométrique de cette courbe qui sera pour nous sa définition est la suivante : la somme des deux distances de chacun de ses points à deux points fixes, nommés foyers, est constante.



Les données seront donc cette constante $2a$ et la distance $2c$ qui sépare les foyers. Prenons pour axe des x la ligne qui passe par ces deux foyers F et F', et pour axe des y, la perpendiculaire élevée par le milieu

de FF'. Désignons les deux rayons vecteurs FM, F'M par z et z'; la condition essentielle sera $z + z' = 2a$ équation, qui avec $FF' = 2c$, précise complétement la courbe, mais qui la précise sous une forme algébrique qui, malgré son extrême simplicité, n'est pas aussi féconde qu'une autre équation dont les variables seraient les coordonnées rectangulaires dont nous nous sommes servi précédemment.

Pour pouvoir substituer x et y à z et z', il est nécessaire de trouver deux équations qui lient entre elles ces quatre quantités, de manière que, par leur combinaison avec l'équation fondamentale $z + z' = 2a$, on ait un système de trois équations qui permette l'élimination de deux des variables, z et z', qu'on désire faire disparaître. Ces deux équations seront fournies par les triangles rectangles FMP, F'MP qui donneront

$$z^2 = y^2 + (x - c)^2, \quad z'^2 = y^2 + (x + c)^2 \quad \text{avec} \quad z + z' = 2a$$

L'élimination de z et z' se fera facilement de la manière suivante :

$$z'^2 - z^2 = (z' - z)(z' + z) = (z' - z).\ 2a = 4cx, \quad z' - z = \frac{2cx}{a}$$

La combinaison de la dernière équation, avec $z + z' = 2a$ donne $z' = a + \frac{cx}{a}$, $z = a - \frac{cx}{a}$; une quelconque de ces deux valeurs substituée dans une des équations primitives, conduit à

$$z^2 = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2 = y^2 + (x - c)^2 \quad \text{ou} \quad a^2 + \frac{c^2 x^2}{a^2} - 2cx = y^2 + x^2 + c^2 - 2cx$$

$$y^2 + x^2 \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) = a^2 - c^2 \qquad a^2 y^2 + (a^2 - c^2)\, x^2 = a^2\,(a^2 - c^2)$$

En désignant par une seule lettre la différence $a^2 - c^2$ nous serons en droit de la représenter par le carré d'une quantité linéaire rationnelle b, puisque l'énoncé même de la question a sous-entendu que $2a > 2c$, et nous serons en droit d'écrire

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

Nous n'avons pas l'intention de discuter à fond les formules que nous présentons dans le présent chapitre, par suite du but seulement spécial que nous nous sommes proposé, mais nous sommes pourtant obligé d'entrer pour l'ellipse dans quelques détails, par suite de l'importance que joue cette courbe en géodésie, où elle représente le méridien terrestre, approximativement du moins.

La valeur de y tirée de l'équation précédente, $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ fait voir qu'aux mêmes valeurs de x, répondent deux valeurs de y, égales et de signes contraires; l'ellipse est donc symétrique par rapport à l'axe des abscisses. Le radical ne contenant x qu'à la seconde puissance, les valeurs égales et de signes contraires de cette quantité donneront des

mêmes résultats pour y ; l'ellipse est donc symétrique aussi par rapport à l'axe des ordonnées.

Pour que le radical ne devienne pas imaginaire, il ne faut pas que x devienne plus grand que a, et son maximum, $x = \pm a$ donne pour b un minimum égal à zéro. La courbe coupe donc l'axe des x en deux points symétriques tels que leur distance, appelé grand axe de l'ellipse, est égale à la longueur constante qui doit représenter la somme des rayons vecteurs.

Inversement, la plus petite valeur de l'abcisse, $x = o$, répond au maximum de $y = \pm b = \pm\sqrt{a^2 - c^2}$, qu'on appelle demi-petit axe de l'ellipse.

En résumé, l'ellipse est fermée, symétrique par rapport à ses deux axes, et les longueurs de ceux-ci sont le double des coefficiens a et b qui entrent dans son équation écrite sous la forme

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

Détermination algébrique de l'ellipse. — L'ellipse peut être déterminée par la connaissance de a, son demi-grand axe, qui précise sa dimension, et par une autre donnée qui précise sa forme. Cette détermination peut résulter d'un des quatre cas suivants :

1° a et c, 2° a et b;

3° a et $\frac{a-b}{a} = \alpha$ qu'on appelle aplatissement;

4° a et $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = \frac{a}{c} = e$ qu'on nomme excentricité.

Les deux dernières formes sont celles qu'on emploie en géodésie, l'aplatissement étant usité pour le langage et l'excentricité pour le calcul.

Il existe entre ces éléments, α et e, une relation approximative simple, applicable seulement aux ellipses peu aplaties, comme l'ellipse méridienne par exemple; elle est donnée par le calcul très-simple qui suit :

$$\alpha = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a} \qquad e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

$$\frac{b^2}{a^2} = (1-\alpha)^2 = 1 - 2\alpha + \alpha^2 = 1 - e^2, \quad e^2 = 2\alpha - \alpha^2$$

relation exacte, qui pour α très-petit, se simplifie et donne $e = 2\alpha$, c'est-à-dire que le carré de l'excentricité peut être pris égal au double de l'aplatissement.

Hyperbole. — Quoique parmi les trois sections coniques l'ellipse soit la seule qui soit employée en géodésie, nous ne pouvons complétement

passer sous silence les deux autres ; mais nous ne nous en occuperons que très-succinctement.

L'hyperbole est une courbe plane telle que la différence des distances de chacun de ces points, à deux points fixes appelés foyers, est constante. Si on conserve à $2a$ et $2c$ la même signification que dans la question relative à l'ellipse, on trouve, par un calcul identique, que l'équation de la courbe qui nous occupe est comme pour la première

$$a^2y^2 + (a^2 - c^2)\,x^2 = (a^2 - c^2)\,a^2$$

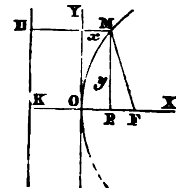
Mais ici la différence des rayons vecteurs, $2a$, doit être plus grande que le troisième côté d'un triangle, $2c$, et on doit poser $a^2 - c^2 = - b^2$, ce qui conduit à

$$a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2 \quad \text{ou} \quad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

équation qui fait voir que la courbe est encore symétrique dans les quatre quadrans, mais qui indique que x a un minimum $x = a$, et n'a pas de maximum, et que y a un minimum zéro répondant à celui de x, et n'a pas de maximum. La courbe se compose donc de quatre branches qui s'étendent jusqu'à l'infini.

Si on compare les valeurs de $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ à celles de la double équation $y = \pm \frac{b}{a} x$ qui représente deux lignes droites qui, passant par l'origine, seraient symétriques par rapport aux deux axes des coordonnées, on voit aisément que, pour des mêmes valeurs de x, leurs différences vont en diminuant à mesure que l'importance de a devient plus petite par rapport à x, c'est-à-dire, a étant constant, à mesure que x augmente. Ces deux lignes sont les assymptotes de l'hyperbole ; elles s'en rapprochent indéfiniment, en ne la rencontrant toutefois qu'à l'infini.

Parabole. — Les distances de chacun des points de la parabole à un foyer constant F et à une ligne droite fixe KH appelée directrice sont égales entre elles. Soit p la distance FK du foyer à la directrice ; prenons pour axe des x, la perpendiculaire menée du foyer à la directrice, et pour axe des y, une parallèle à celle-ci passant par le milieu de FK.



On devra avoir pour un point quelconque :

$$\text{MH} = \text{FM} \quad \text{ou} \quad x + \frac{p}{2} = \sqrt{y^2 + \left(\frac{p}{2} - x\right)}$$

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = y^2 + \frac{p^2}{4} + x^2 - px, \quad y^2 = 2px$$

La valeur de $y = \pm \sqrt{2px}$ fait voir que x ne peut pas être négatif, mais qu'à chacune de ses valeurs positives qui peuvent aller de zéro à l'infini, en répondent deux de y égales et de signes contraires, allant de zéro à $\pm$ l'infini; la parabole a donc deux branches symétriques par rapport à la perpendiculaire à la directrice, et elles s'étendent indéfiniment.

169. Équation de la tangente et de la normale à l'ellipse. — La tangente à une courbe est la ligne droite qui a, avec elle, deux points communs infiniment rapprochés.

L'équation de l'ellipse est $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. Soient $x'y'$, $x''y''$ deux de ses points dont les coordonnées doivent satisfaire à l'équation générale, de sorte que

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2 \quad \text{et} \quad a^2y''^2 + b^2x''^2 = a^2b^2$$

Nous allons chercher l'équation de la sécante passant par les deux points, et au moment où nous ferons confondre ceux-ci, c'est-à-dire quand leurs coordonnées deviendront égales, la sécante deviendra tangente.

Cherchons d'abord la forme de l'équation d'une ligne droite qui passe par deux points x', y', x'', y''; soit $y = mx + n$, cette équation dans laquelle m et n devront être remplacés en fonction des coordonnées données. On devra avoir

$$y = mx + n, \qquad y' = mx' + n, \qquad y'' = mx'' + n$$

$$y - y' = m(x - x') \qquad y' - y'' = m(x' - x'')$$

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x')$$

En supposant maintenant que les deux points appartiennent à l'ellipse, on devra chercher $\frac{y' - y''}{x' - x''}$ par le secours de l'équation de la courbe satisfaite par les coordonnées $x'y'$, $x''y''$. On y arrive par soustraction

$$a^2(y'^2 - y''^2) + b^2(x'^2 - x''^2) = 0 \qquad \frac{y' - y''}{x' - x''} = -\frac{b^2(x' + x'')}{a^2(y' + y'')}$$

et l'équation de la sécante $y - y' = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x' + x''}{y' + y''}(x - x')$ devient celle de la tangente en supposant les deux points confondus, c'est-à-dire, $x' = x''$, $y' = y''$, ce qui fournit pour l'équation de la tangente à l'ellipse, au point x', y'

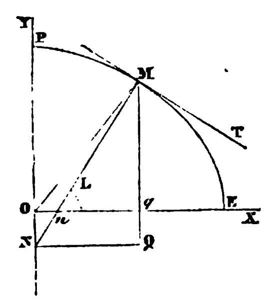
$$y - y' = -\frac{b^2x'}{a^2y'}(x - x')$$

Normale. — La normale devant passer par le même point x', y', son équation peut se mettre sous la forme $y - y' = m(x - x')$, en dési-

gnant par m un coefficient qu'il faut déterminer. Mais on sait que si l'équation de la tangente était mise sous la forme $y - y' = m' (x - x')$, on devrait avoir, par suite de la perpendicularité de la normale et de la tangente, $mm' + 1 = o$ ou $m = -\frac{1}{m'}$; en remettant à la place de m' la valeur $-\frac{b^2x'}{a^2y'}$ trouvée précédemment, on arrive à l'équation de la normale à l'ellipse

$$y - y' = \frac{a^2y'}{b^2x'} (x - x')$$

170. Valeurs de la grande et de la petite normale en fonction de la latitude. — On appelle grande normale la partie MN de la normale comprise entre la courbe et son point de rencontre avec le petit axe qui, sur la terre, est la ligne des pôles. La petite normale Mn est la partie correspondante comprise entre la courbe et le grand axe ou rayon de l'équateur.



La position d'un point placé sur l'ellipse est précisée, en géométrie analytique, par ses coordonnées ; en géographie et en géodésie, cette position résulte de la connaissance de la latitude qui n'est autre que l'angle L de la figure, formé par la normale avec l'axe des x, angle dont la tangente donnée par l'équation de la normale est

$$\text{tang. L} = \frac{a^2y}{b^2x}$$

en désignant ici par x et y un point quelconque de la courbe.

C'est en fonction de cette latitude, et non pas en fonction des coordonnées du point, que nous devons trouver la grande et la petite normale, et ces coordonnées ne doivent nous servir que d'intermédiaires pour exprimer que la méridienne est une ellipse.

En désignant par N et n la grande et la petite normale, les deux triangles MNQ, Mnq donnent

$$x = \text{N cos. L}, \qquad y = n \text{ sin. L}$$

d'où
$$\text{tang. L} = \frac{y}{x}\,\frac{\text{N}}{n} = \frac{a^2y}{b^2x} \quad \text{ou} \quad \text{N}b^2 = na^2$$

Transportons les deux valeurs de x et y fonctions de la latitude et des normales, dans l'équation générale de l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

et nous aurons éliminé x et y qui ne doivent pas figurer dans la recherche que nous faisons. On aura

$$a^2n^2 \sin.^2 L + b^2N \cos.^2 L = a^2b^2$$

Mais nous savons que les deux normales sont jointes par la relation $Nb^2 = na^2$ ou $n = \frac{b^2}{a^2}N$, et nous pouvons éliminer n, ce qui nous donnera

$$a^2 \frac{b^4}{a^4} \sin.^2 L. N^2 + b^2N^2 \cos.^2 L = a^2b^2$$

$$N^2\left(\cos.^2 L + \frac{b^2}{a^2} \sin.^2 L\right) = a^2, \quad N^2\left(1 - \sin.^2 L\left[1 - \frac{b^2}{a^2}\right]\right) = a^2$$

Cette formule résout la quéstion posée en donnant la grande normale en fonction de la latitude et de la forme de l'ellipse méridienne ; mais celle-ci s'y trouve précisée par ses deux axes, et il est plus commode pour les calculs de l'y faire connaître par le rayon de l'équateur et par l'excentricité. Nous savons que celle-ci

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad \text{et que par suite } e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

En substituant dans la valeur de la grande normale, nous aurons

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}$$

Petite normale. — Nous avons trouvé $a^2n = b^2N$; si nous mettons à la place de N la valeur ci-dessus trouvée, il vient

$$n = \frac{b^2}{a^2} N = \frac{b^2}{a^2} \frac{a}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}$$

Mais $e = 1 - \frac{a^2}{b^2}$ fournit $\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$, qui, substitué conduit à la valeur de la petite normale

$$n = \frac{a\,(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}} \cdot$$

171. Sous-normale et rayon central. — La sous-normale est la partie ON de la ligne des pôles comprise entre le centre et le pied de la normale. Cette ligne est, en grandeur absolue, la valeur de y de l'équation de la normale, qui répond à $x = o$. Cette équation étant

$$y - y' = \frac{a^2y'}{b^2x'}(x - x'), \quad x = o \text{ donne } y = y'\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)$$

et par suite la sous-normale $S_N = y\left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)$, en supposant que y dé-

signe l'ordonnée du point de la courbe, ce qui n'avait pas lieu dans l'équation précédente, ou y' avait cette signification particulière.

Nous avons trouvé précédemment, $y = n \sin. L$; en y mettant la valeur aussi trouvée, de la petite normale, nous aurons

$$S_N = n \sin. L \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right) = \frac{a(1-e^2)\sin. L}{(1-e^2\sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)$$

Mais $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ donne $\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$ et $\frac{a^2}{b^2} - 1 = \frac{1}{1-e^2} - 1 = \frac{e^2}{1-e^2}$

Donc la valeur de la sous-normale est finalement,

$$S_N = \frac{a\, e^2 \sin. L}{(1-e^2\sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}$$

On appelle aussi quelquefois sous-normale, la distance On analogue à ON, comptée sur l'équateur. Le triangle ONn donne la relation $\text{tang. } L = \frac{S_N}{S_n}$ ou $S_n = \frac{S_N}{\text{tang. } L}$, qui combinée avec la valeur de S_N conduit à $S_n = \frac{ae^2 \cos. L}{(1-e^2\sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}$.

Valeur approximative d'un rayon central. — En désignant par r ce rayon, il est évidemment lié à x et y par la relation $r^2 = x^2 + y^2$, et comme $y = n \sin. L$, $x = N \cos. L$, on peut écrire, en substituant aux normales, leurs valeurs trouvées précédemment,

$$r^2 = N^2\cos.^2 L + n^2 \sin.^2 L = \frac{a^2\cos.^2 L + a^2(1-e^2)^2\sin.^2 L}{1-e^2\sin.^2 L}$$

$$= \frac{a^2 + a^2 e^4 \sin.^2 L - 2a^2 e^2 \sin.^2 L}{1 - e^2 \sin.^2 L}$$

et en négligeant la quatrième puissance de l'excentricité qui est petite,

$$r^2 = \frac{a^2(1-2e^2\sin.^2 L)}{1-e^2\sin.^2 L}$$

Si on ajoute au numérateur $e^4 \sin.^4 L$ ce qui reviendra par la combinaison faite avec la première simplification, à substituer $e^4 \sin.^4 L$ à $e^4 \sin.^2 L$, ou à négliger $e^4 \cos.^2 L$, on commettra une erreur, il est vrai, mais elle sera très-petite, car ce terme supprimé est en regard de l'unité qui entre dans la parenthèse.

On aura alors, approximativement,

$$r^2 = \frac{a^2(1-e^2\sin.^2 L)^2}{1-e^2\sin.^2 L} = a^2(1-e^2\sin.^2 L)$$

ou

$$r = a(1-e^2\sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}$$

expression qui, comparée à $N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}$, donne $a^2 = rN$.

Sur le sphéroïde terrestre et dans une certaine limite d'approximation, le rayon équatorial est donc moyen proportionnel entre la grande normale et le rayon central correspondant.

Si on applique la formule précédente à la recherche du rayon de la latitude de 50^g, on trouve

$$R^2 = a^2 \left(1 - \frac{e^2}{2}\right), \quad R = a \left(1 - \frac{e^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Rapport d'un rayon à celui de la latitude de 50^g. — Ce rapport figure dans la formule barométrique. Il est donné immédiatement et approximativement, par

$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{1 - e^2 \sin.^2 L}{1 - \frac{e^2}{2}} = (1 - e^2 \sin.^2 L) \left(1 + \frac{e^2}{2}\right)$$

$$= 1 - e^2 \sin.^2 L + \frac{e^2}{2} = 1 + \frac{e^2}{2} (1 - 2 \sin.^2 L) = 1 + \frac{e^2}{2} \cos. 2.L$$

172. Rayon de courbure et rectification de l'ellipse. — Nous avons eu occasion, au § 91, de parler des cercles osculateurs aux différentes sections planes passant par un même point d'une surface, de l'ellipsoïde de révolution par exemple. Sans revenir sur ce que nous avons dit à ce sujet, nous voulons simplement chercher ici le rayon du cercle osculateur d'une ellipse connue par son grand axe et son excentricité, résultat qui pourra s'appliquer directement à l'ellipse méridienne, la plus importante des sections planes de l'ellipsoïde qu'on peut regarder comme représentant la surface terrestre. Nous avons fait usage de ce rayon de courbure au § 99.

Nous savons qu'une tangente est une ligne droite qui a, avec une courbe, deux points communs infiniment rapprochés ; le cercle osculateur est celui qui a trois points communs avec la courbe.

Pour trouver la traduction analytique de cette définition, considérons, d'une manière générale, quoique très-succincte, la théorie des courbes osculatrices.

Nous savons, d'après le théorème de Taylor, dont nous avons donné l'énoncé au § 166, que si x et y sont les coordonnées particulières d'un point d'une courbe dont l'équation générale est représentée par la fonction $y = f(x)$, on a généralement, en désignant par h un accroissement quelconque de x, par $f'(x)$, $f''(x)$....., les dérivées successives ou les coefficients différentiels de la fonction, et par y' la nouvelle valeur de l'ordonnée,

$$y' = f(x + h) = f(x) + f'(x) \frac{h}{1} + f''(x) \frac{h^2}{1.2} + f'''(x) \frac{h^3}{1.2.3} + \cdots\cdots$$

Considérons une seconde courbe dont l'équation soit $y = \varphi(x)$.

Si elle rencontre la première au point particulier x, y, il faut que $(x) = \varphi(x)$ pour la valeur particulière x.

En donnant à l'abscisse de la seconde courbe la même augmentation h que nous avons attribuée à la première, son ordonnée deviendra

$$y'_1 = \varphi(x+h) = \varphi(x) + \varphi'(x)\frac{h}{1} + \varphi''(x)\frac{h^2}{1.2} + \ldots\ldots$$

Les deux ordonnées y' et y'_1 des deux courbes seront généralement différentes, et leur différence sera

$$y' - y'_1 = f(x+h) - \varphi(x+h) = f'(x)\frac{h}{1} + f''(x)\frac{h^2}{1.2} + \ldots\ldots$$

$$- \varphi'(x)\frac{h}{1} - \varphi''(x)\frac{h^2}{1.2} = \ldots\ldots$$

puisque déjà $f(x) = \varphi(x)$ par suite de l'existence du premier point commun x, y.

Si l'on veut que les seconds points des courbes répondant à la nouvelle même valeur $x' = x + h$ soient communs, il faudra que

$$f'(x)\frac{h}{1} + f''(x)\frac{h^2}{1.2} + \ldots\ldots = \varphi'(x)\frac{h}{1} + \varphi''(x)\frac{h^2}{1.2} + \ldots\ldots$$

ou en supprimant le facteur commun h,

$$f(x) + f''(x)\frac{h}{1.2} + \ldots\ldots = \varphi'(x) + \varphi''(x)\frac{h}{1.2} + \ldots\ldots$$

tant que h sera fini, il n'y aura rien à conclure de cette équation renfermant h à toutes les puissances ; mais si l'on pose cette condition que h soit infiniment petit, elle se réduira à

$$f'(x) = \varphi'(x);$$

les courbes dont les équations sont $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ seront donc tangentes lorsqu'elles auront même coefficient différentiel du premier ordre.

Si pour limiter la question nous supposons que la seconde courbe $y = \varphi(x)$ soit la ligne droite ou le cercle, nous verrons que dans le premier cas l'équation de la ligne droite qui passe par le point fixe x, y ne renferme qu'une seule variable a.

$$Y - y = a(X - x), \quad \text{d'où} \quad \frac{dY}{dX} = a$$

et que par suite, la condition $f'(x) = \varphi'(x)$ donnera naissance à une équation où cette variable unique entrant seulement à la première puissance, sera déterminée. Il n'y a donc qu'une seule tangente en chaque point d'une courbe continue, et elle est précisée par l'équation $a = f'(x)$.

En examinant le cas du cercle dont les coordonnées générales seraient X et Y, et en désignant par α, β celles de son centre, nous verrons que son équation

$$(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2=R^2 \text{ différentiée donne } \frac{dY}{dX}=-\frac{\alpha-X}{\beta-Y}=\varphi'(X)$$

Si ce cercle passe le point particulier x, y, et s'il est tangent à la courbe dont l'équation est $f(x)=o$, il doit avoir même coefficient différentiel, pour le système particulier $X=x$, $Y=y$. Il en résulte donc

$$f'(x)=\varphi'(x)=\frac{\alpha-x}{y-\beta}$$

ce qui établit une relation entre les coordonnées α, β du centre du cercle tangent.

Cette équation unique, indépendante du rayon, fait déjà voir qu'en chaque point il y a une infinité de cercles tangents de rayons quelconques. Si, de plus, on la met sous la forme $\beta-y=-\frac{1}{f'(x)}(\alpha-x)$, on obtient une équation qui, en considérant α et β comme des coordonnées variables, appartient à une ligne droite passant par le point x, y, ligne qui est inclinée sur l'axe des x, d'un angle dont la tangente $=-\frac{1}{f'(x)}$ Tous les centres des cercles tangents sont donc situés sur la normale de la courbe, et tout point de cette normale peut être regardé comme le centre d'un cercle tangent.

Après avoir ainsi épuisé la question de la tangence, du moins pour la ligne droite et pour le cercle, revenons aux courbes osculatrices.

La condition $f'(x)=\varphi'(x)$ a été une conséquence de cette hypothèse que les deux courbes avaient deux points communs infiniment rapprochés. Désignons par x', y' les coordonnées du second point et établissons cette nouvelle condition qu'il y ait un troisième point commun infiniment rapproché. La communauté des deux seconds points a donné

$$f(x')=\varphi(x')$$

la condition relative au troisième fournirait par la même méthode employée en premier lieu

$$f'(x')=\varphi'(x')$$

ou

$$f'(x+dx)=\varphi'(x+dx)$$

ou encore

$$\frac{d.(y+dy)}{dx}=\frac{d(y_1+dy_1)}{dx}$$

en désignant pour un moment par y_1 l'ordonnée de la seconde courbe. que nous savons pourtant être la même que celle de la première. Donc enfin

$$\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{dx}=\frac{dy_1}{dx}+\frac{d^2y_1}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y_1}{dx^2},\qquad f''(x)=\varphi''(x)$$

puisque nous savons déjà que $\frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx}$ ou $f'(x)=\varphi'(x)$, et que le dx est le même.

Pour que deux courbes aient trois points communs infiniment rapprochés, il faut donc et il suffit que leurs équations aient mêmes coefficients différentiels du premier et du second ordre. Ces courbes sont alors dites *osculatrices* l'une à l'autre.

Observons encore que si la seconde courbe est un cercle, son équation renfermant seulement les deux coordonnées du centre, puisque le rayon pourrait être éliminé en vertu de la condition que le cercle passe par le point donné de la courbe, les deux équations $f'(x)=\varphi'(x)$, $f''(x)=\varphi''(x)$ suffiront pour déterminer le cercle osculateur qui ne présentera plus l'indétermination que nous avons trouvée pour le cercle tangent.

Occupons-nous maintenant d'appliquer les principes précédents à la recherche du rayon du cercle osculateur de l'ellipse, en fonction de la latitude d'un point de celle-ci.

Soit $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho$, l'équation du cercle osculateur, dans laquelle α et β représentent l'abscisse et l'ordonnée du centre, et ρ le rayon.

Différentions deux fois cette équation, et nous aurons

$$(x-\alpha)+(y-\beta)\,\frac{dy}{dx}=0$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-\beta)\,\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

en représentant $\frac{dy}{dx}$ par p, $\frac{d^2y}{dx^2}$ par q, il vient par la résolution des trois équations précédentes :

$$\beta-y=\frac{1+p^2}{q},\qquad x-\alpha=\frac{p\,(1+p^2)}{q}\qquad\text{et}\qquad \rho=\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

Pour exprimer que les deux courbes sont osculatrices, nous allons tirer aussi de l'équation de l'ellipse les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ et nous les égalerons à celles trouvées ci-dessus, ou, ce qui revient au même, nous les substituerons à p et q dans la valeur de ρ.

L'équation de l'ellipse est $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$. En la différenciant, nous trouvons

$$a^2ydy+b^2xdx=0\qquad\text{d'où}\qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

mais, $-\frac{b^2x}{a^2y}$ est la tangente trigonométrique de l'inclinaison de la tangente à l'ellipse sur l'axe des x ou la cotangente de la latitude correspondante ; on peut donc écrire

$$\frac{dy}{dx} = p = \text{cotang. L}$$

Prenons la différentielle seconde ; il viendra successivement,

$$a^2yd^2y + a^2dy^2 + b^2dx^2 = o, \quad 1 + \frac{a^2dy^2}{b^2dx^2} + \frac{a^2y}{b^2}\frac{d^2y}{dx^2} = o$$

$$1 + \frac{a^2}{b^2}p^2 + \frac{a^2y}{b^2}q = o, \quad 1 + \frac{a^2}{b^2}\text{cot.}^2 \text{L} + \frac{a^2y}{b^2}q = o$$

Mais il résulte des calculs du § 170 que, N désignant la grande normale,

$$\frac{a^2y}{b^2} = x \text{ tang. L} = \text{N cos. L tang. L} = \text{N sin. L}$$

et la substitution donne

$$1 + \frac{a^2}{b^2}\text{cot.}^2 \text{L} + q.\text{N sin. L} = o, \quad q = -\frac{1 + \frac{a^2}{b^2}\text{cot.}^2 \text{L}}{\text{N sin. L}}$$

Reprenons l'équation qui donne le rayon de courbure en fonction des deux coefficients différentiels p et q, et substituons-y les valeurs trouvées pour ceux-ci, en faisant abstraction du signe moins, puisque nous cherchons seulement la valeur absolue de ce rayon de courbure. Nous aurons,

$$\rho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} = \frac{(1 + \text{cot.}^2 \text{L})^{\frac{3}{2}}}{1 + \frac{a^2}{b^2}\text{cot.}^2\text{L}}\text{N sin. L} = \frac{\text{cosec.}^3 \text{L}}{\frac{b^2 \sin.^2 \text{L} + a^2 \cos.^2 \text{L}}{b^2 \sin.^2 \text{L}}} . \text{N sin. L}$$

$$\rho = \frac{b^2\text{N}}{b^2 \sin.^2 \text{L} + a^2 \cos.^2 \text{L}} = \frac{b^2\text{N}}{a^2 (1 - \sin.^2 \text{L}) + b^2 \sin.^2 \text{L}}$$

L'ellipse méridienne étant déterminée par le rayon de l'équateur et par l'excentricité, il y a lieu d'introduire celle-ci à la place du rayon polaire b, au moyen de la relation

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad b^2 = a^2 (1 - e^2)$$

ce qui donnera

$$\rho = \frac{a^2\text{N} (1 - e^2)}{a^2 (1 - \sin.^2 \text{L}) + a^2 (1 - e^2) \sin.^2 \text{L}} = \frac{\text{N} (1 - e^2)}{1 - e^2 \sin.^2 \text{L}}$$

Il résulte de cette équation que le rayon de courbure est plus petit que la grande normale, si ce n'est au pôle où ces deux lignes deviennent égales.

En substituant la valeur de $\text{N} = \frac{a}{(1 - e^2 \sin.^2 \text{L})^{\frac{1}{2}}}$, l'expression définitive du rayon de courbure de l'ellipse, en un point dont la latitude est L, devient,

$$\rho = \frac{a\,(1-e^2)}{(1-e^2\sin.^2 L)^{\frac{3}{2}}}$$

Rectification d'un arc d'ellipse. — La formule qui donne, en fonction de la grande normale, l'arc du parallèle, est exacte quelle que soit l'amplitude de cet arc ; mais il n'en est pas de même de celle qui fournit l'arc du méridien par l'emploi du rayon de courbure, lorsque la différence des latitudes extrêmes dépasse 1^g ou $1^g\frac{1}{2}$. Dans le cas où cette limite est dépassée, il faut avoir recours à la rectification d'un arc d'ellipse.

Considérons deux points du méridien infiniment rapprochés répondant à une différence de latitude dL ; les deux rayons de courbure correspondants pourront être regardés comme égaux, et en désignant par ds la longueur de l'élément de l'ellipse, on aura

$$ds = \rho\,dL = \frac{a\,(1-e^3)}{(1-e^2\sin.^2 L)^{\frac{3}{2}}}\,dL$$

En négligeant la quatrième puissance de e, on peut écrire $(1-e^2\sin.^2 L)^{-\frac{3}{2}} = 1+\frac{3}{2}e^2\sin.^2 L$, ce qui donne

$$ds = a\,(1-e^2)\,(1+\tfrac{3}{2}e^2\sin.^2 L)\,dL$$

ou

$$ds = a\,(1-e^2)\,[1+\tfrac{3}{4}e^2(1-\cos.2L)]\,dL$$

L'intégrale de cette expression est

$$s = a\,(1-e^2)\,[(1-\tfrac{3}{4}e^2)\,L-\tfrac{3}{8}e^2\sin.2L] + \text{Constante}.$$

S'il s'agit d'avoir l'arc compris entre deux latitudes L et L′, il faut prendre l'intégrale définie entre ces deux limites, et on a

$$s = a\,(1-e^2)\,[(1+\tfrac{3}{4}e^2)\,(L-L')-\tfrac{3}{8}e^2(\sin.2L-\sin.2L')]$$

En tenant compte de la quatrième puissance de e on aurait trouvé

$$s = a\,(1-e^2)\,\Big\{(1+\tfrac{3}{4}e^2+\tfrac{45}{64}e^4)\,(L-L')-\tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{4}e^2+\tfrac{15}{16}e^4)(\sin.2L-\sin.2L') + \tfrac{1}{4}\tfrac{15}{64}e^4(\sin.4L-\sin.4L')\Big\}$$

Résumé des principales lignes de l'ellipse méridienne.

$$N = \frac{a}{(1-e^2\sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}} \qquad n = \frac{a\,(1-e^2)}{(1-e^2\sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}$$

$$S_N = \frac{ae^2\sin.L}{(1-e^2\sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}} \qquad S_n = \frac{ae^2\cos.L}{(1-e^2\sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}$$

$$r = a\,(1-e^2\sin.^2 L)^{\frac{1}{2}} \qquad R_{50^g} = a\left(1-\frac{e^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{r^2}{R^2} = 1+\frac{e^2}{2}\cos.2L. \quad Nr = a^2. \quad \rho = \frac{a\,(1-e^2)}{(1-e^2\sin.^2 L)^{\frac{3}{2}}}$$

LIVRE V

OPTIQUE

La topographie et la géodésie exigeant l'emploi de quelques instruments d'optique, il est nécessaire que la personne qui doit s'en occuper, et, par conséquent, faire un fréquent usage de ces instruments, en connaisse bien la théorie. Il faut qu'elle soit à même de remédier aux dérangements accidentels qu'ils peuvent subir, et que ses connaissances théoriques lui permettent d'y apporter des modifications ou de les changer entièrement, si elle trouve des combinaisons nouvelles et préférables. Il faut surtout qu'elle puisse éviter, dans l'usage des instruments de précision, de commettre des erreurs qui détruiraient l'exactitude qu'on est en droit d'attendre de ces instruments.

CHAPITRE Ier

PHÉNOMÈNES GÉNÉRAUX

173. **Propriétés générales de la lumière.** — Nous ne nous occuperons que de celles de ces propriétés qui sont nécessaires pour comprendre la théorie des instruments optiques.

Nature de la lumière. — La lumière, comme tous les autres phénomènes de la nature, ne nous est connue que par ses effets : quant à sa composition intime, elle nous échappera probablement toujours. On ne

peut faire à cet égard que des hypothèses dont la meilleure serait celle qui expliquerait également bien tous les faits. Il n'en est point ainsi des deux admises aujourd'hui : l'une satisfait mieux dans certains cas et moins dans d'autres. Quoi qu'il en soit, nous allons dire quelques mots des deux systèmes :

Par le premier, on imagine que la lumière émanant d'un corps lumineux rayonne dans tous les sens et qu'elle se dirige en ligne droite avec une vitesse extrême, traverse les corps transparents, et n'est arrêtée dans sa marche que par les corps opaques. Ce seraient donc des particules du corps lumineux, des molécules, si l'on peut s'exprimer ainsi, infiniment petites et légères, qui se sépareraient de lui, par l'effet d'une force inhérente au corps.

Le second système suppose toutes les parties du corps animées d'un mouvement propre qui les fait osciller sans cesse autour d'une position moyenne. Ce mouvement, communiqué aux molécules d'un fluide sans poids appelé éther, produit ainsi, dans tous les sens, une multitude de vibrations qui, se propageant de proche en proche, produisent le phénomène de la vision, pour toute personne dont les yeux sont atteints par ces vibrations. Cette explication force à supposer que le vide parfait n'existe pas dans l'immensité qui nous sépare des astres, car, sans cela, nous ne les verrions pas.

Ce second système, dit des *ondulations*, réunit actuellement le suffrage de presque tous les physiciens.

Quoi qu'il en soit de ces théories spéculatives d'une grande importance pour la science, elles n'influeront en rien sur les explications élémentaires que nous avons à donner.

Marche de la lumière. — Dans un milieu *homogène* la lumière se meut en ligne droite. Cela est évident en soi-même, car pourquoi obliquerait-elle d'un côté plutôt que d'un autre ; toutes les directions jouant le même rôle dans le cas d'homogénéité. On peut s'assurer du reste qu'il en est ainsi, au moyen de deux plans disposés parallèlement, et qui laissent arriver la lumière tant qu'ils ne sont pas en contact, tandis que si on les courbe, on cesse d'apercevoir la lumière longtemps avant la coïncidence.

Intensité. — L'intensité de la lumière émanée d'un même corps et reçue sur des surfaces égales, varie en raison inverse du carré de la distance. Pour se rendre compte de cette loi, il suffit de supposer un corps lumineux placé successivement au centre de plusieurs sphères creuses opaques. Par ce moyen, tous les rayons lumineux seront employés à éclairer les différentes surfaces sphériques. Il résulte évidemment de là que ces surfaces seront d'autant moins lumineuses qu'elles auront plus d'étendue ; d'ailleurs, les surfaces sont entre elles comme les carrés de leurs rayons respectifs ; ces rayons représentent les distances du foyer

lumineux aux surfaces éclairées : donc l'intensité de la lumière, répandue sur un corps, est en raison inverse du carré de la distance.

Vitesse. — Par des observations astronomiques, et par des observations directes faites plus récemment que les premières, on est arrivé à estimer à 70,000 lieues par seconde, la vitesse de la lumière qui pourra alors être regardée comme infinie pour tous les phénomènes qui se passent à la surface de la terre.

Action de la lumière sur les corps. — Un faisceau de rayons lumineux arrivant sur un corps se partage en trois parties : l'une est absorbée, une autre renvoyée ou réfléchie, et la troisième réfractée traverse les corps.

Les proportions et même la nature de ces trois catégories de rayons lumineux, sont variables avec les substances, mais aucune d'elles n'est jamais complétement annulée.

Les rayons lumineux sont habituellement accompagnés d'autres rayons calorifiques et chimiques, dont nous n'avons pas à nous occuper.

Réflexion. — Le cas où l'influence de la réflexion est la plus grande est celui dans lequel la surface du corps est polie, et dans ce seul cas ses lois peuvent être étudiées. Nous ne nous occuperons, pour le moment, que des effets généraux produits par la réflexion sur les corps polis ; ces effets, confirmés par la théorie et vérifiés par l'expérience, sont les suivantes :

1° Pour chaque rayon lumineux, le plan formé par le rayon incident et le rayon réfléchi est normal à la surface réfléchissante, au point d'incidence ;

2° Les deux rayons réfléchi et incident, font, dans ce plan, le même angle avec la normale.

La quantité de lumière réfléchie dépend non-seulement de la nature du corps et de l'état de sa surface, mais encore de l'angle d'incidence, et même un peu de la couleur de cette lumière.

Pour l'eau, l'angle d'incidence (formé avec la normale) variant de 100° à 0°, la quantité de lumière réfléchie varie de 1 à 0,018, en supposant représentée par un, la quantité de lumière incidente.

Sur un miroir métallique, dans les mêmes circonstances, la réflexion varie de 1 à 0,6.

Réfraction. — Le cas où l'influence de la réfraction est la plus grande et le seul où on puisse l'étudier, est celui dans lequel le corps est transparent et terminé par une surface polie.

Les lois qui régissent le rayon réfracté, lois confirmées également par la théorie et par l'expérience, sont les deux suivantes :

1° Le rayon réfracté et le rayon incident sont dans le même plan normal à la surface de séparation, comme pour la réflexion ;

2° Pour chaque rayon *élémentaire*, le rapport des sinus des angles d'incidence et de réfraction est constant, quelle que soit l'incidence, mais variable avec la nature des deux milieux dans lesquels se meut le rayon lumineux, ce qui s'exprime par $\frac{\sin. i}{\sin. r} = n$, qu'on appelle indice de réfraction, indice toujours > 1 quand le second milieu est plus dense que le premier.

Dispersion. — Nous venons de dire que l'indice de réfraction est constant pour chaque rayon élémentaire; en effet, un rayon lumineux complet, c'est-à-dire blanc, est composé de sept rayons élémentaires, violet, indigo, bleu, vert, jaune, orangé et rouge, qu'on appelle les couleurs du prisme ; il est même presque certain que chacun de ceux-ci n'est pas unique, et qu'il se compose lui-même d'une infinité d'autres rayons produisant sur l'œil toutes les nuances intermédiaires entre les couleurs que nous avons énoncées. En sorte que, pour un même assemblage de deux milieux, il y a une infinité de valeurs de l'indice de réfraction, valeurs comprises entre un maximum et un minimum peu différents l'un de l'autre.

Réflexion totale. — Faisons abstraction, pour le moment, de cette variabilité de l'indice de réfraction, et supposons que n représente la moyenne des valeurs qu'il peut avoir dans un même système.

Pour le passage de l'air dans l'eau, cette moyenne sera . . . . $n = \frac{4}{3}$ environ.

Pour celui de l'air dans le verre. . . . . . . $n = \frac{3}{2}$

Si le rayon lumineux passait au contraire du second corps dans le premier, les indices prendraient les valeurs inverses $\frac{3}{4}$ et $\frac{2}{3}$, en sorte que les trajectoires seraient les mêmes, mais parcourues dans des sens opposés. Ce fait, qui n'est pas évident de lui-même, provient de ce que l'indice de réfraction est égal au rapport inverse des vitesses de la lumière dans les deux milieux.

En nous occupant seulement de la combinaison de l'air et du verre, on aura pour le passage d'un rayon lumineux allant du premier dans le second, $\frac{\sin. i}{\sin. r} = \frac{3}{2}$. L'incidence i peut prendre toutes les valeurs, depuis 0°, qui répond au rayon normal, jusqu'à 90° qui se rapporte au rayon rasant la surface; les valeurs correspondantes de l'angle de réfraction sont $r = o$ et $r =$ angle $\left(\sin = \frac{2}{3}\right) = 46°$, en sorte que tout l'espace angulaire situé dans le verre, entre la surface et une ligne inclinée de 46° sur la normale, n'est jamais occupé par des rayons réfractés.

Si nous considérons ensuite la marche inverse d'un rayon lumineux passant du verre dans l'air, nous savons que la trajectoire sera la même,

quoique parcourue en sens contraire ; en sorte que toutes les directions réfractées dans l'air répondront aux directions incidentes comprises entre 0° et 46°. Que deviendront alors les rayons qui tomberont sur la surface de séparation, sous des incidences > 46° ? Ne pouvant se réfracter, ils se réfléchissent dans l'intérieur du verre en suivant les lois ordinaires de la réflexion.

Cette même limite de réflexion totale est de 54° pour le passage de l'eau dans le verre, et elle existe pour tous les systèmes de deux milieux, en ayant des valeurs qui s'approchent d'autant plus de l'angle droit que les milieux ont des densités peu différentes.

Mirage. — L'atmosphère est diathermale, c'est-à-dire qu'elle n'arrête pas les rayons calorifiques, ou que du moins elle les arrête peu ; elle s'échauffe seulement au contact, en sorte que le calorique qu'elle contient lui est communiqué par la surface de la terre ; la diminution de densité qui en résulte pour la couche atmosphérique inférieure, en établissant des courants ascendants, transporte ensuite ce calorique dans les hautes régions. C'est là du moins l'explication qui nous semble rendre compte de la décroissance des températures avec la croissance des altitudes.

En général, la densité des couches d'air augmente à mesure qu'elles s'approchent de la terre, en raison de la pesanteur de l'air et conséquemment de la pression plus grande qu'elles exercent les unes sur les autres. De là résulte l'inflexion de la trajectoire lumineuse qui présente sa concavité au sol. Mais si, sous l'influence d'un soleil ardent, la terre vient à s'échauffer au delà de certaines limites, elle communique une partie de son excessive chaleur à la couche d'air en contact avec elle ; le mouvement ascensionnel a lieu, mais il peut se faire, s'il n'est pas surtout aidé par le vent, qu'il soit trop lent pour balancer le réchauffement continuel dû au contact, et alors la loi des densités peut se trouver intervertie, dans les parties inférieures du moins.

La trajectoire suivie par un rayon lumineux, d'abord concave dans les hautes régions, deviendra alors convexe dès qu'elle rencontrera, en s'abaissant, des couches d'air moins denses que les précédentes ; si le phénomène continue pendant une épaisseur suffisante de ces couches, et si, de plus, le rayon primitif est peu incliné à l'horizon, il pourra se faire que, se relevant toujours, il finisse par avoir sur la surface de séparation de deux couches consécutives le máximum d'incidence nécessaire pour la réflexion totale, et il se produira alors le phénomène appelé mirage, qui donne, par la seule présence de l'atmosphère, le même effet de réflexion qui serait produit par un miroir ou par la surface tranquille d'un lac.

On aperçoit quelquefois des mirages latéraux dont l'explication est la même que celle du mirage ordinaire ; ils sont dus à l'échauffement de parois latérales comme un mur, un rocher, échauffement qui se commu-

nique aux couches d'air en contact, en tendant à établir dans celles-ci une décroissance de densité allant dans le sens perpendiculaire au corps échauffé.

Nous avons indiqué plus haut comme point de rebroussement de la trajectoire lumineuse celui qui répond à l'incidence qui doit donner la réflexion totale, parce que cette explication est habituellement donnée. Exacte en elle-même, elle ne s'applique peut-être pas au cas actuel, car il s'agit ici de l'atmosphère, et la subdivision en couches n'est rigoureusement vraie qu'autant qu'on suppose à celle-ci une hauteur infiniment petite, c'est-à-dire à deux couches successives des densités infiniment peu différentes. Dans ce cas, l'angle d'incidence répondant à la réflexion totale ne devra différer de 100^g que d'un infiniment petit, et par conséquent le rayon lumineux ne reprendra une marche inverse pour s'élever dans l'atmosphère que lorsqu'il aura rasé une surface de séparation, et sans réflexion, le phénomène se produira par les réfractions inverses des premières. Il n'y a pas alors de point de rebroussement de la trajectoire, et elle passe d'une direction à une autre par degrés insensibles.

Lumière diffuse. — Tous les corps réfléchissent les rayons lumineux suivant les deux lois de la réflexion, quand ils ne sont pas d'un noir absolu qui n'existe du reste dans la nature que par suite d'absence totale de lumière. Mais l'effet produit par ces corps n'est pas le même sur les yeux des animaux.

Un rayon unique serait sans effet sur un appareil visuel quelconque; il faut, pour qu'il y ait efficacité, que la pupille soit embrassée, tout au moins partiellement, par un faisceau de rayons liés entre eux par une certaine loi, et se rapportant à un même point dont l'œil doit avoir sensation.

Si le corps est poli, tous les rayons lumineux émanés d'un même point sont réfléchis de manière que leur ensemble est encore uni par une loi qui peut différer de celle qui est la plus convenable pour la vision, mais qui existe pourtant, et qui alors, d'une façon plus ou moins dénaturée, peut donner une sensation du point de la nature et par suite de l'objet dont ce point n'est qu'un des éléments.

Si au contraire le corps n'est pas poli, s'il a des aspérités, chacun de ces petits éléments polis agira comme nous venons de le dire, mais en embrassant un faisceau trop mince pour la pupille de l'œil ; à ce faisceau viendront s'en joindre d'autres, qui, dus à d'autres petites facettes inclinées différemment et de formes différentes, iront se superposer, dans l'œil, à l'image due à la première facette; en sorte que deux effets superposés pourront provenir de faisceaux lumineux émanés de points différents de la nature. Si on songe au nombre infini de ces aspérités d'un corps non poli, on comprend facilement que l'effet de la réflexion se trouve changé. Dans le premier cas, il y avait image ou

apparence des objets naturels; dans le second, cette apparence n'existe plus, et il y a *diffusion*.

Il en est de même de la réfraction due à des corps transparents dont la surface n'est pas polie.

Presque tous les corps de la nature renvoient de la lumière diffuse, et heureusement en est-il ainsi, sans quoi on ne connaîtrait pas leurs formes ; chacune de leurs aspérités affectant une figure différente, orientée différemment, renvoie des faisceaux plus ou moins intenses, composés de rayons inclinés dans tous les sens et provenant de la réflexion de rayons venus de points naturels divers ; l'œil est par suite frappé différemment par chacun de ces faisceaux différents de direction et d'intensité. Il a donc sensation de chaque aspérité de l'objet et, par suite, il voit le corps composé de l'ensemble de toutes ces aspérités.

Si au contraire les corps étaient parfaitement réfléchissants ou transparents, ils ne donneraient connaissance que des objets qu'ils réfléchiraient ou qu'ils réfracteraient, et non d'eux-mêmes.

Couleur des corps. — Nous avons dit que l'action d'un corps avait pour résultat de décomposer la lumière en trois parties dont l'une absorbée ne produit aucun effet, et dont les deux autres étaient réfléchies et réfractées dans des rapports divers. Ceci est vrai pour chaque rayon élémentaire, et la proportion variable avec le corps varie aussi avec l'espèce de rayon lumineux. De là naissent les différences de couleur des corps vus par réflexion ou par transparence.

Clarté des objets. — Cette clarté dépend de la lumière envoyée par le corps, qu'elle lui soit propre ou qu'elle provienne d'une réflexion diffuse : nous n'avons rien à dire à ce sujet. Mais, toutes circonstances égales d'ailleurs, la distance n'influera-t-elle pas sur cette clarté ? Nous avons vu précédemment que les quantités de lumière venues d'une même source, reçues par une même surface, étaient proportionnelles à $\frac{1}{d^2}$, d étant la distance. Il en sera donc ainsi de celles qui frappent la pupille. Mais, d'un autre côté, l'objet considéré paraît plus petit en s'éloignant; ses dimensions linéaires sont proportionnelles à $\frac{1}{d}$, et ses dimensions apparentes en surfaces, proportionnelles à $\frac{1}{d^2}$. Le rapport entre les quantités de lumière et les surfaces qu'elles éclairent sera donc égal à l'unité, quelle que soit la distance, et par suite un même objet paraîtra également éclairé à toutes les distances.

Ceci n'est vrai toutefois qu'en faisant abstraction de l'atmosphère.

Les étoiles apparaissant toujours comme des points, il n'y a pas lieu de leur appliquer le raisonnement que nous venons de faire, et elles sont vues, à source lumineuse égale, avec des clartés inversement proportionnelles aux carrés de leurs distances.

Perspective aérienne. — Quelque transparente que soit l'atmosphère, elle absorbe une partie de la lumière qui la traverse, et son action diminue la clarté des objets très-éloignés. D'autre part, comme nous l'avons déjà dit plusieurs fois, il doit y avoir, pour elle comme pour tous les corps, une partie de la lumière incidente qui est réfléchie, quelque petite que soit du reste cette partie ; tous les objets de la nature envoyant des rayons dans tous les sens, la portion de cette atmosphère comprise entre le spectateur et l'objet considéré sera frappée par cette lumière diffuse qu'elle renvoie, avec une intensité d'autant plus forte que son épaisseur est grande, c'est-à-dire qu'il y a un plus grand nombre de ses molécules soumises aux influences réfléchissantes étrangères.

Pour ces deux causes, les lointains d'un paysage doivent apparaître plus pâles et teintés en bleu, cette couleur étant celle que réfléchit plus facilement l'air, tandis qu'il réfracte mieux la couleur jaune orangée.

L'interposition de brume augmente le premier effet et substitue au second une teinte grisâtre provenant de la couleur particulière réfléchie par les vésicules d'eau qui composent cette brume.

L'influence de la perspective aérienne ne se fait sentir bien faiblement encore qu'à une distance de 2 à 300^m dans une atmosphère pure ; l'interposition de brume ou brouillard peut faire commencer son effet à une distance presque nulle de l'œil, si l'intensité de cette brume est suffisante.

Les peintres usent de la perspective aérienne qui fait bien sentir les différences de plans ou de distances, et ils lui donnent une importance beaucoup plus grande qu'elle n'en a en réalité ; même dans des vues d'intérieur où les objets sont très-rapprochés, ils éteignent la limpidité de l'air ; l'effet qu'ils produisent n'est pas celui qui existe habituellement, mais celui qui serait dû à un brouillard très-léger. Ils sont obligés d'en agir ainsi pour faire deviner la profondeur ou le relief, qu'on estime dans la nature au moyen de la vision binoculaire dont un tableau ne peut pas rendre le double effet.

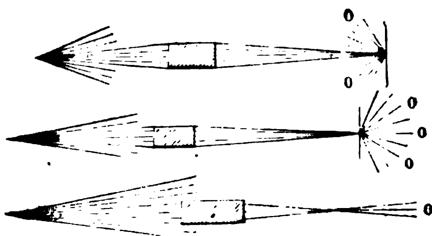
174. Conditions d'existence et de visibilité des images.— Quelle que soit l'explication qu'on en donne, il est certain qu'un point, foyer de lumière propre, envoie dans tous les sens des rayons lumineux essentiellement divergents ; il en est de même d'un point qui ne renvoie que de la lumière réfléchie diffusément ; seulement, dans ce cas, l'intensité peut être variable avec la direction, mais sans que la divergence cesse d'exister. L'œil, qui doit donner connaissance de ce point, a été disposé, par la nature, de manière à agir sur la sensation lorsqu'il est frappé par des rayons placés dans ces circonstances naturelles. Si donc l'homme peut parvenir à remplacer les objets de la nature par des images de ces objets, il doit employer des instruments qui satisfassent à ces deux conditions :

1° Un point de l'objet doit donner naissance à un point unique de l'image, à très-peu près du moins :

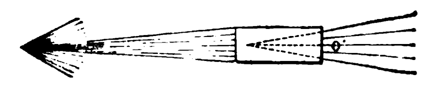
2° Les rayons définitifs d'un même point de l'image doivent être livrés à l'œil, à l'état divergent.

Images réelles. — Avant d'être ainsi divergents, les rayons soumis à l'influence d'un appareil optique ont pu se rencontrer, et leur point de rencontre a été l'*image réelle* du point correspondant de l'objet.

Si, au lieu même où se forme cette image on a placé un corps ne renvoyant que de la lumière diffuse, soit par réfraction, soit par réflexion, le point de l'obstacle frappé par le faisceau devient lumineux lui-même et envoie dans tous les sens des rayons divergents dont l'œil peut avoir sensation. dans une position quelconque. Si, au contraire, on a laissé ces rayons continuer librement leur chemin, l'œil est obligé, pour apercevoir l'image, de se placer dans l'espace embrassé par le faisceau (espace généralement très-restreint), et au delà du point de rencontre.



Images virtuelles. — Les rayons peuvent être divergents, sans pourtant s'être rencontrés ; ils sembleront alors partir d'un point n'existant pas réellement, de l'*image virtuelle*. Mais peu importera à un œil placé en O, pour lequel ces rayons arriveront toujours à l'état convenable, c'est-à-dire à l'état de divergence.



Il résulte de ce qui précède qu'une image peut être aperçue par trois moyens :

1° Réellement, avec le secours d'un écran. Ce moyen n'est pas employé, dans les lunettes parce que l'existence même de cet écran diffusant les rayons dans tous les sens, n'en laisse parvenir qu'un petit nombre à la pupille, dans chaque position de celle-ci, position efficace toujours, mais *peu* efficace ;

2° Réellement encore, en laissant libres les rayons émergés et en plaçant l'œil en arrière de l'image, dans une position O précisée par les conditions suivantes : se trouver dans l'épaisseur du faisceau et à une certaine distance en deçà de laquelle les sensations sont diffuses ;

3° Virtuellement, en précisant comme ci-dessus la position de l'œil en O'. Ce dernier moyen est de beaucoup préférable au précédent ; voici pourquoi.

Les images sont, presque toujours, peu lumineuses ; aussi s'arrange-t-on

de manière que l'œil ne puisse considérer qu'elles seules, en l'empêchant de recevoir des rayons latéraux venus directement d'objets étrangers ; ces images, fussent-elles même très-éclairées, il y aurait encore avantage à opérer ainsi, la sensation unique d'un objet étant beaucoup plus nette que celle qui a lieu lorsque l'œil reçoit simultanément d'autres impressions. Pour arriver à ce but, l'instrument est prolongé jusqu'à la position qu'occupera l'observateur.

On voit alors que le premier système, relatif à l'image réelle, exigerait l'adjonction d'un appendice matériel assez long à la partie efficace de l'instrument ; tandis que le second système, celui de l'image virtuelle, pourra être disposé de telle sorte que l'œil se place directement contre l'instrument lui-même.

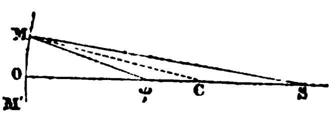
L'emploi d'un écran qui diffuse la lumière dans tous les sens, mauvais pour la netteté de l'image et par suite de la diminution de clarté qu'il produit dans la direction primitive de chaque faisceau lumineux, a l'avantage de ne pas préciser la position de l'œil pour chaque faisceau, position qui varie avec la direction de celui-ci, ce qui, par conséquent, ne permet pas d'embrasser un grand champ, d'un même point de vue, sans le secours de cet écran. Aussi l'emploi de celui-ci devient-il nécessaire dans l'usage des chambres noires, où l'ouverture du champ visible d'un seul point doit être considérable ; il a aussi l'avantage de préciser matériellement le lieu de l'image en vue d'une opération matérielle qui doit souvent être exécutée en ce lieu ; mais il a, outre la perte de lumière qu'il occasionne, le défaut d'exiger que l'écran occupe exactement le lieu de l'image ; en sorte que lorsqu'il s'agit simplement de la vision, une image vue directement à l'œil, sans écran, sera vue nettement, quelle que soit, dans certaines limites, la forme du lieu de cette image, tandis qu'avec l'usage de celui-ci, la netteté dépendra essentiellement de la position qu'il occupera.

CHAPITRE II

MIROIRS ET LENTILLES

175. **Réflexion.** — Les surfaces réfléchissantes le plus habituellement employées sont planes ou affectent la forme de petites calottes sphériques. Dans ce dernier cas, la réflexion peut avoir lieu sur la partie intérieure de la calotte ou sur la partie extérieure, ce qui donne naissance aux miroirs concaves et aux miroirs convexes, qui ont tous deux pour limite commune le miroir plan.

Miroir concave. — Soit MM′ un miroir concave dont le centre est en C et dont l'ouverture angulaire MCM′ très-petite, ce qui est essentiel pour la netteté des résultats, est représentée beaucoup trop grande sur la figure, pour la facilité d'exécution de celle-ci.



Un point S, placé en avant de ce miroir, envoie dans tous les sens des rayons lumineux dont un certain nombre, venant rencontrer la calotte sphérique, est réfléchi par celle-ci. D'après ce qui a été dit au § précédent, pour qu'il y ait image formée, il faut que le point S soit représenté par un point unique provenant de la rencontre des rayons réfléchis ; il faut donc que ceux-ci aillent passer par un même point, approximativement du moins. Voyons s'il en est ainsi :

Par le centre et le point lumineux, faisons passer une suite infinie de plans qui engendreront une infinité de sections telles que celle de la figure ; la surface entière du miroir serait composée de tous les arcs de cercle tels que MM′, et la totalité des rayons lumineux émanés de S proviendrait de l'ensemble de tous les secteurs lumineux MSM′. Les sections que nous venons de supposer ont une ligne commune SCO, en sorte que si nous prouvons que ceux des rayons émanés de S, et qui sont contenus dans le plan de la figure, se réfléchissent de manière à venir passer par un même point φ de cet axe commun, il en résultera que, ce point appartenant à toutes les sections, tous les rayons lumineux partis d'un même point iront se rencontrer aussi en un seul point, de sorte qu'il pourra en résulter une image efficace.

Pour s'assurer qu'il en est ainsi, il suffit de chercher le lieu de rencontre de la réflexion d'un rayon isolé quelconque SM, avec le rayon principal SCO, qui, normal à la surface du miroir, se réfléchit sur lui-

même, et de voir si ce lieu est indépendant de la direction arbitraire du rayon primitif SM.

Les lois de la réflexion disent d'abord que le rayon réfléchi restera dans le plan de la figure, puisque celui-ci passant par le centre est normal à la surface, et qu'en outre les angles SMC $= i$ et CM$\varphi = r$ seront égaux entre eux, ce qui conduit immédiatement à

$$i = C - S, \quad r = \varphi - C, \quad C - S = \varphi - C, \quad 2C = \varphi + S$$

par l'examen des deux triangles dont les angles sont désignés par les lettres aux sommets.

Nous avons supposé l'ouverture MM' très-petite par rapport au rayon, nous pourrons aller poser approximativement

$$S = \frac{MO}{s}, \quad C = \frac{MO}{r}, \quad \varphi = \frac{MO}{f}$$

en désignant par s et f les distances de S et φ au miroir, et par r le rayon de celui-ci. Les trois équations seront d'autant moins exactes que MO sera plus grand, c'est-à-dire d'autant plus qu'on considérera un rayon primitif SM plus divergent de l'axe ; les résultats n'auront donc un certain degré d'exactitude qu'autant que l'étendue efficace du miroir sera très-restreinte, ainsi que nous avons annoncé que cela devait être.

Une simple substitution donne immédiatement

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{f} + \frac{1}{s}$$

Le point de rencontre φ des deux rayons considérés, précisé par la valeur de f tirée de cette formule, est donc constant quand r et s sont constants, c'est-à-dire, pour le même miroir et le même point lumineux, et en vertu de ce qui a été dit précédemment, tous les rayons réfléchis vont passer par un même point, avec une approximation d'autant plus grande que la calotte sphérique a peu d'ouverture.

La formule que nous venons de trouver et qui précise la position de l'image d'un point lumineux, a supposé que nous avons prêté à r, s et f le signe + dans les cas indiqués par la figure, c'est-à-dire quand la surface réfléchissante est concave, quand le point lumineux est situé en avant de celle-ci, envoyant par conséquent sur elle des rayons divergents, et quand l'image située également en avant se trouve formée par la rencontre directe des rayons réfléchis, ou quand cette image est *réelle*. Lorsque les circonstances inverses se présenteront, les signes de r, s et f devront changer dans l'emploi de la formule, ou résultant de la résolution de celle-ci, ils auront la signification contraire lorsqu'ils se présenteront avec le signe —.

Ainsi donc la même formule se rapportera aux deux espèces de miroirs, dans les circonstances suivantes :

r +, miroir concave	s +, rayons divergents	f +, image réelle
r —, miroir convexe	s —, rayons convergents	f —. image virtuelle

Nous ne pensons pas qu'une discussion algébrique de la formule générale des miroirs soit utile à faire, et qu'elle puisse laisser quelque trace dans les esprits ; nous croyons que l'emploi de cette formule, avec la connaissance des significations de signes que nous avons indiqués, suffira pour faire voir, dans chaque cas, les résultats produits par les hypothèses données. Aussi n'ajouterons-nous que très-peu de détails à ce que nous avons dit.

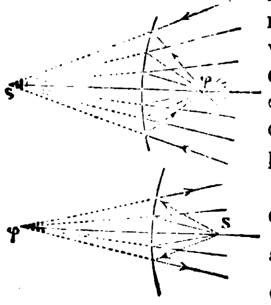
La formule $\frac{2}{r}=\frac{1}{f}+\frac{1}{s}$ symétrique en s et f fait voir que les rôles du point lumineux et de son image peuvent être alternés quand s et f sont de même signe, ce qu'on exprime en disant que les *foyers sont conjugués.*

Les circonstances les plus remarquables répondent au cas des rayons parallèles, ou venus de l'infini approximatif, pour lesquels l'hypothèse $s=\infty$ mise dans la formule, conduit à $F=\frac{r}{2}$ qu'on appelle la distance *focale principale*, et à celui de $s=o$ qui donne $f=o$. Ces deux cas se distinguent essentiellement l'un de l'autre en ce que le premier se rapproche beaucoup de la limite vers laquelle la formule est exacte, c'est-à-dire, de celui où l'ouverture angulaire du faisceau est très-petite ; le second, au contraire, s'en éloigne considérablement à grandeur égale du miroir, et pour qu'il soit exactement rendu par la formule, il faut que les rayons efficaces ne tombent que sur la portion centrale restreinte du miroir.

Indiquons encore seulement, sans entrer dans la discussion générale de la formule, deux cas dans lesquels se présentent des points lumineux à rayons convergents et des images virtuelles. La formule générale résolue par rapport à f, donne

$$f=\frac{rs}{2s-r}=\frac{r}{2-\frac{r}{s}}$$

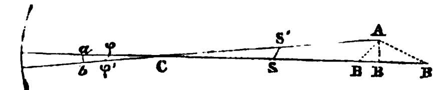
Si s devient négatif, c'est-à-dire si le point S, au lieu d'exister réellement, n'est que la conséquence du prolongement supposé d'un faisceau de rayons convergents, ces rayons se réfléchissent toujours en avant du miroir et viennent converger en φ, donnant une image réelle, puisque dans ce cas le numérateur et le dénominateur sont positifs.



Si, en second lieu, le point S est placé entre le miroir et le milieu du rayon, $s<\frac{r}{2}$ donne le dénominateur $2-\frac{r}{s}<o$, et par suite $f<o$ indique que le foyer est

virtuel, c'est-à-dire que sans exister en réalité, il a l'air d'être situé en φ, point d'où les rayons réfléchis semblent diverger.

Image d'un objet. — Remarquons que la formule trouvée dit que tant que s est grand, ses variations même considérables, en donnent de très-petites sur f, et qu'on peut, en conséquence, regarder comme sensiblement formées au même point les images de points éloignés situés sur un même rayon de la sphère, rayons tels que CA, CB. Dans ce cas, de points très-éloignés, tout objet situé dans l'angle ACB viendra se peindre sur l'arc du cercle ab, de rayon $= \frac{r}{2}$, et en supposant que l'ouverture de cet angle soit petite, on verra même qu'une image sensiblement plane ab représente tous les objets renfermés, au loin, dans ce secteur ACB. Ce que la figure exprime pour un plan et des lignes peut évidemment s'appliquer à l'espace et aux surfaces. Les angles sous-tendus par les différents points de l'objet et par les points correspondants de l'image étant toujours opposés par le sommet, on pourra donc dire qu'il y a similitude entre celle-ci et la projection de l'objet faite sur un plan parallèle à cette image.



Lorsque le rapprochement deviendra trop sensible, les différentes parties de l'objet donneront des images qui seront, à des distances du miroir, un peu différentes les unes des autres, et le lieu de ces image ne formera pas une surface parallèle au miroir, comme dans le cas précédent. Deux points s et s' formeront leurs images en deux points φ et φ', tels que

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{f} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{s'}$$

Pour que la similitude absolue existât, il faudrait que l'on eût

$$\frac{C\varphi}{C\varphi'} = \frac{CS}{CS'} \quad \text{ou} \quad \frac{r-f}{r-f'} = \frac{s-r}{s'-r}.$$

Mais l'équation précédente donne

$$r - f = \frac{r(s-r)}{2s-r} \quad \text{et} \quad r - f' = \frac{r(s'-r)}{2s'-r}$$

en sorte que le premier rapport

$$\frac{r-f}{r-f'} = \frac{2s'-r}{2s-r}\,\frac{s-r}{s'-r}$$

n'est égal au second $\frac{s-r}{s'-r}$ que si $\frac{2s'-r}{2s-r}$ peut être confondu avec l'unité. Si donc s et s' sont petits, la similitude absolue de l'objet et de son

image n'existe pas, mais ils sous-tendent toujours l'un et l'autre les mêmes angles au centre de la sphère. Le calcul précédent conduit à la conséquence que nous avons trouvée antérieurement pour les grandes distances, car alors on peut négliger dans le second membre r par rapport à s et s', et il se réduit simplement à l'unité, ce qui dit bien que l'image est parallèle à la calotte sphérique, pourvu que les distances s et s' des différents points de l'objet, soient considérables mais quelconques.

Les deux cas représentés sur la figure donnent les images renversées par rapport aux objets, et ils répondent à des images réelles ; de même qu'elles peuvent devenir virtuelles dans certains cas, elles peuvent aussi devenir droites, c'est-à-dire placées dans le même sens que les objets.

Grossissement. — En comprenant la similitude telle que nous l'avons expliquée pour les grandes distances, et en la supposant exister pour les petites, on trouve facilement le ***grossissement absolu***, ainsi appelé pour le distinguer du ***grossissement angulaire*** qui serait dans le cas actuel égal à l'unité, pour un œil placé au centre de la sphère, et variable avec la position de cet œil dans toutes les autres circonstances. Ce grossissement absolu serait représenté par

$$g = \frac{SS'}{\varphi\varphi'} = \frac{r-f}{s-r} = \frac{r - \frac{rs}{2s-r}}{s-r} = \frac{r}{2s-r}$$

qui le donnerait plus petit ou plus grand que l'unité, suivant que $2s - r$ serait plus grand ou plus petit que r, c'est-à-dire suivant que $s \gtrless r$, s devant être, dans le cas actuel, pris en grandeur absolue, sans préoccupation de signe.

176. Miroirs convexe, plan, parabolique. — Nous avons expliqué dans le § précédent comment le seul changement du signe du rayon permettait d'appliquer au miroir convexe la formule que nous avons trouvée pour le miroir concave. Nous ne discuterons pas plus ce nouveau cas que nous n'avons discuté le précédent, et nous nous bornerons à quelques observations.

Si on fait $s = \infty$, c'est-à-dire si on suppose les rayons venus sensiblement de l'infini, on trouve encore $f = \frac{r}{2}$; mais r étant négatif, l'image est virtuelle, et peut être, par suite, aperçue dans des circonstances plus générales que l'image réelle due, dans le même cas, au miroir concave. Celui-ci ne donne d'image virtuelle que lorsque

$$f = \frac{rs}{2s-r} = \frac{r}{2 - \frac{r}{s}} < 0 \quad \text{ou} \quad s < \frac{r}{2}$$

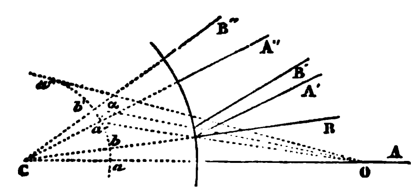
ce qui répond, du reste, à une circonstance examinée précédemment, et

qui a été utilisée dans les miroirs à barbe, parce qu'en même temps que l'image est virtuelle, elle est droite et amplifiée dans le rapport $\frac{r}{2s-r}$.

Les miroirs convexes donnent des images virtuelles tant que s est positif, c'est-à-dire tant que l'objet existe réellement, et ces images sont droites.

Les explications que nous donnons actuellement semblent rentrer dans la discussion ; nous ne les donnons pas sous ce point de vue, qui serait du reste incomplet, mais seulement comme indication de la valeur des résultats auxquels nous sommes arrivé, résultats qui ne sont vrais qu'avec la restriction que nous avons admise, de rayons ne tombant pas trop obliquement sur les surfaces réfléchissantes, ce qui entraîne la petitesse d'ouverture du segment sphérique employé ainsi que celle de l'angle sous-entendu par l'objet au centre de ce segment, et comme exemple du grossissement angulaire.

En effet, les personnes qui ont examiné le miroir à barbe dont nous venons de parler, ainsi que les globes réfléchissants qui servent souvent d'ornement dans les jardins, ont pu voir que la similitude des images et des objets est loin d'exister. C'est qu'alors les images vues par un spectateur sont dues à des faisceaux lumineux qui ont frappé différentes parties de ces globes, et que quelques-uns de ces faisceaux ont pu tomber trop obliquement pour donner la netteté résultant des conditions que nous avons admises. Indépendamment de ce manque de netteté existant dans certains cas, l'absence de similitude est très-frappante, et elle provient d'une apparence plutôt que d'une réalité. En effet, examinons ce qui se passe pour les boules d'ornement que nous avons mentionnées et supposons que des objets placées en AB, A'A'' B'B'' dans des directions très-différentes, donnent des images nettes indépendantes de l'aberration de sphéricité. Si ces objets peuvent être regardés comme situés à l'infini, leurs images virtuelles seront en a,b, $a'b'$ sur la sphère de rayon $= \frac{r}{2}$, et ils sous-tendront au centre de la sphère du miroir, des angles égaux à ceux de la nature. Mais un spectateur placé en O en dehors de cette sphère, verra ces images suivant les directions Oa, Ob, Oa', Ob', telles que si en réalité $ab = a'b'$, ce qui répondrait à deux angles égaux de la nature, les angles sous-tendus, pour lui, par ces longueurs égales, seront très-différents par suite de l'obliquité variable de ces éléments tels que $a'b'$, par rapport à l'ensemble de l'angle qui se dirige vers eux.



Le grossissement angulaire ou le rapport qui existe entre les angles

sous lesquels on voit l'image et celui sous lequel on verrait l'objet, sera donné par

$$\frac{O}{C}=\frac{a'\alpha}{Oa'}\times\frac{r}{2.a'b'}=\frac{r\ \cos.\ Ca'O}{2.Oa'}$$

Sans préciser davantage la valeur algébrique de ce grossissement angulaire, on voit qu'il est variable, et d'autant plus petit que l'angle Ca'O est proche de 100^g. Ses deux limites extrêmes sont, en désignant par m la distance de l'œil au miroir,

1° CaO $=200^g$, répondant aux objets situés sur la ligne qui passe par le centre et l'observateur, grossissement angulaire $=\frac{r}{2\left(\frac{r}{2}+m\right)}$, dont la valeur variable avec m, atteint le maximum égal à l'unité, quand l'œil est supposé placé sur le miroir même ;

2° Ca″O $=100^g$ grossissement angulaire $=0$, répondant à un angle de la nature, C, dont le cosinus $=\frac{r}{2(r+m)}$ angle, au delà duquel les objets ne donnent plus d'images pour l'œil placé à la distance m du miroir.

Il résulte de ce qui précède que les images doivent paraître d'autant plus petites qu'elles se rapportent à des points éloignés de la direction qui joint l'œil au centre du miroir, ce qui est conforme à l'expérience.

Miroir plan. — Le plan est la limite de la sphère dont le rayon augmente jusqu'à l'infini. En faisant $r=\infty$ dans la formule commune aux deux miroirs concave et convexe, on trouve $f=-s$, ce qui indique que l'objet et son image ont chacun de leurs points placés symétriquement par rapport à la surface du miroir plan, et que par suite un objet existant réellement ou envoyant des rayons divergents, donne lieu à une image virtuelle, tandis qu'au contraire un objet n'existant que virtuellement, par suite d'opérations optiques préalables, c'est-à-dire un objet formé par des rayons tombant sur le miroir à l'état de convergence, donne lieu à une image réelle.

La symétrie des deux figures indique que le grossissement absolu doit être égal à l'unité, ce qu'indique également l'expression que nous avons trouvée précédemment $\frac{r}{2s-r}=\frac{1}{\frac{2s}{r}-1}=1$, abstraction faite du signe, lorsque $r=\infty$.

On peut du reste trouver, pour le miroir plan, les conséquences auxquelles nous venons d'arriver, par des considérations directement appliquées à sa forme particulière, considérations qui sont d'une simplicité telle que nous les passerons sous silence.

Le miroir plan est de beaucoup celui qui est le plus employé, pour différentes raisons : 1° il fournit toujours des images virtuelles répon-

dant aux objets réellement existants dans la nature, qualité qui lui est commune avec le miroir convexe ; 2° son grossissement est égal à l'unité ; 3° la condition relative à la non-obliquité des rayons incidents n'existe pas pour lui, puisque cette obliquité n'avait d'influence que par suite de la petitesse relative exigée de la calotte sphérique et du rayon, et que celui-ci, devenant infini, cette petitesse existe forcément.

Les miroirs plans habituellement employés ne sont pas, comme les miroirs sphériques, composés simplement d'un corps métallique dont une surface forme miroir ; dans les glaces, la partie réfléchissante est le tain mis en contact intime avec la partie postérieure du verre, et abrité des effets accidentels par un simple fond de bois. Il a été bon d'en agir ainsi pour éviter tous les chocs qui, dans la vie ordinaire, n'auraient pas manqué, à chaque instant, de détériorer la surface réfléchissante ; l'épaisseur du verre protége ainsi la partie délicate du miroir, mais elle fait naître des inconvénients qui en proscrivent l'emploi pour les miroirs sphériques. Ces inconvénients proviennent d'abord des réflexions qui s'opèrent sur la face antérieure de la glace, réflexions qui, soit directement pour le cas le plus important, soit combinées avec des réfractions et des réflexions sur la partie étamée, viennent se mêler à la vraie réflexion importante due au tain de la glace, et par conséquent gêner la perception nette de celle-ci, surtout pour les points qui sont obliquement placés par rapport à l'observateur ; ils proviennent, en second lieu, des défauts de densité qui peuvent exister dans le verre, défauts produisant des déformations d'images ; enfin, en dernier lieu, ils sont encore dus au non-parallélisme des faces de la glace, ce qui fait naître des déformations qui, pour ne pas exister, exigeraient un parallélisme rigoureux très-difficile à obtenir.

Nous verrons plus tard que les miroirs ont sur les lentilles un avantage provenant de ce que la dispersion des couleurs n'a pas d'action dans les effets qu'ils produisent ; les télescopes ont été longtemps préférés aux lunettes, mais la difficulté de construction des miroirs sphériques métalliques les a fait abandonner quand on a su neutraliser l'effet dû à la dispersion, qui agit fortement, dans certains cas de l'emploi des lentilles.

Depuis quelques années, M. Foucaut a obvié à cette difficulté de construction, en employant des miroirs sphériques en verre, dont il a appris à argenter une des surfaces qui a reçu la forme convenable par le même procédé simple qui est employé dans l'exécution des surfaces des lentilles. La partie argentée reçoit directement les rayons lumineux qui se trouvent ainsi indifférents à l'*aberration de réfrangibilité*, provenant de la dispersion, et aux irrégularités de densité pouvant exister dans la masse du verre qui compose les lentilles. Malheureusement, comme pour les lentilles du reste, l'*aberration de sphéricité*, qui est due à la divergence des rayons lumineux tombant sur les calottes sphériques, conserve encore son action.

Miroir parabolique. — Cette aberration de sphéricité, qui provient de

ce que la formule des miroirs n'est qu'approximative, et de ce que, par conséquent, l'unité d'image d'un point unique de la nature n'existe qu'à peu près, ne peut être annulée que dans un seul cas, celui des rayons parallèles, et avec une seule forme de miroir, celle d'une surface de révolution engendrée par une parabole tournant autour de son axe.

On sait en effet que dans une parabole les angles formés par la normale en un point quelconque, avec la parallèle à l'axe passant par ce point et avec le rayon vecteur, sont égaux, en sorte que si on dirige l'axe sur une étoile, les rayons se réfléchiront de manière à aller tous passer par le foyer, quelle que soit l'amplitude donnée au miroir parabolique, et l'image de l'étoile se formera en un point unique. Si l'astre considéré, ou l'objet terrestre éloigné, a une petite dimension angulaire, un seul de ses points pourra être rigoureusement mis dans la circonstance énoncée, et les autres enverront des rayons lumineux un peu inclinés sur l'axe de la parabole ; le résultat obtenu n'aura pas toute la rigueur qui se rapporte au premier, mais il sera bien près de l'atteindre si l'ouverture angulaire sous-tendue par l'objet est très-petite.

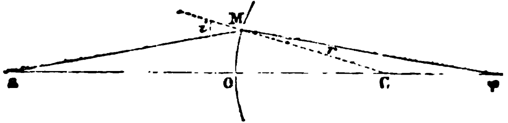
La difficulté de construction des miroirs paraboliques en rend l'usage très-rare.

177. Réfraction. — Les surfaces réfractantes habituellement employées ont la forme sphérique, parce que, comme pour les miroirs, cette forme est plus facile que toute autre à obtenir.

Surface de séparation convexe. — Examinons d'abord le cas simple où les deux milieux ne sont séparés que par une seule surface de séparation, et voyons ce que les rayons réfractés par elles deviennent dans le second milieu duquel ils seront supposés ne pas sortir, et considérons un point lumineux unique.

Par ce point lumineux et par le centre de la sphère, imaginons, comme pour les miroirs, une infinité de sections dont l'ensemble produirait la surface réfractante et la totalité des rayons incidents, et voyons ce qui se passera dans une de ces sections.

Le rayon lumineux parti de S, et qui se dirigera sur le centre, tombant normalement sur la surface, continuera à marcher en ligne droite ; un autre rayon quelconque, SM, restera dans le plan de la section qui le contenait primitivement, puisque ce plan est normal à la surface, et il s'infléchira en M, de manière à suivre la ligne Mφ droite, puisque nous supposons chacun des milieux homogène. Sa nouvelle direction sera liée à la première par la relation fondamentale $\frac{\sin. i}{\sin. r} = n$, dans laquelle n est l'indice de réfraction variable avec l'assemblage des deux milieux, mais



constant quel que soit l'angle d'incidence. Ce rayon réfracté Mφ ira rencontrer le premier considéré SCφ commun à toutes les sections, en un point φ qui devra être unique quel que soit le rayon choisi ; et s'il en est ainsi, tous les rayons de toutes les sections iront passer par ce même point qui sera alors l'image de celui de la nature.

C'est en réalité ce qui a lieu, en établissant pourtant des restrictions analogues à celles que nous avons posées pour les miroirs, restrictions qui donnent naissance à l'*aberration de sphéricité*, dont nous avons parlé plus haut.

La direction du rayon réfracté Mφ est liée à la direction primitive SM par les relations

$$i = C + S \qquad r = C - \varphi \qquad \frac{\sin. i}{\sin. r} = n = \frac{\sin. (C + S)}{\sin. (C - \varphi)}$$

que fournissent immédiatement les deux triangles qui ont le côté CM commun.

En établissant une des restrictions dont nous avons parlé, c'est-à-dire en supposant que les rayons lumineux incidents n'aient qu'une très-petite divergence lorsqu'ils tombent sur la calotte sphérique, ou autrement dit que celle-ci n'ait qu'une très-petite ouverture par rapport à ses distances aux points S; C, φ, les angles dont les sommets sont en ces points deviendront très-petits, et il en sera de même de i et de r; en sorte qu'on pourra approximativement les confondre tous avec leurs sinus, et écrire

$$\frac{\sin. i}{\sin. r} = n = \frac{i}{r} = \frac{C+S}{C-\varphi} = \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{s}}{\frac{1}{r} - \frac{1}{f}}, \qquad \frac{n-1}{r} = \frac{n}{f} + \frac{1}{s}$$

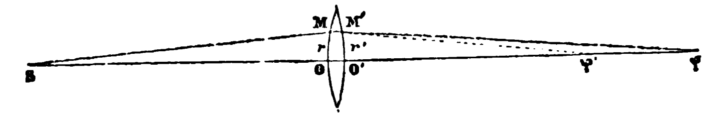
en désignant actuellement par r le rayon de la sphère, et par s et f les distances des points S et φ au point O de la calotte sphérique situé sur CS.

Cette formule étant indépendante de l'obliquité du rayon lumineux choisi, le point φ est constant pour tous ceux qui sont émergés par S, et un point unique, remplaçant un point unique de la nature, sera l'image de celui-ci, à la restriction près que nous avons admise.

Surface concave. — Sans répéter ici ce qui a été dit pour les miroirs, nous rappellerons seulement que si on passe d'une forme convexe à une forme concave, le rayon change de sens et, par suite, doit changer de signe dans la formule. Les autres quantités s et f qui entrent dans cette formule devront conserver les mêmes signes pour les mêmes significations, c'est-à-dire, que s et f positifs répondront aux rayons divergents et aux images réelles, s et f négatifs aux rayons convergents et aux images virtuelles.

178. Lentilles. — Le second milieu doit toujours être terminé par une deuxième surface à laquelle on donne encore la forme sphérique.

Étudions d'abord ce qui se passe pour un point S situé sur l'*axe principal* de la lentille, c'est-à-dire sur la ligne qui contient les deux centres des surfaces ; le rayon lumineux qui se dirigera suivant cet axe, se réfractera en suivant la même direction SOO'φ, puisque celle-ci est normale aux deux surfaces. Un second rayon SM rencontrant la première



surface en M, se dirigera dans l'intérieur du verre qui est employé pour l'exécution des lentilles, suivant la ligne Mφ de manière à passer toujours, quelle que soit l'incidence choisie, par un point φ de l'axe, point dont la position par rapport à O est donnée par la formule précédemment trouvée,

$$\frac{n-1}{r}=\frac{n}{f}+\frac{1}{s}$$

Mais ce rayon réfracté Mφ rencontrant la seconde surface éprouvera une nouvelle déviation, de sorte que sa direction finale sera M'φ', et la position de φ' sera déterminée encore par la formule précédente, dans laquelle on devra substituer $\frac{1}{n}$ à n. Les autres éléments de cette formule qui sont le rayon de la seconde calotte sphérique et la distance du point lumineux à celle-ci, devront aussi être modifiés de la manière suivante ; la distance s' répond dans le cas de la figure à des rayons convergents, et par suite elle est égale à $-\,O\varphi=-(f-OO')=-f$ en négligeant la petite épaisseur OO' de la lentille ; si on suppose qu'on prête le signe + à la seconde surface lorsque celle-ci est convexe à l'extérieur, comme nous l'avons fait pour la première, l'action des rayons lumineux s'exercera sur une surface concave, et par conséquent le signe de r devra être changé dans la formule, qui deviendra alors

$$\frac{\frac{1}{n}-1}{-r'}=\frac{\frac{1}{n}}{f'}-\frac{1}{f} \quad \text{ou} \quad \frac{n-1}{r'}=\frac{1}{f'}-\frac{n}{f}$$

En ajoutant cette équation à la première, on éliminera la distance focale intermédiaire f, et le lieu de l'image résultera de l'équation finale, dans laquelle nous désignons par f ce que précédemment représentait f',

$$\frac{n-1}{r}+\frac{n-1}{r'}=\frac{1}{f}+\frac{1}{s}$$

formule qui s'appliquera à toutes les formes de lentilles, en se rappelant les hypothèses de signes que nous avons faites précédemment.

Il est à remarquer, comme pour les miroirs, que cette formule étant symétrique par rapport à f et s, le point lumineux et l'image peuvent alterner quand f et s sont de même signe, ce qu'on exprime en disant que *les foyers sont conjugués.*

Différentes espèces de lentilles. — Il n'y a que trois formes principales de lentilles; les unes augmentent la convergence des rayons lumineux, ce qui produit, suivant les cas, ou une convergence absolue ou une diminution de divergence; les autres produisent l'effet contraire, c'est-à-dire, qu'elles tendent à augmenter la divergence lorsqu'elle existe, ou à changer une convergence en une autre moins forte et même en une divergence.

Mettons la formule générale sous la forme

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{f}+\frac{1}{s} \quad \text{en posant} \quad \frac{n-1}{r}+\frac{n-1}{r'}=\frac{1}{F}$$

Il résulte de cette nouvelle formule que $s=\infty$ donne $f=F$; cette valeur est ce qu'on appelle la ***distance focale principale*** et le point qui lui correspond est le ***foyer principal*** ou foyer des rayons lumineux parallèles à l'axe et venus d'un même point situé à l'infini.

Les trois formes principales se résument de la manière suivante :

Lentille biconvexe, convergente	$r+$, $r'+$, F $+$	$s+$, rayons divergents $s-$, rayons convergents $f+$, image réelle $f-$, image virtuelle
Lentille biconcave, divergente	$r-$, $r'-$, F $-$	
Lentille convexe-concave	convergente $r+$, $r'-$, $r<(-r')$, F $+$ divergente $r+$, $r'-$, $r>(-r')$, F $-$	

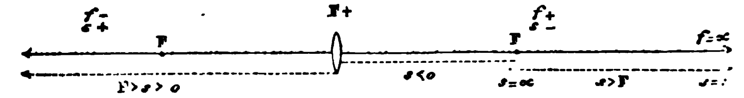
Une des deux faces peut devenir plane, ce qui donne lieu aux lentilles plane-convexe et plane-concave, qui ne sont que des cas particuliers des deux premières.

L'importance des lentilles convergentes et des lentilles divergentes, éléments essentiels de presque tous les instruments d'optique, nous engage à discuter la marche des foyers répondant à toutes les positions du point lumineux, et à y joindre une figure résumant cette discussion et indiquant, en regard des positions que peuvent occuper les images, les distances correspondantes des points qui leur ont donné naissance.

Lentilles convergentes. — La formule générale $\frac{1}{F}=\frac{1}{f}+\frac{1}{s}$ résolue par rapport à f donne

$$f = \frac{Fs}{s-F} = \frac{F}{1-\frac{F}{s}}$$

Introduisons la supposition $F > 0$, qui spécifie les verres conver-



gents et attribuons à s toutes les valeurs possibles depuis $+\infty$ jusqu'à $-\infty$. La première valeur de f répondant à $s = \infty$, sera F, ce que nous savions déjà; à mesure que s diminuera $\frac{F}{s}$ augmentera, $s - \frac{F}{s}$ diminuera et enfin f augmentera, mais d'abord excessivement lentement, tant que s sera grand par rapport à F, car alors l'expression pourra s'écrire, approximativement

$$f = \frac{F}{1-\frac{F}{s}} = F\left(1+\frac{F}{s}\right) = F + \frac{F^2}{s}$$

et les variations de f par rapport à F, exprimées par $\frac{F^2}{s}$ seront en effet fort petites. Remarquons que pour des mêmes valeurs absolues de s, ces déplacements de foyer seront proportionnels à F^2.

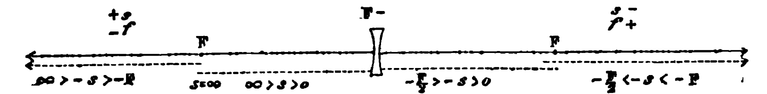
Lorsque s diminue toujours, le déplacement du foyer qui est réel, jusqu'à présent du moins, devient considérable quand s approche d'être égal à F, c'est-à-dire quand le point lumineux approche du foyer principal antérieur, et lorsque cette limite est atteinte, $f = \infty$, ce qui indique que les rayons réfractés sont devenus parallèles.

Supposons que s devienne $< F$, ou que le point lumineux soit placé entre la lentille et son foyer antérieur, la fraction $\frac{F}{s}$ devient < 1 et le dénominateur devenant négatif, f le devient également. c'est-à-dire que l'image est virtuelle. Entre $s = F$ et $s = o$, cette image virtuelle parcourt tout l'espace compris entre ∞ et o.

Si on continue à faire marcher le point lumineux dans le même sens, les rayons qui lui donneraient naissance devront être convergents, ce qui se traduit par $s < o$. Cette supposition donne le second terme du dénominateur positif, et par suite f positif répond à des images qui sont constamment réelles et qui prennent toutes les positions comprises entre la lentille et son foyer principal postérieur, puisque $f = o$ et $f = F$ résultent de $s = o$ et $s = -\infty$.

En résumé l'image n'est virtuelle que lorsque le point lumineux est placé entre la lentille et son foyer principal antérieur, et elle est réelle dans tous les autres cas.

Lentilles divergentes. — Ces lentilles ne se distinguent algébriquement des précédentes qu'en ce que $F < o$ dans la formule générale qui fournit l'expression $f = \frac{F}{1 - \frac{F}{s}}$. Les rayons lumineux venus de l'infini donnent toujours $s = \infty$, $f = F$; mais comme F est négatif, le foyer de ces rayons est virtuel et placé en avant de la lentille divergente.



En faisant diminuer s, $\frac{F}{s}$ augmentera en valeur absolue; mais étant négatif par suite du signe de F, il augmentera le dénominateur et diminuera par suite la valeur absolue de la fraction qui, restant toujours elle-même négative, donnera lieu à des images virtuelles parcourant l'intervalle compris entre le foyer antérieur et la lentille, puisqu'à $s = \infty$ et $s = o$ répondent $f = F$ et $f = o$.

En continuant à faire marcher le point lumineux dans le même sens, les rayons deviendront convergents, ce qui se traduira par $s < o$; la fraction $\frac{F}{s}$ sera positive, par suite $-\frac{F}{s} < o$ et $1 - \frac{F}{s}$ sera négatif ou positif suivant que $\frac{F}{s}$ sera plus petit ou plus grand que l'unité, c'est-à-dire, suivant qu'en valeur absolue s sera plus petit ou plus grand que F, ou, en d'autres termes, suivant que le point lumineux formé par des rayons convergents sera en deçà ou au delà du foyer principal postérieur, par rapport à la lentille. Dans le premier cas le dénominateur $1 - \frac{F}{s}$ négatif donnera f positif par suite de la valeur de F négative pour les verres divergents; l'image sera donc réelle, et pendant que le point lumineux marchera de la lentille au foyer postérieur, cette image réelle marchera de la lentille à l'infini, car aux valeurs $s = o$, $s = F$ répondent $f = o$, $f = \infty$. On peut remarquer que le foyer principal est occupé par l'image lorsque $s = \frac{F}{2}$.

Le second cas dont nous avons parlé plus haut, celui où $\frac{F}{s} > 1$ donne positif le dénominateur de la fraction $f = \frac{F}{1 - \frac{F}{s}}$, et par suite du signe propre de F, cette fraction devenant négative indique que l'image redevient virtuelle, et parcourt tout l'espace compris entre l'infini et le foyer principal antérieur pendant que le point lumineux formé par des rayons convergents parcourt lui-même celui qui est compris entre le foyer postérieur et l'infini du même côté.

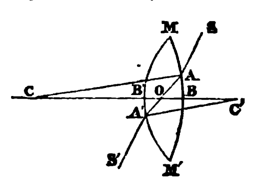
En résumé, les images dues aux verres divergents ne sont réelles que lorsque le point lumineux est formé par des rayons dont la convergence aboutit entre la lentille et son centre optique postérieur; dans tous les autres cas l'image est virtuelle.

179. **Centre optique. — Image d'un objet.** — Nous n'avons considéré jusqu'à présent qu'un point lumineux situé sur l'axe principal d'une lentille, c'est-à-dire sur la ligne qui passe par les deux centres des segments sphériques. On peut se demander, d'abord, si un point extérieur à cet axe produira une image unique, puis quelle sera la position de celle-ci.

La première question se résout de suite affirmativement, car, dans les limites d'approximation que nous avons admises, la première surface donne lieu à une image unique produite par les rayons qui sont à l'intérieur du verre, puisque pour cette surface il n'y a pas d'axe, le point étant toujours situé sur un des rayons de la sphère, et ceux-ci jouant tous le même rôle par rapport à celle-ci, tant que, pour la netteté du résultat, ils ne sont pas trop obliques par rapport au segment sphérique réellement employé. Ce que nous venons de dire peut s'appliquer à la première image et à la seconde surface réfractante, et par suite un point lumineux situé en dehors de l'axe, mais peu obliquement par rapport à celui-ci, donne encore une image unique.

La détermination de la position de cette image nécessite que nous nous occupions préalablement d'un point très-remarquable que possèdent toutes les lentilles.

Centre optique d'une lentille. — Le centre optique est un point unique de l'axe qui jouit de cette propriété, que tout rayon qui, par l'effet de la première réfraction, passe par ce point, sort de la lentille en suivant une direction parallèle à celle qu'il avait avant l'immersion. Pour le trouver, traçons deux rayons CA, C'A' parallèles : les éléments des surfaces en A et A' seront parallèles aussi. Parmi toutes les directions que peut prendre un rayon incident SA, il en est une telle que le rayon réfracté suit la ligne qui unit A et A', de sorte qu'à sa sortie et au delà de A', il se dirigera suivant A'S' parallèlement à SA. Le point O de rencontre de AA' et de l'axe de la lentille sera le centre optique.



Pour trouver sa position, qui doit varier en raison de la courbure des surfaces, et être par conséquent fonction des rayons de courbure, remarquons que les triangles CAO, C'A'O', sont semblables et fournissent la proportion

$$CO : C'O :: CA : C'A' \quad \text{ou} \quad CO : C'O :: CB : C'B'$$

de laquelle on tire

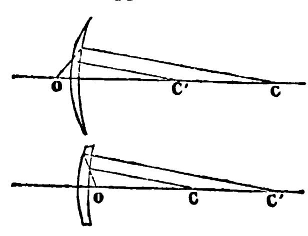
$$CB - CO : C'B' - C'O :: CB : C'B' \quad \text{c'est-à-dire} \quad BO : B'O :: CB : C'B'$$

Ce qui peut s'énoncer ainsi : les distances du centre optique aux surfaces sont en raison directe des rayons de courbure de ces surfaces. Le rapport de BO à B'O étant constant et indépendant de l'inclinaison sur l'axe des rayons parallèles CA, C'A', il est évident que toutes les droites qui, telles que AA', unissent deux éléments parallèles des faces opposées, passeront par le point O.

La lentille ayant peu d'épaisseur, on considère le rayon qui passe par le centre optique comme étant tout à fait en ligne droite, en négligeant la double brisure formée à l'immersion et à l'émergence.

On voit, par la proportion précédente, que si l'un des rayons C'B', par exemple, devient infini, BO doit être nul. Cela signifie que, dans un verre plan convexe, le centre optique est situé sur la surface courbe.

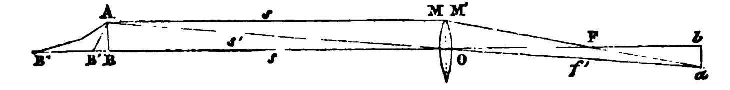
Si on supposait à la lentille la forme générale convexe-concave, on verrait à la seule inspection de la figure qu'on aurait toujours $CO : C'O :: r : r'$ en désignant par r et r' les deux rayons des calottes sphériques, ce qui placerait le centre optique en dehors de la lentille, toujours du côté du segment répondant au plus petit rayon de courbure et d'autant plus près de la surface correspondante que la différence des courbures serait plus prononcée.



Nous verrons plus tard que tout appareil composé de plusieurs verres à un centre optique, analogue à celui d'une lentille simple.

Image d'un objet. — Soit A un point situé hors de l'axe principal, sur un axe secondaire, c'est-à-dire sur une ligne droite quelconque, passant par le centre optique, mais peu éloignée angulairement de la première ; nous savons déjà que l'image de ce point sera unique, et il nous reste à déterminer sa position. Cette image, par suite de la propriété du centre optique, devra se trouver sur l'axe secondaire AO dont nous venons de parler.

Supposons que parmi les rayons partis du point A, l'on considère celui qui marche parallèlement à l'axe principal BO ; il devra se réfracter



suivant M'a passant par le foyer principal F, en sorte que son point de rencontre a, avec l'axe secondaire sera l'image de A, puisque nous savons que cette image doit être unique. Cherchons algébriquement la position ;

la brisure MM′ du rayon lumineux ayant très-peu de longueur, on peut regarder AMM′a comme un triangle semblable à OFa, en sorte que si on désigne par s la distance de A à la lentille, distance comptée parallèlement à l'axe principal, et par f' l'écartement correspondant, Oa, compté sur l'axe secondaire, on aura

$$s : F :: s' + f : f', \quad f's = F(s' + F), \quad f' = \frac{Fs'}{s - F}$$

Si on imagine abaissée la perpendiculaire AB à l'axe principal et qu'en B soit placé un point lumineux, son foyer b sera donné par

$$f = \frac{Fs}{s - F} \quad \text{d'où il suit} \quad \frac{f'}{f} = \frac{s'}{s}$$

ce qui indique que AB et ab seront parallèles entre eux, approximativement du moins, car la figure a supposé que MM′ et O étaient situés sur une perpendiculaire à l'axe principal, et nous savons pourtant que dans les verres convexes-concaves, le centre optique peut être en dehors de la lentille.

Si les points A et B sont très-éloignés, les variations de distances focales sont très-petites par rapport à celles de s et s', en sorte qu'à partir d'une certaine limite d'éloignement, ab perpendiculaire à l'axe principal pourra être regardé comme l'image de toutes les lignes de la nature comprises dans le secteur AOB, prolongé indéfiniment. Ce qui a été dit de la section plane de la figure se rapportant à toute autre section, il s'ensuit que tous les corps à trois dimensions situés très-loin, dans le demi-cône AOB, seront représentés dans le demi-cercle de rayon ab situé dans le *plan focal principal*, c'est-à-dire dans le plan perpendiculaire à l'axe focal principal.

Comme ce que nous venons de dire se rapporte à un secteur quelconque pourvu que son ouverture angulaire soit petite, on peut dire qu'il y a similitude entre l'image perpendiculaire à l'axe principal et la perspective des objets de la nature faite sur un plan également perpendiculaire à cet axe, d'un point de vue confondu avec le centre optique.

Centre optique d'un appareil composé. — L'image et l'objet compris comme nous venons de l'expliquer sont semblables l'un à l'autre, mais ils ne seront vus semblablement qu'autant que l'œil sera placé au centre optique même ; pour toute autre position de l'œil il y aura grossissement $>$ ou $<$ 1, ce qui est avantageux dans certains cas, mais ce qui est désavantageux pour l'aspect des figures à trois dimensions, comme cela sera indiqué au § 195 traitant de la chambre noire. Ce grossissement n'est pas le même, du reste, pour toutes les parties de l'image, ce qui produit une déformation.

Dans un appareil composé de plusieurs verres il existe un point analogue au centre optique, c'est-à-dire jouissant d'une propriété telle que ce point est le sommet d'angles égaux aboutissant aux points correspon-

dants de l'objet et de son image; mais malheureusement ce point est variable de position avec l'éloignement de l'objet.

La recherche de ce point n'ayant pas d'importance dans la plupart des appareils optiques, nous ne nous en occuperons qu'au chap. V en traitant de la chambre noire. et de son influence sur l'aspect des portraits photographiques.

Grossissement. — Recherchons, comme nous l'avons fait pour les miroirs, le grossissement absolu dû à l'emploi d'une lentille simple, le grossissement angulaire dépendant de la position de l'œil qui considère l'image, position dont nous n'avons pas à nous occuper actuellement.

La figure précédente fait voir immédiatement que

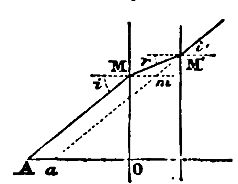
$$g = \frac{ab}{AB} = \frac{f}{s} = \frac{F}{s - F}$$

Pour le cas de l'image réelle, le seul important pour le grossissement absolu, puisque les images virtuelles exigent immédiatement l'emploi de l'œil qui conduit au grossissement angulaire, s doit être $> F$ ou $< o$; dans le second cas g sera toujours < 1, abstraction faite du signe — qui est étranger à la question ; dans le premier cas ce grossissement peut aller de ∞ à o, ce qui répond à $s = F$ et $s = \infty$, en passant par la grandeur égale de l'image et de l'objet obtenue lorsque

$$g = 1 = \frac{F}{s - F} \quad \text{ou} \quad s = 2.F$$

Faces parallèles. — Si, dans la formule générale des lentilles, $\frac{n-1}{r} + \frac{n-1}{r'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{s}$ on fait $r = -r'$, les faces deviennent parallèles et $f = -s$, ce qui dit que l'image superposée à l'objet est vue comme si le corps transparent n'existait pas. Heureusement en est-il ainsi, car ce cas se présente à chaque instant dans les vitres, où non-seulement $r = -r'$, mais où tous deux sont infinis.

Cela n'est pourtant exact qu'autant qu'on néglige, comme nous l'avons toujours fait, l'épaisseur du corps transparent. Supposons à celui-ci une certaine épaisseur dans le cas actuel. Un rayon parti de A suivra le chemin AMM'A', en sortant suivant M'A' parallèle à son incidence AM ; son prolongement irait rencontrer le rayon normal AO non dévié, en a, produisant un déplacement $Aa = Mm$, de sorte qu'en ce point se formera l'image virtuelle de A, par le concours virtuel des rayons réfractés provenant des rayons émergents avoisinant le rayon primitif AM ; quelle est la valeur de ce déplacement, et est-elle constante avec l'inclinaison du faisceau considéré ? On a la suite de calculs très-simples suivants, dans lesquels e représente l'épaisseur du verre



$$Mm = Aa = MM'\frac{\sin.(i-r)}{\sin.i} \qquad MM' = \frac{e}{\cos.r}$$

$$Aa = \frac{e}{\cos.r}\;\frac{\sin.(i-r)}{\sin.i} = e\left(1-\frac{\tang.r}{\tang.i}\right)$$

Pour les rayons qui sont tombés presque normalement sur la surface de la vitre, on peut regarder le rapport des tangentes comme égal à celui des sinus, ce qui donne pour le verre ordinaire

$$\frac{\tang.r}{\tang.i} = \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad Aa = e\left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{e}{3}$$

Lorsque l'obliquité des rayons incidents devient assez grande, le rapport des tangentes diffère beaucoup de celui des sinus donné par la loi de la réfraction, et sous la forme où nous l'avons pris $\frac{\tang.r}{\tang.i} < \frac{2}{3}$, décroît indéfiniment, de ce maximum $\frac{2}{3}$ à o qui répondrait aux rayons rasants; dans ce dernier cas le déplacement de l'image devenant égal à e, on peut dire généralement que l'image virtuelle substituée à un objet placé derrière une vitre se trouve déplacée en chacun de ses points, pour un observateur fixe, de quantités qui varient du tiers de l'épaisseur de cette vitre, à son épaisseur totale, les deux limites qui souvent ne seront pas atteintes provenant de faisceaux normaux et de faisceaux tangents à la vitre.

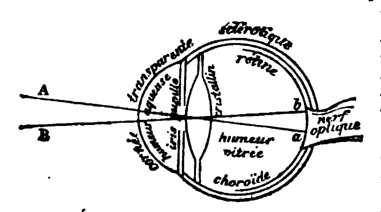
CHAPITRE III

VISION

180. Construction de l'œil. — Avant de donner la description des instruments fondés sur la réflexion et la réfraction, il est indispensable de se rendre compte de la sensation produite par la lumière sur l'organe de la vue et, par conséquent, de s'occuper de sa construction. Nous ne parlerons que de l'œil lui-même, considéré dans ses rapports avec la lumière, en renvoyant aux traités d'anatomie et de physiologie ceux qui en désireraient une description complète.

L'œil présente la forme de deux segments de sphères de rayons diffé-

rents et se raccordant suivant un petit cercle. On les nomme cornée transparente et cornée opaque. La première est la partie antérieure de l'œil : c'est le segment sphérique le plus petit, et celui dont la courbure est la plus considérable. La seconde se compose d'une enveloppe extérieure nommée *sclérotique*, d'un second tissu d'une couleur foncée et désigné sous le nom de *choroïde :* son but est de rendre obscur l'intérieur de l'œil, pour éviter la réflexion de la lumière qui pénètre dans cet organe, et, par suite, la confusion qui en résulterait. Une troisième membrane est appliquée intérieurement et vers la partie postérieure : celle-ci est blanche et translucide. Elle n'est autre chose que le prolongement des nerfs optiques qui, partant de la portion du cerveau nommée *tubercules quadrijumeaux,* et après avoir traversé la sclérotique et la choroïde en un point, s'épanouissent ainsi : on la nomme *rétine.* C'est sur elle que viennent se former les images des objets situés en avant de l'œil ; c'est elle, dont la sensibilité est extrême, qui, suivant l'opinion le plus généralement adoptée, reporte au cerveau la sensation que produisent sur elle les rayons lumineux qui l'atteignent. Une sorte de cloison, nommée *iris*, sépare les deux segments sphériques. Elle est percée d'un trou, la *pupille,* qui varie de dimension, suivant la plus ou moins grande quantité de lumière qui doit la traverser pour rendre la vision plus nette. Un peu en arrière une autre cloison membraneuse soutient le cristallin, véritable lentille biconvexe d'une réfrangibilité plus grande que l'*humeur aqueuse* qui remplit toute la partie antérieure de l'œil. La chambre postérieure contient un autre liquide plus dense que le premier, et moins que le cristallin : il est visqueux et désigné sous le nom d'*humeur vitrée.*



Rien de plus simple actuellement que de suivre la formation de l'image sur la rétine. On voit d'abord que de tous les rayons lumineux partant d'un point S, il n'y a que ceux qui traversent la pupille qui puissent aller rencontrer la rétine : tous ceux qui frappent l'iris sont réfléchis extérieurement ou absorbés. La forme sphérique de la cornée transparente et la densité du liquide qu'elle contient, plus grande que celle de l'air, rendent les rayons lumineux qui s'y introduisent, moins divergents : il entre donc dans la pupille plus de lumière que celle contenue dans le cône dont elle serait la base, et qui aurait son sommet au point lumineux. Ses rayons diminuent encore de divergence en traversant le cristallin, et en sortent convergents. Il existe une relation admirable entre les formes et les réfrangibilités des parties constituantes de l'œil, telle que, dans l'état normal, c'est précisément sur la rétine que sont les foyers de tous les points du corps que l'on examine.

Pour construire l'image d'un objet AB, remarquons qu'en répétant ce

que nous avons fait pour une lentille, il faut construire pour chacun des points, ou seulement pour les points extrêmes A et B, les rayons qui passent par le centre optique de l'œil dont la position est inconnue et peut être variable avec la distance. Leur croisement en ce point nous indique que l'image doit se former renversée.

On s'assure que la sensation de la vue est effectivement produite par une image réelle et renversée au moyen d'une expérience fort simple, qui consiste à placer, dans une ouverture pratiquée à un volet, l'œil d'un bœuf nouvellement tué. On a d'abord mis à nu la rétine vers la partie postérieure de cet œil, en enlevant la sclérotique et la choroïde. Dans cet état de choses, l'observateur placé dans l'intérieur de la chambre, privée d'ailleurs de toute autre lumière, aperçoit sur la rétine, l'image renversée des objets extérieurs.

Persistance des sensations. — Le temps est un élément essentiel dont l'existence est toujours indispensable pour qu'un effet soit produit. Les sensations produites sur la rétine ne sont pas instantanées et elles ne cessent pas instantanément lorsque cesse la cause qui les a fait naître.

Ceci explique pourquoi un éclair apparaît sous la forme d'une ligne continue tandis qu'en réalité il est formé par une suite de points qui se succèdent; les intervalles de temps qui séparent les actions successives sont assez petits, par suite de la vitesse de l'électricité, pour que la sensation du premier point de la trajectoire subsiste encore quand l'action du dernier commence. Il est presque superflu de dire que la succession des éclairs, que l'explication précédente ferait supposer devoir exister simultanément, provient de ce qu'en réalité ils sont dus à des actions successives séparées par des temps trop considérables pour la persistance de la sensation visuelle; le phénomène est complexe et engendré par des décharges successives séparées par des temps finis.

La persistance des sensations est encore mise en évidence dans différentes circonstances ; une roue qui tourne lentement permet de distinguer toutes ses jantes, et elle paraît pleine si sa vitesse de rotation devient suffisamment grande ; un disque décomposé en secteurs peints des différentes couleurs du prisme, paraît blanc s'il tourne avec une rapidité suffisante et si le rapport des surfaces coloriées est convenable ; certains instruments de physique amusante, représentant des sujets dans différentes positions, répondant à des instants consécutifs d'un mouvement, donnent une apparence de ce mouvement, quand ils présentent ces différents sujets avec une rapidité convenable pour que les sensations correspondantes produites dans l'œil ne soient pas séparées par des lacunes et pour que d'autre part elles ne soient pas superposées.

Redressement des objets. — En réfléchissant à ce qui se passe dans l'opération de la vision, on reconnaît aisément l'erreur dans laquelle tombent ceux qui disent que les objets nous apparaissent renversés, et

qu'ils sont redressés par une sorte de travail de l'esprit auquel on ne fait pas attention, répété comme il l'est à tous les instants de la vie. Ils confondent les objets situés extérieurement avec une sensation intérieure; l'image qui se forme sur notre rétine n'est pas soumise aux effets de la vision; elle en est le résultat. L'impression produite par un point ou par le cône lumineux qui en émane, arrivant suivant la direction des génératrices de ce cône, notre pensée conçoit immédiatement que l'objet qui a produit cette impression est situé sur le prolongement des rayons lumineux qui ont éveillé la sensibilité de la rétine. Ce n'est que pour signaler cette erreur, et pour employer une locution consacrée, que nous avons intitulé ce paragraphe, *redressement des objets*.

181. **Contractions du cristallin et de l'iris.** — L'œil produit un effet analogue, quoique beaucoup plus parfait que celui qui provient de l'emploi d'une lentille convergente. Si l'assimilation peut être faite, sous ce point de vue, il en résultera que pour une seule distance de l'œil à l'objet, la vision sera bien distincte; situé plus près, l'objet produira une image qui se formerait au delà de la rétine, si celle-ci n'interceptait pas les rayons réfractés, en coupant chacun des cônes suivant un petit cercle. Placé, au contraire, à une distance plus grande, le point lumineux a son foyer en deçà de la rétine qui coupe encore les cônes, dans leurs secondes nappes, suivant des petits cercles. Il résulte de là que, dans l'un et l'autre cas, la vue doit se troubler, car tous les points d'un corps produisant de semblables figures, il y aura confusion par suite de leur superposition. C'est en effet ce qui arrive quand les objets sont situés beaucoup trop loin ou beaucoup trop près, et ce qui prouve l'exactitude de l'assimilation dont nous avons parlé ; mais il est des limites assez étendues, entre lesquelles la vision conserve sensiblement la même netteté. Cela tient à ce que, dans de certaines circonstances, le déplacement du foyer est très-petit eu égard à celui de l'objet.

Mais au delà de ces limites, et même pour que les variations de distances focales qui sont comprises entre elles aient un effet qui soit négligeable, il faut que l'œil soit armé d'un procédé qui lui permette de rétablir les circonstances convenables pour la nettete de la vision, c'est-à-dire, qui amène la rétine et l'image un peu variable de position, dans un contact parfait. Deux hypothèses ont été faites à ce sujet ; la première suppose que la rétine va chercher le lieu de l'image par un effet de contraction opéré sur la sclérotique ; la seconde suppose au contraire avec plus de vraisemblance, que c'est l'image qui se déplace pour aller se peindre sur la rétine fixe. Que faut-il pour que cette seconde opération puisse se faire? En continuant notre assimilation avec une lentille, il suffit que la densité change ou que les courbures se modifient ; la première hypothèse n'est pas admissible par suite de la presque incompressibilité des liquides, mais la seconde n'a rien d'impossible et elle semble très-probable par suite de l'état musculaire qu'on a reconnu dans

la constitution du cristallin, au moyen de l'action de la pile galvanique et au moyen du microscope qui a constaté l'existence des cellules particulières qui distinguent les muscles des autres parties qui composent les corps animés. Cet état n'ayant pas été reconnu à la sclérotique, qui n'a que des muscles particuliers propres au mouvement qui fait tourner l'œil sur lui-même, il y a tout lieu de croire que la contraction du cristallin explique véritablement le phénomène qui nous occupe.

Nous avons dit plus haut que le changement de densité des différentes parties de l'appareil visuel n'était pas admissible ; mais il ne faut entendre cela que des humeurs aqueuse et vitrée ; en effet la contraction même du cristallin doit changer sa densité propre, ou plutôt modifier les densités relatives de ses différentes parties, car il paraît qu'il n'est pas homogène ; il semble composé de couches concentriques de densités variables auxquelles on attribue la propriété de rendre l'œil achromatique, c'est-à-dire apte à recomposer les couleurs que le phénomène de la dispersion tend à produire ; ce résultat peut provenir aussi de la combinaison des pouvoirs réfringents des humeurs aqueuse et vitrée.

Vue distincte. — Cette propriété de contraction doit évidemment avoir des effets restreints, surtout pour les petites distances qui donneraient dans l'œil des rayons trop peu convergents qui pourraient même devenir divergents si l'objet se trouvait en deçà du foyer principal. Un trop grand rapprochement ne peut en conséquence permettre une sensation nette que par le secours d'un appareil optique.

Le cristallin s'adapte ainsi à diverses circonstances, mais avec une efficacité quelque peu variable ; un certain état de contraction lui est plus favorable que tout autre, et cet état correspond à la ***distance de la vue distincte***, distance qui, variant avec les personnes et avec l'état de l'œil, est d'environ deux à trois décimètres dans les circonstances les plus favorables.

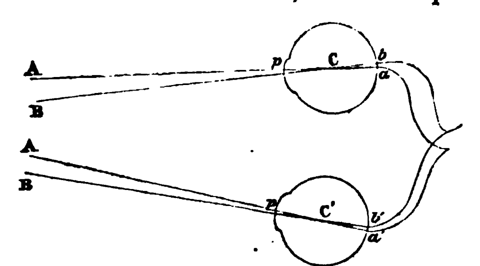
Clarté. —En dehors des considérations physiologiques se rapportant à la qualité de l'œil, il en est une qui est de notre ressort et qui sera d'une grande importance dans la construction des instruments d'optique ; c'est celle qui tient à la quantité de lumière reçue. La faculté que possède la rétine de recevoir des sensations s'étend à des quantités de lumière variables entre des limites très-étendues ; les images sont lucides en fonction de ces quantités, et non proportionnellement à elles. Pour rapprocher le plus possible les diverses circonstances de celle où la sensation est la plus favorable, la pupille est variable d'ouverture au moyen d'une contraction de l'iris ; plus celui-ci aura de champ dans ses variations, plus l'œil, indépendamment de sa sensibilité propre, aura lui-même de champ pour recevoir la sensation convenable d'objets diversement éclairés.

182. Vision binoculaire. — La vision résultant habituellement de

l'usage des deux yeux, il est bon d'étudier l'influence de leurs actions simultanées d'où résultent plusieurs avantages. Le premier et le plus important est d'obvier à la perte d'un œil qui produirait la cécité, une des plus graves infirmités qui puissent affecter les êtres animés; le second résulte de l'augmentation de sensation produite par l'augmentation de lumière agissante, augmentation pourtant très-faible, car on estime que quoique provenant de quantités doubles de lumière, elle n'a que le même effet qui serait produit, sur un seul œil, par une augmentation d'un quatorzième de celle-ci. Le troisième avantage, sur lequel nous reviendrons un peu plus loin, provient de ce que, dans certaines limites, la vision binoculaire donne une idée des distances et du relief des corps.

Lorsqu'un point lumineux doit être considéré par un œil, celui-ci se dirige sur lui d'une manière spéciale telle que l'image de ce point aille toujours se peindre en un lieu spécial de la rétine, lieu pour lequel la sensation est la plus nette, la plus précise. Ce lieu a une très-petite étendue, et autour de lui la sensibilité devient rapidement confuse; c'est ce que l'expérience journalière confirme à chaque instant, car lorsqu'on regarde les différents points d'un corps, l'œil se trouve incessamment en mouvement, et une très-petite variation angulaire nécessite de suite une déviation du rayon visuel. Il résulte de ceci que chaque œil a un axe principal aboutissant au point de plus extrême sensibilité de la rétine; cet axe est habituellement confondu avec l'axe de figure, ou plutôt celui-ci étant en réalité invisible, avec la perpendiculaire à la cornée transparente menée par le centre de la pupille.

Dans la vision binoculaire, l'axe de chaque œil se dirige de la même manière, en sorte que les images d'un point, considéré A, viennent se peindre en *a* et *a'* points les plus sensibles des deux rétines; lorsque la vue voudra se porter sur un second point B, les deux yeux tourneront jusqu'à ce que les images



de celui-ci soient placées aux mêmes lieux *a* et *a'* les plus favorables; mais dans la première hypothèse ceux-ci restant affectés aux images de A, celles de B se formeront en *b* et *b'* d'une manière un peu plus confuse, il est vrai, mais ayant encore un certain degré de netteté si les angles ACB, AC'B sont très-petits. Il y aura ainsi deux images *ab*, *a'b'* de la même ligne AB et cependant la sensation est unique. Pour expliquer cette apparence d'anomalie, il suffit de rappeler que la sensation n'a pas son origine, sa source, sur les rétines, mais en un lieu du cerveau, et qu'alors, pour qu'elle soit unique, il suffit que les deux actions isolées se soient ajoutées ou plutôt se soient jointes avant

leur arrivée au cerveau ; il suffit, par conséquent, que les points correspondants des rétines *a* et *a'*, *b* et *b'*, aient été mis en communication par les nerfs, avant que ceux-ci aient communiqué au cerveau l'action d'où doit naître la sensation. C'est ce qui a lieu en réalité ; il y a communication entre les parties droites des deux yeux, de même qu'entre leurs parties gauches. L'identité d'effet n'est pourtant pas complète et il y a un peu plus de netteté dans une image isolée que dans l'action des deux images.

Nous avons dit que la vision binoculaire donnait une idée plus ou moins exacte des distances et par suite du relief. En effet, quand les points sont plus ou moins éloignés, les axes des yeux qui doivent se diriger également sur ces points sont dans un état de convergence moins ou plus grand, et l'effort musculaire produit une sensation dont l'appréciation conduit approximativement à celle de la distance. En second lieu, les deux yeux considèrent les objets de deux points de vue différents, en sorte que les perspectives formées sur les rétines sont d'autant plus différentes que l'influence de leur écartement est plus sensible, ce qui a lieu avec plus d'intensité pour les petites distances et pour les grandes variations de celles-ci. Ainsi, outre la différence de dimensions de certaines images provenant de l'obliquité des lignes, obliquité variable avec la position du point de vue, il y aura encore, par suite de l'opacité des corps, une différence d'aspect due à ce que l'œil droit plonge plus à droite et inversement, de sorte que des points, visibles pour un seul œil, ne sont pas représentés sur l'image peinte dans l'autre.

Cette dissemblance des effets produits sur les deux rétines et la variation de convergence des axes des yeux sont les principaux moyens que la nature a mis à notre disposition pour l'estimation du relief. Deux autres effets concourent pourtant au même but ; la perspective aérienne, presque nulle lorsque l'action que nous venons d'étudier est le plus sensible, remplace au contraire celle-ci lorsque son influence est très-faible, c'est-à-dire pour les grandes distances ; un dernier renseignement provenant de la grandeur apparente d'un objet de grandeur réelle connue, est encore un élément de la question, mais il n'a qu'une moindre importance par suite de l'hypothèse sur laquelle il est fondé, hypothèse qui n'est applicable qu'à un petit nombre de corps et à un ensemble plutôt qu'à ses détails.

Tous les tableaux ou dessins, exécutés nécessairement sous une forme unique, ne représentant qu'une seule perspective, sont dépourvus des deux premiers modes d'appréciation du relief : aussi font-ils moins illusion, si ce n'est pour les personnes borgnes, lorsque ces modes ont le plus d'influence, c'est-à-dire lorsque les objets représentés sont rapprochés. Pour obvier à cet inconvénient les peintres ont à leur disposition la grandeur relative des objets, insuffisante soit pour les objets inconnus de dimension, soit pour ceux qui ne figurent qu'une seule fois dans le tableau ; ils possèdent encore l'occultation partielle de certaines parties

éloignées, par d'autres plus rapprochées, et enfin la perspective aérienne à laquelle ils prêtent une influence beaucoup plus considérable que celle qu'elle possède réellement et qui, avons-nous dit, n'est sensible aux distances plus petites que 200^m que par un temps de brume.

Il est impossible à un tableau, malgré tout le talent du peintre, de rendre un effet naturel exactement, puisqu'il lui manque toujours le moyen que la nature a mis à la disposition du spectateur qui sentira nécessairement l'absence de l'effet multiple que ce moyen aurait dû engendrer sur ses sensations. Aussi pensons-nous qu'il faut reléguer dans les fables les anecdotes se rapportant à des illusions complètes produites par la peinture, illusions que la statuaire coloriée pourrait seule produire.

Ce que nous venons de dire se rapporte au cas général, cas dans lequel le spectateur possède deux yeux sains et placés comme le sont ceux des hommes, de manière à avoir des sensations simultanées des mêmes objets. Mais si ce spectateur ne dispose que d'un œil, s'il est borgne, ou si ses deux yeux sont placés latéralement sur la face, comme ceux des oiseaux qui sont dirigés l'un à droite et l'autre à gauche, l'illusion pourra exister, puisque ne voyant les objets naturels que sous un aspect, la vue d'un tableau ne lui fera pas reconnaître par sa sensation unique, l'absence d'un double effet dont il n'a jamais la connaissance directe. Le même raisonnement s'applique à la variabilité de convergence qui n'existe pas pour lui.

L'illusion pourra donc exister dans certains cas d'exécution parfaite, mais le tableau n'aura pas donné pour cela l'idée complète du relief ; il lui manquera toujours la partie de cette idée qui provient de la vision binoculaire ; il y aura seulement absence du mensonge que le spectateur ordinaire reconnaît dans le tableau qui ne lui présente pas tout ce qu'il sait devoir être produit par l'objet naturel.

C'est dans ce sens qu'il faut s'expliquer pourquoi certains amateurs de tableaux regardent ceux-ci d'un seul œil en se faisant un cornet de leurs mains ; c'est qu'alors s'ils ne voient pas en réalité ce qui devrait exister, ils n'ont du moins pas la sensation directe du mensonge. Cette habitude a, du reste, un autre avantage : elle isole le sujet du cadre et des objets environnants dont la vue ne peut que nuire à l'illusion.

L'estimation de la distance et celle de la grandeur des objets résultent immédiatement de ce qui vient d'être dit à propos de la vision binoculaire.

183. **Défauts de la vue.** — La distance de la vision distincte varie évidemment d'un individu à un autre, en raison de la conformation des yeux. Les *presbytes*, chez lesquels le cristallin est trop peu convexe, sont obligés d'éloigner de leurs yeux l'objet qu'ils veulent voir distinctement, sans quoi l'image tendrait à se former au delà de la rétine. Les yeux des *myopes*, au contraire, font converger trop rapidement les rayons ré-

fractés, de sorte que, pour bien voir un corps, ils doivent l'approcher beaucoup de leurs yeux.

Pour obvier à ces deux inconvénients, on emploie des lentilles convexes dans le premier cas, et concaves dans le second, et alors les presbytes et les myopes voient distinctement à la distance ordinaire de la vision distincte.

L'âge, en diminuant la convexité du cristallin, ou la densité des humeurs, et peut-être l'une et l'autre à la fois, augmente la presbytie, tandis qu'il atténue la myopie. Chez les personnes affectées de la première de ces infirmités et chez tous les hommes sans doute, une autre cause affaiblit encore très-sensiblement la vue. La rétine devient moins sensible ; il faut une lumière plus intense, pour qu'elle ressente et reporte au cerveau l'impression des objets. Les personnes âgées remarquent en effet qu'elles distinguent moins bien que les plus jeunes les corps qui se présentent à elles, et qu'obligées de se servir de lunettes pour lire sous l'influence d'une lumière moyenne, elles lisent encore sans avoir besoin d'en faire usage lorsque la clarté est très-vive, comme en plein soleil ou auprès d'une forte lampe, ce qui n'indique pas que les lunettes donnent plus de lumière, mais ce qui dit que celles-ci faisant disparaître une des causes nuisibles, la seconde agit seule et produit un effet moins intense qui peut être plus facilement vaincu que l'effet multiple.

Nous terminerons ce qui est relatif à la vue, en disant que les presbytes voient mieux que les autres personnes les objets très-éloignés, par la raison que le foyer se rapprochant, dans ce cas, du cristallin, tend ainsi à se former sur la rétine, tandis qu'il est en deçà chez les autres hommes. Quant aux myopes, il est évident que plus ils sont éloignés d'un corps, moins ils le voient.

Nous avons dit que les axes visuels des yeux, ou les lignes qui passent par le centre optique de l'œil et par le point de plus extrême sensibilité de la rétine, se confondent habituellement avec les axes de figure de la partie antérieure, c'est-à-dire qu'ils passent par le centre de la pupille et qu'ils sont perpendiculaires à la cornée transparente. Il n'en est pas toujours ainsi, et cela donne lieu aux différents cas de *strabisme* qui peuvent affecter des apparences diverses suivant les inclinaisons relatives des axes visuels et des axes de figure.

CHAPITRE IV

MICROSCOPE SIMPLE ET LUNETTE ASTRONOMIQUE

Les deux instruments dont nous allons nous occuper dans ce chapitre sont des parties essentielles de tous les goniomètres précis; aussi nous les étudierons avec quelque détail.

184. Loupe ou microscope simple. — La loupe, qui est une lentille convergente, est destinée à amplifier angulairement les images des objets situés à de petites distances, comme les lunettes et les télescopes ont pour but d'amplifier celles des objets éloignés.

Un objet paraissant d'autant plus grand qu'on le rapproche davantage de l'œil, il semblerait suffisant, pour obtenir cette amplification, d'opérer ce rapprochement, d'autant plus que nous savons que sa clarté est indépendante de la distance. Mais d'autre part nous savons aussi que les limites de contraction du cristallin étant nécessairement très-restreintes, un trop grand rapprochement donnerait lieu à une image réelle située en arrière de la rétine, et même, si ce rapprochement dépassait une certaine limite, à une apparence virtuelle ne produisant qu'une sensation très-confuse. On ne peut donc pas, sans le secours d'un instrument, rapprocher l'objet de l'œil, d'une quantité moindre que la vue distincte, sans perdre en netteté de sensation ce qu'on gagne en amplitude angulaire.

La loupe permet ce plus grand rapprochement, sans inconvénient pour la netteté de l'image.

Si entre la lentille et son foyer principal on place un objet *ab*, il donnera naissance à une image virtuelle *a'b'* droite et sous-tendant le même angle que *ab*, au centre optique de la lentille; si on rapproche cet objet de la lentille, l'angle sous-tendu augmentera, et il peut sembler qu'on obtiendra ainsi par un simple rapprochement telle valeur angulaire *aCb* que l'on voudra. Mais il faut se rappeler que la netteté de la vision

exige que l'image virtuelle dont les rayons agissent seuls sur l'œil, soit située à une distance convenable de cet œil, qui ayant nécessairement une certaine profondeur, aura son centre optique en O, à une distance m de celui de la lentille. Il faut donc que φO ait une grandeur absolue égale à la distance δ de la vue distincte ; mais $C\varphi = -f$, puisque l'image est virtuelle, et par suite

$$\delta = \varphi O = C\varphi + m = -f + m \quad \text{ou} \quad f = -(\delta - m)$$

ce qui transporté dans la formule générale $\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{s}$, donne

$$\frac{1}{F} = -\frac{1}{\delta - m} + \frac{1}{s} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{s} = \frac{\delta - m + F}{F(\delta - m)}$$

ce qui précise la position particulière de l'objet, convenable pour la perception la plus nette, pour un œil placé en O ; mais comme pour la netteté de la vision la valeur de δ n'est pas invariablement unique, il en résulte de légères variations possibles sur la distance convenable du point lumineux.

Grossissement angulaire. — Ce grossissement, essentiellement différent du grossissement absolu que nous avons étudié quelquefois jusqu'à présent, est le rapport de l'angle sous lequel on voit un objet, à celui sous lequel on le verrait sans l'emploi d'un instrument particulier. Dans le cas actuel ab est vu sous l'angle $a'Ob' = \frac{a'b'}{\delta}$ en confondant les tangentes avec les angles, ce qui est permis par suite des petites valeurs qu'ont toujours ceux-ci et ce qui résulte de ce que nous avons dit de la non-obliquité nécessaire des rayons lumineux efficaces. Si on voulait apercevoir ce même objet ab sans le secours d'aucun instrument, il faudrait le transporter à la distance de la vue distincte δ, ce qui le ferait voir sous un angle $\frac{ab}{\delta}$. Le grossissement angulaire sera donc ici, en réalité, confondu avec le grossissement absolu,

$$g = \frac{a'b'}{\delta} \times \frac{\delta}{ab} = \frac{a'b'}{ab} = -\frac{f}{s} = \frac{\delta - m}{(\delta - m)F}(\delta - m + F) = 1 + \frac{\delta - m}{F}$$

expression qui peut aller de 1 à ∞ quand F prend des valeurs allant de ∞ à 0, et qui, indépendamment de F, augmente quand m diminue, c'est-à dire quand on approche l'œil de la lentille, en faisant varier convenablement la distance de l'objet.

Le grossissement angulaire peut être considéré sous un autre aspect lorsqu'il s'applique à l'usage d'une lentille de long foyer, auquel cas il est nécessairement petit quoique toujours plus grand que l'unité. En effet dans l'usage des besicles des vieillards, par exemple, si on enlève la lentille, l'objet paraît plus confus, mais sans cesser pourtant d'être assez visible, parce que s, trop petit pour la nette perception, est pourtant encore assez grand. On voit alors que les grandeurs angulaires répon-

dant à ces deux aspects de l'objet considéré du même point, avec ou sans lentille, sont $a'Ob'$ et aOb, c'est-à-dire qu'il y a un petit grossissement d'autant moins sensible que les deux sommets O et C sont rapprochés, grossissement qui deviendrait égal à l'unité si le centre optique de l'œil et celui de la lentille pouvaient être confondus.

Clarté de l'image. — Il est nécessaire de toujours tenir compte de la clarté des images substituées à la réalité, pour s'assurer si en atteignant un certain but on n'a pas trop diminué cette clarté. Nous dirons en thèse générale qu'aucun instrument d'optique ne peut augmenter la clarté, pas plus qu'une machine ne peut augmenter le travail qui lui a été confié; dans l'un ou l'autre cas une augmentation ne peut provenir que d'une augmentation de dépense, et il y a toujours diminution d'effets produits, dans les machines par les frottements, dans les appareils optiques par les extinctions de lumière dues à la réfraction et à la réflexion qui ne s'effectuent jamais sur des corps infiniment transparents ou réfléchissants.

Abstraction faite de ces pertes, il faut même encore que les appareils optiques satisfassent à certaines conditions variables avec eux-mêmes, pour que cette clarté ne soit pas diminuée.

Voyons ce qui se passe pour la loupe, et, pour y arriver, supposons que s soit un point lumineux, φ son image virtuelle. Si on supposait la pupille confondue avec la lentille, les quantités de lumière envoyées par le point S embrasseraient le même cône, qu'il y eût ou non une lentille agissante, et la clarté ne serait pas changée. Mais la pupille doit, en réalité, être placée en pp' que nous pouvons regarder comme situé au même lieu que le centre optique de l'œil, par suite du peu de distance qui la sépare réellement de celui ci.

Le secteur lumineux agissant sur cette pupille de grandeur linéaire p, sera $p\varphi p'$ engendré par $\alpha S\beta$ émergé de S, et s'appuyant sur la base $\alpha\beta = \omega$; celui qui proviendra de l'action directe serait pSp' appuyé sur la base p. Les quantités de lumière reçues dans les deux cas seront donc dans le rapport

$$\frac{\omega}{s} : \frac{p}{s+m} \quad \text{ou} \quad \frac{\omega}{p}\,\frac{s+m}{s} = \frac{-f}{-f+m}\,\frac{s+m}{s}$$

Mais le grossissement angulaire dont nous avons parlé en dernier lieu est (*fig. de la page* 563)

$$\frac{a'Ob'}{aOb} = \frac{a'b'}{-f+m} : \frac{ab}{s+m} = \frac{a'b'}{ab}\,\frac{s+m}{-f+m} = \frac{-f}{s}\,\frac{s+m}{-f+m}$$

La clarté, qui tient de ces deux rapports, sera donc égale à l'unité, puisqu'ils sont égaux, et comme il en serait de même pour toutes les sec-

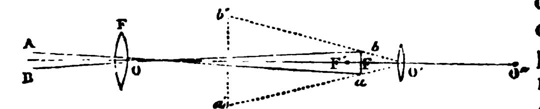
tions analogues à celle de la figure, on peut dire que le résultat indiqué est général.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut encore que l'ouverture efficace ω dont tous les rayons doivent embrasser la pupille existe sur la lentille, c'est-à-dire que l'ouverture de celle-ci soit $> \omega$. On ne peut donc pas, sans perdre de la clarté, se servir d'une loupe dont l'ouverture soit trop petite ou dont la distance focale principale atteigne un certain degré de petitesse, ces deux quantités étant fonction l'une de l'autre. On voit facilement, à l'aspect de la figure, que la limite d'ouverture est la même que celle de la pupille pour le cas de juxta-position de l'œil et du verre. On emploie du reste fort rarement des loupes aussi petites, qui seraient d'un usage incommode et qui donneraient de mauvais résultats.

Petite ouverture. — La loupe peut, jusqu'à un certain point, être remplacée par un procédé d'un emploi très-facile. Il suffit de percer un papier d'un petit trou à travers lequel on pourra regarder un objet très-rapproché. Pour comprendre ce qui se passe alors, rappelons-nous ce que nous avons dit relativement à la vision. Un point très-rapproché de l'œil formerait son image en arrière de la rétine, si celle-ci n'interceptait pas le cône lumineux, en formant une section circulaire qui remplace alors le point considéré. Tous les points de l'objet étant dans le même cas, chacun d'eux se trouve remplacé par un petit cercle, et la sensation est confuse. Mais si, entre l'œil et le corps lumineux, on interpose la petite ouverture, chaque faisceau incident, qui avait précédemment pour sommet un point quelconque de l'objet et pour base l'ouverture de la pupille, se trouve beaucoup aminci ; par suite, la section formée sur la rétine par le cône réfracté, se trouve beaucoup diminuée et tend à se réduire à un point, circonstance qui permet la vision distincte. On s'approche d'autant plus de cette limite favorable que le petit trou percé dans l'écran a un faible diamètre.

Contrairement à ce qui se passe pour la loupe, qui permet de voir un petit objet sous un grand angle, sans gagner, mais sans perdre de lumière, notablement du moins, l'emploi d'une petite ouverture rend les corps considérés d'autant moins lumineux que leurs images deviennent plus nettes, puisque c'est précisément sur la perte d'une portion de la lumière qu'ils envoient qu'est fondée cette netteté.

185. **Lunette astronomique.** — La lentille convergente qui vient de nous permettre de voir sous de grands angles de petits objets desquels on peut se rapprocher indéfiniment, peut également permettre l'amplification de l'angle visuel sous lequel on voit un objet éloigné. Dans le premier cas, nous avons utilisé l'image virtuelle et droite, due à l'interposition



de la lentille; dans le second, il faut employer l'image réelle et renversée qui se forme en ab sous-tendant au centre optique O, un angle dont les côtés sont le prolongement de ceux qui vont aboutir aux points A et B de l'objet. Cette image peut être vue par un œil placé en une position unique O″, pourvu que l'ouverture de l'angle aOb soit assez petite pour que ce point soit situé dans chacun des faisceaux réfractés, et pourvu encore que la distance de O″ à l'image soit à peu près celle de la vue distincte δ.

L'objet AB supposé très-loin, serait vu à l'œil nu sous l'angle O; on voit son image substituée sous l'angle O″, le grossissement angulaire est donc

$$g = \frac{O''}{O} = \frac{f}{\delta} \text{ ou à très-peu près } \frac{F}{\delta}$$

Il y aurait donc grossissement produit par l'emploi d'une lentille dont la distance focale principale serait plus grande que la vue distincte, et diminution dans le cas contraire.

Mais, au lieu de considérer l'image réelle à l'œil nu, on se sert de la loupe qui permet de la regarder d'un point beaucoup plus rapproché, et de la voir, par conséquent, sous un angle plus grand, tout en la laissant droite par rapport à elle-même, c'est-à-dire renversée par rapport à l'objet. On place à cet effet, en arrière de l'image, une loupe qui prend alors le nom d'*oculaire*, et le grossissement obtenu se trouve d'autant plus augmenté que le rapprochement a pu être considérable, c'est-à-dire que la distance focale principale F′ de l'oculaire est plus petite.

Supposons, pour avoir l'expression de ce grossissement, que l'œil puisse être regardé comme confondu avec l'oculaire, ou que dans la dernière expression algébrique trouvée, $m = o$, l'angle O′ au centre optique de l'oculaire, représentera celui sous lequel on verra l'image virtuelle $a'b'$ substituée à l'image réelle ab, et le grossissement sera, en conservant toujours les mêmes notations,

$$g = \frac{O'}{O} = \frac{f}{s'} = \frac{F}{s'}$$

puisque l'objet considéré est supposé très-loin, et qu'alors f diffère très-peu de F. La distance s' de l'image réelle ab à l'oculaire est liée à la distance de la vue distincte $\delta = -f'$ par la relation

$$\frac{1}{F'} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{\delta} \quad \text{ou} \quad s' = \frac{F'\delta}{F' + \delta}$$

et le grossissement angulaire peut s'écrire

$$g = \frac{F}{\delta}\left(1 + \frac{\delta}{F'}\right)$$

Le second facteur peut aller de 1 à ∞ quand F′ va ∞ à o, et pour augmenter le grossissement il suffit de prendre un oculaire de distance

focale petite. Quand ce grossissement devient considérable $\frac{\delta}{F'}$ devient grand par rapport à l'unité, et on peut prendre pour expression approximative

$$g = \frac{F}{F'}$$

Il semble donc possible d'augmenter indéfiniment le grossissement par l'augmentation de la distance focale F du premier verre, qu'on nomme *objectif*, ou par la diminution de l'élément correspondant F′ de l'*oculaire*.

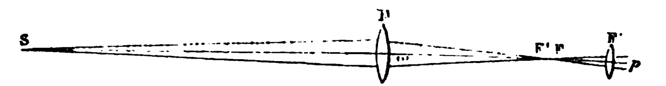
Le premier moyen est de beaucoup le plus convenable, mais il engendre un inconvénient qui limite son emploi ; cet inconvénient résulte de l'agrandissement proportionnel que doit subir la lunette dans tous les sens, agrandissement qui le rend d'un transport embarrassant. D'autre part les grands objectifs sont d'une construction difficile et très-dispendieuse ; l'homogénéité d'une grande masse de verre est rarement parfaite, et la plus petite déformation locale d'une des surfaces donne lieu, comme le défaut d'homogénéité, à un grand déplacement du point de concours partiel des rayons qui ont traversé la partie défectueuse, point de concours qui se trouve très-mal placé alors par rapport à l'oculaire qui est disposé de la façon convenable pour les autres rayons, et l'image se trouve beaucoup plus troublée que si l'objectif affecté du même défaut avait été petit, car alors le déplacement partiel de l'image réelle aurait été petit, et l'oculaire n'aurait pas été si mal placé par rapport à cette image.

L'augmentation du grossissement due, à la diminution de la distance focale principale de l'oculaire, est plus facile à obtenir, mais elle est limitée par la nécessité de conserver aux images une certaine clarté, nécessité dont nous allons nous occuper, et par les mauvais résultats obtenus avec des oculaires trop petits. Si on se rappelle, en effet, les restrictions que nous avons établies dans la recherche de la formule des lentilles, formule d'où découlent les résultats que nous avons obtenus, on comprendra que ces restrictions ne seront pas toujours satisfaites, notamment dans l'emploi de très-petites lentilles, pour lesquelles les points lumineux seront situés à des distances trop petites de la surface, et pour lesquelles encore l'épaisseur du verre, considérable par rapport à ces distances, ne pourra plus être négligée.

Le grossissement, qui semblait pouvoir être augmenté indéfiniment par l'augmentation de F ou par la diminution de F′, est donc limité d'un côté comme de l'autre.

Clarté de l'image. — Cherchons quelles sont les clartés relatives des objets vus à l'œil nu et avec la lunette.

La pupille placée derrière l'oculaire occupe l'étendue p qui embrasse un faisceau lumineux répondant sur l'objectif à une amplitude ω. Tous les rayons du faisceau incident $S\omega$ sont efficaces pour l'œil armé de la



lunette, tandis que, sans le secours de celle-ci, le faisceau se serait appuyé sur la base p au lieu de la base ω. Les quantités de rayons reçus dans les deux cas sont donc dans le rapport

$$\frac{\text{Lunette}}{\text{Œil nu}} = \frac{\omega^2}{p^2}$$

mais g désignant le grossissement linéaire trouvé précédemment, les clartés de chaque unité de surface des images perçues sont en raison inverse de ces surfaces, d'où il résulte

$$\frac{\text{Clarté, lunettte}}{\text{Clarté, œil nu}} = \frac{\omega^2}{p^2}\,\frac{1}{g^2}$$

La figure indique immédiatement que $\omega = p\,\frac{F}{F'} = pg$.

Le rapport des clartés est donc égal à l'unité, et l'objet considéré apparaît avec le même éclat dans toutes les circonstances, ou du moins il ne peut pas être plus éclairé par le secours de la lunette, car nous verrons plus loin qu'il faut satisfaire à certaines conditions pour qu'il le soit autant.

Avant de pousser plus loin cette discussion, il est important de faire une réserve relative aux objets situés à une distance presque infinie, comme les étoiles. Alors le grossissement n'a plus lieu; la première partie du raisonnement continue seule à subsister, et le rapport des clartés est

$$\frac{\omega^2}{p^2} = \frac{F^2}{F'^2} = g^2.$$

Ce fait est analogue à celui que nous avons mentionné précédemment sur les clartés d'objets considérés à des distances différentes, clartés constantes pour les objets situés à des distances finies, et inverses aux carrés des distances, pour les étoiles.

Le rapport relatif aux étoiles (les autres astres ne sont pas dans le même cas) explique pourquoi on peut apercevoir avec une lunette des étoiles invisibles à l'œil nu. Si, de plus, on observe que la visibilité des images est grandement influencée par les milieux qui entourent ces images, on remarquera que l'usage d'une lunette avec laquelle on considère une étoile, augmente la clarté de celle-ci, en laissant constante celle de l'atmosphère dont toutes les parties situées à des distances finies sont soumises au grossissement. On comprend ainsi comment il est possible d'apercevoir avec une lunette des étoiles en plein jour.

Revenons au cas ordinaire, celui des objets terrestres, ou même des astres autres que les étoiles. Nous avons dit que les objets considérés

avec le secours d'une lunette n'étaient jamais plus éclairés. Nous l'avons prouvé pour la lunette astronomique ; il en est de même ***pour tout appareil optique.***

Si l'on ne peut pas augmenter la clarté des images, il est à craindre, au contraire, qu'on la diminue. Les verres employés, quelque grande que soit leur transparence, éteignent toujours un peu la lumière, et ils en réfléchissent également une partie. On attribue généralement à chaque lentille une perte de lumière égale au $\frac{1}{10}$ de celle qu'elle reçoit, perte beaucoup plus faible que celle due à la réflexion sur un miroir, dans les mêmes circonstances d'incidence presque normale. (Dans ce cas, un miroir métallique perd en effet les $\frac{4}{10}$ de la lumière reçue.)

Cette remarque conduit à cette conséquence, qu'une lunette diminue la clarté, et cela d'autant plus qu'on y emploie un plus grand nombre de verres.

Abstraction faite de cette cause de diminution, que nous négligerons à l'avenir, il faut encore satisfaire à une condition essentielle relative au grossissement. Si, en effet, on se reporte aux raisonnements qui précèdent, on voit que pour l'exactitude des conséquences que nous en avons tirées, il faut que l'ouverture efficace de l'objectif $\omega = p.g$ soit plus petite que son ouverture réelle, ou tout au moins égale à celle-ci. Mais l'ouverture réelle de l'objectif doit être petite par rapport aux rayons des surfaces qui le terminent, ou par rapport à F, afin d'éviter l'obliquité des rayons lumineux ; supposons cette ouverture $= n\mathrm{F}$, n étant un coefficient assez petit, on devra avoir

$$\omega < n\mathrm{F}, \quad pg < n\mathrm{F}, \quad p\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{F}'} < n\mathrm{F}, \quad \mathrm{F}' > \frac{p}{n}$$

Le coefficient n dépend de l'exécution mécanique du verre et surtout de sa composition physique et chimique ; il varie de $\frac{1}{10}$ à $\frac{1}{14}$, généralement du moins. Pour fixer les idées, supposons-le de $\frac{1}{10}$; la pupille a environ $0^{\mathrm{m}},003$ de diamètre ; il faut donc que

$$\mathrm{F}' > \frac{p}{n} \quad \text{ou} \quad > 0^{\mathrm{m}},03$$

Quoi qu'il en soit de cette valeur numérique approchée de la limite de l'oculaire, limite au delà de laquelle la clarté serait plus faible avec la lunette que sans son aide, il n'en est pas moins vrai qu'elle existe et que, par suite, le grossissement dont l'expression est $\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{F}'}$ ne peut pas augmenter indéfiniment par une diminution infinie de F′, sans du moins perdre de la clarté.

Limite du grossissement. — L'augmentation du numérateur F du grossissement $\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{F}'}$ fait croître celui-ci proportionnellement, mais en produisant un autre inconvénient, l'allongement de la lunette dont la di-

mension doit être assez restreinte pour qu'il soit facile de la manier. Il est clair, en effet, que la longueur de la lunette égale à F + F′ peut sensiblement être prise égale à F. Cherchons quel est le grossissement possible pour une longueur de lunette donnée. Nous avons vu que pour obtenir le maximum de clarté de l'image, il fallait que l'on eût

$$F' > \frac{p}{n}, \quad \text{mais } F' = \frac{F}{g},$$

il faut donc que

$$F > \frac{g \cdot p}{n} \quad \text{ou} \quad g < \frac{nF}{p},$$

Si, pour avoir un exemple, on suppose $n = \frac{1}{10}$, $p = 0^m,003$, $F = 0^m,2$, la limite du grossissement sera

$$g = \frac{0,2}{0,03} = \frac{20}{3}$$

environ 7. Mais, encore une fois, observons que ces nombres n'ont rien d'absolu ; ils dépendent surtout de la valeur du coefficient n, c'est-à-dire de la qualité de l'objectif ; ils dépendent aussi de cette circonstance qu'il peut être utile, dans certains cas, de perdre de la clarté en gagnant du grossissement, ce à quoi on se résout quelquefois, guidé comme on l'est par les considérations qui vont suivre. Cette perte de clarté est même très-avantageuse et indispensable quand on observe le soleil, et, dans ce cas, on l'augmente par l'interposition de verres noirs placés devant l'objectif. On risquerait sans cela de perdre la vue quand la lunette grossit beaucoup. Ce fait peut étonner si on se reporte à ce que nous avons dit de la clarté toujours quelque peu diminuée par l'usage d'un appareil optique, et si l'on remarque alors que le soleil ne paraît pas plus lumineux qu'à l'œil nu qui peut pourtant supporter l'éclat de cet astre sans subir l'effet que nous venons d'indiquer. Pour se rendre compte de ce fait, il suffit d'observer qu'avec une lunette grossissante, l'image du soleil, formée sur la rétine, est beaucoup plus grande, et que si l'action exercée sur chaque élément de cette rétine est le même, il peut en être différemment de l'action physiologique résultant de l'ensemble des actions partielles.

Enveloppe de la lunette, diaphragmes et réticule. — Il peut sembler étrange que la clarté des objets ne soit pas augmentée par l'intermédiaire des deux verres composant une lunette astronomique, quand chacun a pu remarquer, par l'usage, une plus grande netteté dans les contours. Cette circonstance tient à deux causes différentes : 1° l'image de l'objet considéré se trouve placée à la distance de la vue distincte, distance pour laquelle la netteté est la plus grande ; 2° l'objectif et l'oculaire sont renfermés dans un tube noirci à l'intérieur. L'œil n'aperçoit alors qu'une petite étendue de l'espace, et aucun rayon étranger ne vient distraire la

rétine, comme cela a toujours lieu quand on regarde sans le secours d'une lunette. On peut s'assurer facilement de l'influence très-grande sur la visibilité, des causes étrangères qui contrarient dans l'œil l'effet d'un objet, en considérant celui-ci successivement à l'œil nu et avec un tube vide noirci à l'intérieur.

Dans ce tube on place habituellement des diaphragmes ; ce sont des cercles dont le milieu est vide ; ils ont pour but d'éteindre les rayons extrêmes des cônes lumineux, qui sont ceux qui influent le plus sur l'aberration de sphéricité.

Un autre diaphragme est mis à l'endroit même où doit se former l'image, afin de limiter l'étendue de celle-ci, en éteignant celles des points qui, trop éloignés angulairement de l'axe principal, auraient envoyé des rayons trop obliques par rapport à la surface de l'objectif, rayons qui, réfractés un peu irrégulièrement, auraient apporté du trouble dans les images des points situés plus près de la direction de l'axe.

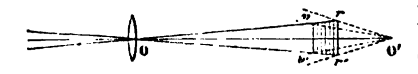
Ce dernier diaphragme porte habituellement un *réticule* composé de deux fils très-minces placés en croix ; il doit du moins en être ainsi toutes les fois que la lunette astronomique est destinée à préciser une direction ou à mesurer un angle. Ce réticule se détache en noir, dans les observations de jour, parce qu'il éteint par son opacité les rayons lumineux qui auraient formé des images aux points que les fils occupent réellement ; pour qu'il en soit ainsi, il faut qu'il soit exactement placé au foyer de l'image réelle, sans quoi, au lieu d'éteindre les rayons dont nous venons de parler, il ne ferait qu'intercepter une partie de ceux qui, après leur rencontre ou avant celle-ci, seraient à l'état de divergence ou de convergence, et cette partie dépendrait de la position de l'œil ; il est donc indispensable que, pour l'emploi d'un réticule, il y ait formation d'une image réelle dans l'instrument auquel on l'adapte.

Dans les observations de nuit, les fils doivent au contraire être lumineux pour se détacher sur le fond du ciel, qui est noir. On les éclaire alors avec un petit miroir plan placé en avant de l'objectif, sous une inclinaison convenable pour renvoyer sur celui-ci les rayons divergents venus d'une petite lanterne ; ces rayons, réfractés par l'objectif, donnent naissance à une image virtuelle de la lanterne, et par suite ils tombent sur le réticule à l'état de divergence en éclairant celui-ci d'une manière diffuse.

186. **Achromatisme.** — Le foyer principal donné par la formule $\frac{n-1}{r} + \frac{n-1}{r'} = \frac{1}{F}$ est variable de position avec les différents rayons élémentaires qui composent la lumière blanche, par suite des variations de l'indice de réfraction n qui est d'autant plus grand que la couleur s'éloigne du rouge et se rapproche davantage du violet ; la position d'un foyer quelconque lié au foyer principal par la relation $\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{s}$ est donc essentiellement multiple pour les différentes couleurs, en sorte

que, dans une circonstance quelconque, il se forme autant d'images qu'il y a d'indices de réfraction.

Un œil placé en O′ aperçoit ces images sous des angles différents, de manière que la portion centrale $vO'v'$ se trouve seule formée de tous les rayons du spectre, mais dans une proportion qui n'est pas celle de la nature, et les objets paraissent irisés de couleurs qui, d'un rouge pur à l'extérieur, se nuancent ensuite par l'adjonction successive de toutes les autres couleurs.



Sans être aussi marqué que l'indique la figure, l'effet dû à l'*aberration de réfrangibilité* est assez sensible pour qu'il faille le corriger dans les lunettes ; on rend les objectifs *achromatiques* par le procédé suivant, dont nous ne faisons qu'indiquer le sens général.

Nous avons pu trouver, pour une lentille simple, la distance focale principale en fonction de l'indice de réfraction n et des deux rayons de courbure r et r' de ses deux surfaces. Si on accole deux verres ayant une surface commune, de rayon r', et des surfaces extérieures de rayons r et r'', l'effet produit sera évidemment le même que si r' n'existait pas ; mais si on compose ces deux lentilles de matières différentes, le crown-glass et le flint-glass, l'influence de cette surface de séparation se fera sentir. On pourra arriver, en désignant par n et n' les deux indices de réfraction de ces matières, à une valeur de F qui sera fonction des éléments de la lentille double.

$$F = f\,(r, r', r'', n, n')$$

En attribuant à n et n' les valeurs qui répondent aux rayons rouges, et qui sont généralement

$$n = 1{,}526 \text{ pour le crown, et } 1{,}628 \text{ pour le flint}$$

cette formule donnerait F pour un assemblage de courbures $r.r'.r''$.

La même formule, appliquée aux rayons violets, donnerait, en désignant les deux indices de réfraction de ces rayons, pour la même composition de verre, par $n + dn$, $n' + dn'$,

$$F = f\,(r.r'r'',\ n + dn,\ n' + dn')$$

formule qui, par la substitution des valeurs données précédemment à r, r', r'', et par celles des indices

$$n + dn = 1{,}546 \text{ pour le crown, et } n' + dn' = 1{,}671 \text{ pour le flint}$$

ferait également connaître la distance focale principale des rayons violets.

Il n'est pas possible de reconstituer complétement l'image incolore semblable à celle de la nature, pour tous les rayons lumineux colorés et pour toutes les distances focales ; on se contente de faire superposer celles de ces images qui répondent à des objets situés à l'infini et aux couleurs rouge et violette, et on y arrive par la combinaison des deux équations

précédemment écrites ; en égalant les deux valeurs de F, il ne reste plus qu'une équation à trois inconnues r, r', r'' dans laquelle on peut se donner deux d'entre elles et conclure la troisième. Si la distance focale principale F commune aux rayons rouges et violets est donnée d'avance, il n'y a plus qu'un seul des rayons de courbure qui puisse être pris arbitrairement.

Il est bon de remarquer que la forme de la fonction que nous n'avons pas précisée, ne permettrait pas de résoudre la question si, comme le pensait Newton, les indices de réfraction $n + dn$, $n' + dn'$ d'une même couleur, étaient proportionnels à n et n' qui se rapportent à l'autre.

On arrive seulement, en agissant comme nous venons de le faire pressentir, à réunir les foyers principaux des rayons extrêmes rouge et violet, mais il ne s'ensuit pas nécessairement la réunion des foyers principaux des couleurs intermédiaires. Pour opérer la réunion complète, il faudrait employer sept lentilles juxtaposées ; mais pour éviter les pertes de lumière qui en résulteraient, on se contente habituellement de l'usage de deux lentilles et quelquefois de trois.

Il ne faut pas conclure, de la superposition des foyers principaux, celles de tous les foyers répondant à des distances quelconques. Les objectifs de photographie employés à l'exécution des portraits sont rendus achromatiques, par expérimentation, pour une certaine distance de l'objet et non pour les distances infinies. Ces objectifs doivent, de plus, faire confondre le foyer lumineux avec le foyer des rayons chimiques, et l'achromatisme doit surtout se rapporter à ce dernier.

L'aberration de refrangibilité est beaucoup moins sensible sur l'oculaire que sur l'objectif. L'effet produit transporte les images virtuelles à des distances differentes de l'œil, mais en les laissant toujours comprises dans un même angle ayant son sommet au centre optique. L'œil, placé très-près de l'oculaire, les voit donc sensiblement superposées, et par suite les couleurs se trouvent recomposées.

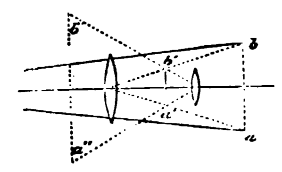
Cependant il y a avantage à substituer à l'oculaire simple un système oculaire achromatique. En premier lieu, il n'est pas exact de supposer l'œil au sommet de l'angle sous-tendant les différentes images, car, en disant l'œil, il faudrait entendre son centre optique et non pas sa surface externe qui seule peut se rapprocher beaucoup du centre optique de l'oculaire. En second lieu, les images de couleurs différentes du même objet, situées à des distances différentes, ne peuvent pas être également perceptibles, ce qui est nécessaire pour la recomposition nette de l'image finale formée sur la rétine.

Ces inconvénients ont peu d'importance dans les lunettes d'un faible grossissement, mais elles en acquièrent une considérable lorsque le grossissement est très-grand, comme dans les lunettes destinées aux observations astronomiques.

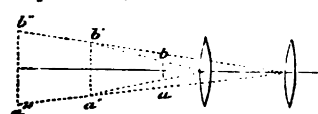
Des oculaires complexes sont actuellement appliqués presque toujours aux instruments qui demandent de la précision.

187. **Oculaires composés.** — Les oculaires composés sont de deux espèces :

Oculaire négatif. — Il est composé de deux verres convergents plans-convexes disposés comme l'indique la figure. Le premier intercepte les rayons qui iraient former l'image réelle due à l'objectif ; il rend les rayons plus convergents et détermine une image réelle également, $a'b'$, que le second verre, faisant fonction de loupe, transforme en une image virtuelle. On détermine par le calcul l'écartement des verres et leur courbure, pour que la dernière image formée soit achromatique ; les résultats, traduits en nombres ronds, sont proportionnels à 3 pour la distance focale du premier verre dit collecteur, à 1 pour celle du dernier verre et à 2 pour l'intervalle qui les sépare.



Oculaire positif ou de Ramsden. — Dans celui-ci, le foyer de l'objectif est antérieur à la première surface ; les verres, le plus souvent simples, comme dans l'oculaire négatif, sont *plans-convexes* ; lorsqu'on veut plus de précision, on forme chacun de deux lentilles, l'une *plan-concave* en *flint-glass*, l'autre biconvexe en *crown-glass*. A l'image réelle ab due à l'objectif, il s'en substitue successivement deux virtuelles $a'b'$, $a''b''$, dont la dernière se peint ensuite dans l'œil. La courbure des verres et leur écartement sont combinés de telle manière que l'achromatisme existe.



L'avantage de l'oculaire de Ramsden vient de ce que la mise au point, qui dépend de l'état de la vue de l'observateur, se fait par le mouvement complet de l'oculaire dont les différentes parties conservent toujours les mêmes relations trouvées favorables pour l'achromatisme ; dans l'oculaire négatif, au contraire, il faut écarter le dernier verre du réticule, et comme celui-ci est dans une position intermédiaire, la distance des deux verres change et cesse, par suite, de satisfaire complétement aux conditions de l'achromatisme.

L'oculaire de Ramsden, dont on place le réticule à demeure, est employé dans les lunettes des observatoires ; l'oculaire négatif est, au contraire, adapté aux instruments destinés aux observations de points dont les distances peuvent varier, et on laisse par conséquent le réticule soumis à un tirage propre à l'amener au lieu où se forme l'image réelle.

En recherchant, soit pour l'un, soit pour l'autre des oculaires composés, le rapport de la clarté de l'image à celle de l'objet, on trouve l'unité pour limite supérieure, comme dans le cas où la lunette n'a qu'un oculaire simple.

Mais, pour atteindre cette limite, on trouve qu'il faut toujours que $\omega < nF$ (§ 185), F étant la distance focale de l'objectif, n le rapport de

l'ouverture de cet objectif à F, et ω représentant la portion de cette ouverture dont tous les rayons pénètrent dans la pupille p. D'un autre côté, on trouve également $\omega = pg$, g étant le grossissement. Il faut donc toujours que

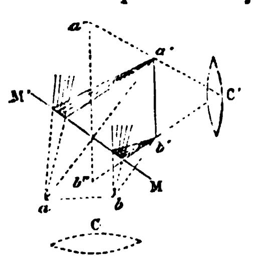
$$pg < nF \quad \text{ou} \quad g < \frac{nF}{p}$$

pour que la limite de clarté soit atteinte. Les quantités n et p sont deux constantes; pour une même valeur de F on pourra donc atteindre la même limite de grossissement.

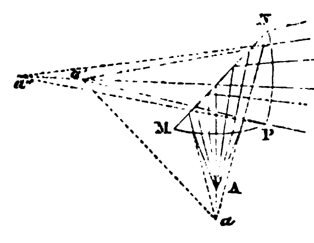
Mais, pour la même grandeur de F, la lunette munie de l'oculaire de Ramsden est plus longue que celle qui aurait un oculaire simple, et cette dernière est plus longue encore que celle qui serait armée de l'oculaire négatif.

L'avantage semble donc rester à ce dernier système; aussi, l'emploie-t-on dans tous les cas où l'on tient à diminuer la longueur de l'instrument. L'oculaire simple, plus désavantageux sous ce point de vue, a aussi l'inconvénient de ne pas être achromatique ; aussi, est-il rarement en usage.

188. Prisme lenticulaire. — Il est souvent incommode de regarder le petit objet qu'on veut examiner, dans une direction précise, comme cela arrive quand cet objet est une image due à une première opération optique, image qui n'est formée que par des rayons lumineux limités dans un champ restreint. On peut changer la direction de ce champ au moyen d'un miroir plan. Soit ab une image qui aurait dû, se formant réellement, être examinée avec une loupe placée en C. Si on intercepte les rayons lumineux avant leur rencontre, par un miroir plan MM′ incliné à 50^g sur ab, il se formera en $a'b'$ une image réelle symétrique de ab, et dont la direction lui sera par conséquent perpendiculaire. Il suffira ensuite de la considérer avec une loupe C, dans une direction plus commode que la première.



Les miroirs étant sujets à se détériorer par suite de l'altération ou de la disparition du tain, il est plus avantageux d'avoir recours à un *prisme lenticulaire* qui fait à la fois fonction de miroir et de loupe. Ce prisme se compose de deux faces sphériques MP, NP reliées entre elles par une face plane MN. Supposons un point A formé par un faisceau de rayons convergents dont l'ouverture, toujours petite dans les appareils optiques, est dirigée dans le sens vertical. Après leur croisement, ces rayons viendront tomber sur MP à l'état de divergence, et si la distance de A à MP est convenable (c'est-à-dire $< 2r$ pour le verre ordinaire où



$n=1,5$), ces rayons sembleront venir d'une image virtuelle *a*, ils tomberont sur la face MN qui, quoique transparente, les réfléchira, parce que leur incidence dépassera celle où commence à avoir lieu la réflexion totale. Il y aura donc naissance d'une image virtuelle *a'* symétrique à *a* par rapport au plan MN, image dont les rayons rencontreront la dernière face sphérique NP dans un état de divergence qui sera un peu diminué par le passage dans l'air, de sorte que l'œil placé derrière cette face aura sensation d'une dernière image virtuelle *a''* située à une distance rendue convenable par le choix de la position primitive A.

Le prisme lenticulaire est surtout employé dans les lunettes qui doivent être dirigées dans un sens trop éloigné de l'horizontale.

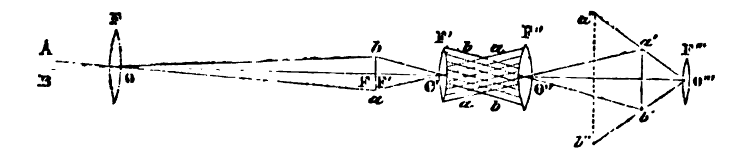
CHAPITRE V

INSTRUMENTS

Les instruments d'optique dont nous allons nous occuper n'étant pas d'un usage habituel en topographie et en géodésie, nous n'en donnerons qu'une description généralement sommaire.

Ils reçoivent les noms d'instruments *dioptriques*, *catoptriques* et *catadioptriques* suivant qu'ils sont fondés sur l'emploi de la réfraction, de la réflexion ou de l'ensemble de ces deux phénomènes.

189. **Longue-vue,** *lunette terrestre ou lunette à quatre verres.* — Comme, dans beaucoup de circonstances, le renversement des objets devient un grave inconvénient, on a modifié la lunette astronomique ainsi qu'il suit : l'objectif F forme une petite image réelle et renversée



ab ; une seconde lentille F' est placée de telle sorte que son foyer principal se trouve aussi en F où est *ab*, et les rayons qui se croisent à

tous les points de ab, n'y rencontrant pas d'obstacles, vont au delà sans changer de direction, jusqu'à ce qu'ils atteignent la surface antérieure de F'. Tous les rayons qui se sont croisés en un même point de ab sortent parallèles entre eux de la seconde lentille, et par conséquent leur direction est déterminée, puisque l'un d'eux passe par le centre optique. De là résulte qu'il n'y a pas de seconde image formée; mais une troisième lentille F″ les reçoit, les concentre de l'autre côté sur la perpendiculaire à l'axe passant par son foyer principal et forme ainsi une image réelle $a'b'$, renversée par rapport à la première, c'est-à-dire droite par rapport à l'objet lui-même. Enfin l'oculaire F‴ qui, ici comme précédemment, joue le rôle d'une loupe, substitue l'image virtuelle $a''b''$ à l'image réelle $a'b'$.

La description que nous venons de donner se rapporte en réalité à un cas particulier qu'il serait assez difficile de réaliser quand les objets ne seraient pas situés à des distances infinies, car il y aurait alors deux tirages, celui de F à F′ et celui de F″ à F‴ qui devraient être combinés. Heureusement il n'est pas indispensable que le foyer principal de F′ soit exactement au lieu où se forme l'image réelle due à F ; en laissant la distance de ces deux verres constante, la dernière image réelle $a''b''$ ne se formera pas au foyer principal de F″, mais la loupe F‴ pourra toujours, par son mouvement propre, être amenée à la distance convenable de cette image.

L'intervalle OO′ sera néanmoins toujours à peu près égal à la somme des distances focales principales F et F′ des deux premiers verres, et O′O‴ représentera également la somme des deux dernières F″ et F‴. Quant à l'intervalle O′O″ des verres intermédiaires, il devra être aussi petit que possible, d'abord pour diminuer la longueur de l'instrument, et surtout pour que les rayons n'aillent pas s'éteindre sur le tuyau de la lunette avant de rencontrer le verre F″.

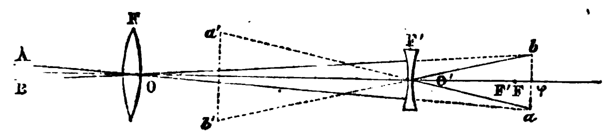
Le *grossissement angulaire* est donné, dans le cas de coïncidence des foyers, par

$$g = \frac{O'''}{O}, \quad \text{mais} \quad O''' = O''\frac{F''}{F'''}, \quad O'' = O' = O\frac{F}{F'}, \quad g = \frac{FF''}{F'F'''}$$

Les distances focales des verres intermédiaires étant habituellement égales, le grossissement $g = \frac{F}{F'''}$ a la même expression que celui de la lunette astronomique composée des mêmes verres F et F‴, et dans ce cas sa longueur est plus grande que celle de cet instrument. Il semblerait que par l'augmentation du rapport $\frac{F''}{F'}$ on pourrait augmenter le grossissement, mais on y perdrait de la netteté des images, ce qu'on comprend aisément si on se rappelle que les résultats supposés produits exactement par les lentilles ne sont en réalité qu'approchés, et que plus il y aura de ces lentilles employées, plus il y aura de causes d'erreurs. Aussi la lu-

nette astronomique, malgré l'inconvénient du renversement des images, est-elle toujours préférée à la longue-vue, dans les observations de précision, parce que, par suite de sa simplicité de construction, elle permet un plus grand champ et un plus fort grossissement à netteté égale et à longueur égale ; elle a encore l'avantage d'occasionner moins de perte de lumière, perte due aux absorptions et aux réflexions engendrées par les nombreux verres de la lunette terrestre, qui est quelquefois composée de cinq lentilles, quand on lui adapte un oculaire composé.

190. Lunette de Galilée ou *lorgnette de spectacle.* — La lunette de Galilée obvie aux inconvénients des deux lunettes que nous avons décrites, savoir : le renversement des objets vus à l'aide de la lunette astronomique, et la trop grande longueur qu'exige la lunette terrestre.



Il suffit, pour avoir cette lunette, de substituer un verre divergent au verre convergent qui forme l'oculaire de la lunette astronomique. L'image vue par un œil placé immédiatement derrière un oculaire doit toujours être virtuelle ; il faut donc que dans la formule relative à la dernière lentille, $f' = \frac{F's'}{s'-F'} = \frac{F'}{1-\frac{F'}{s'}}$, f' soit négatif, ce qui exige, F' étant négatif pour les verres divergents, que $s' > o$ ou que $(-s') > (-F')$. Dans le premier cas les rayons arriveraient divergents sur la seconde lentille, c'est-à-dire que l'image réelle due à l'objectif serait formée en avant de l'oculaire, et alors l'image virtuelle qui lui serait substituée (§ 178) serait rapprochée de l'œil, et pour qu'elle fût à la distance de la vue distincte, il faudrait que l'oculaire eût une très-grande distance focale et que par suite la lunette fût très-grande. On n'obtiendrait donc ainsi qu'un résultat très-désavantageux, sans grossissement et produisant une image renversée.

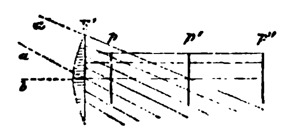
Mais il y a aussi image virtuelle formée quand $-s' > -F'$, c'est-à-dire, quand les rayons arrivent sur l'oculaire à l'état de convergence telle que leur point de rencontre serait placé au delà du foyer principal postérieur de l'oculaire, et alors de très-petites variations des positions relatives de ces deux points donneront des variations considérables de positions de l'image finale, ce qui permettra de l'amener à la distance de la vue distincte. La figure, qui se rapporte à ce cas, fait voir immédiatement que le grossissement angulaire est, en confondant toujours les tangentes avec les angles nécessairement petits, et en appelant D la distance des deux verres,

$$g = \frac{O'}{O} = \frac{O\varphi}{O'\varphi} = \frac{F}{F-D} \text{ approximativement}$$

expression qui fait voir que le grossissement augmente avec l'écartement des deux lentilles.

Comme dans l'emploi de la lunette astronomique, le tirage doit être plus long pour les presbytes que pour les myopes. Pour un œil infiniment presbyte, c'est-à-dire exigeant des rayons parallèles, le grossissement atteindra la limite inférieure $g = \frac{F}{F'}$, analogue à celui de la lunette astronomique, avec une diminution de longueur égale à 2F′, et il sera d'autant plus fort que l'objectif sera grand et l'oculaire petit.

La lunette de Galilée ne permet pas de fort grossissements et elle a peu de champ ; elle exige du reste, comme les autres lunettes, que l'œil soit placé le plus près possible de l'oculaire pour que ce champ ne soit pas diminué, ce qui résulte de la divergence des faisceaux lumineux appartenant à des points différents ; la pupille, d'abord placée en p, est entièrement embrassée par le faisceau venu de b situé sur l'axe et par celui venu d'un point latéral a ; tant qu'il en sera ainsi, les points a et b seront également éclairés malgré la divergence existant dans chacun des faisceaux, car s'il y a moins de lumière reçue par suite de cette divergence, le grossissement des surfaces apparentes diminue dans le même rapport. Si la pupille vient en p', le point b conserve le même éclat, mais a paraît moins éclairé, et la quantité de lumière qu'il envoie et qui est reçue par l'œil, va en diminuant jusqu'à ce que la pupille arrivée en p'', ce point latéral a cesse d'être visible. Le champ se trouve donc progressivement réduit à mesure qu'on éloigne l'œil de la lentille, et cette réduction se fait par extinctions graduelles des rayons efficaces émis par les points situés hors de l'axe.



L'absence d'image réelle ne permet pas l'usage d'un réticule, et par suite l'instrument ne peut pas être employé à la détermination d'une direction, et par suite à la mesure d'un angle.

La *lorgnette de spectacle* se compose habituellement de deux lunettes de Galilée placées parallèlement devant les deux yeux, ce qui produit un double avantage : le premier est d'éviter la fatigue de la paupière qu'on doit maintenir fermée dans l'emploi d'une lunette simple, et le second provient de ce qu'on ne perd pas ainsi l'effet de la vision binoculaire, qui, faite ici de deux points de vue différents comme dans les cas ordinaires, donne une sensation du relief que n'exprime pas une lunette isolée. Mais en opposition à ces deux avantages, il existe un inconvénient provenant de ce qu'il peut y avoir un grossissement quelque peu différent pour chaque lunette, ce qui produit sur la vue une fatigue que peut aggraver encore, quelquefois, une convergence trop forte ou trop faible des axes des yeux, convergence nécessitée par cette considération qu'involontairement ces axes doivent se diriger simultanément sur les images des mêmes

points de la nature, images qu'un défaut de construction peut avoir trop rapprochées ou trop écartées.

191. **Mesure du grossissement *des lunettes*.** — Le grossissement approximatif des lunettes est donné par l'expression commune $\frac{F}{F'}$. La distance focale F de l'objectif peut être mesurée comme on l'a indiqué au § 64 du livre I[er]; mais celle de l'oculaire F′ serait entachée d'une erreur d'autant plus importante que cet oculaire serait petit. On peut directement trouver le grossissement par un des deux procédés suivants :

Dans le premier il faut, après avoir mis la lunette à son point, retirer l'objectif et recevoir la lumière par son orifice : il s'en forme une image au delà de l'oculaire et à une distance que l'on mesure avec soin. La position de cette image est le foyer conjugué de l'ouverture de la lunette. On peut donc, relativement à l'oculaire qui ne fait plus que fonction d'une lentille convergente, appliquer la formule $\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{s}$ en modifiant convenablement les notations. Si nous conservons F et F′ pour représenter les distances focales principales de l'objectif et de l'oculaire, si nous appelons d la distance à laquelle s'est formée l'image, et si nous nous rappelons enfin que la longueur de la lunette est sensiblement F+F′, la formule devra être écrite ainsi :

$$\frac{1}{F'} = \frac{1}{d} + \frac{1}{F+F'}, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{d} = \frac{1}{F'} - \frac{1}{F+F'} = \frac{F}{F'(F+F')} \quad \text{et} \quad \frac{F}{F'} = \frac{F+F'}{d}$$

Le défaut de ce procédé provient de la difficulté de mesurer d et de l'influence de l'épaisseur de la lentille F′, et il n'est du reste pas applicable à la lunette de spectacle.

Le second procédé, au contraire, s'applique directement à toutes lunettes, en tenant compte expérimentalement du seul résultat produit indépendamment de toute hypothèse de simplification. On regarde une ligne graduée, comme une échelle ou une grille de jardin, d'un œil avec la lunette et de l'autre directement, et l'on voit, par suite des deux impressions qui existent simultanément dans l'appareil visuel, combien une des divisions de l'image due à l'emploi de la lunette renferme de divisions correspondantes de la seconde image.

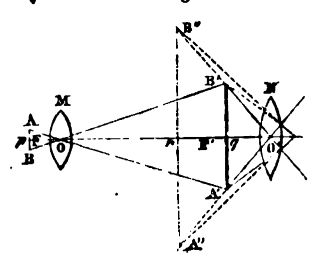
192. **Microscope composé.** — Les microscopes sont destinés à voir, sous de grands angles, de petits objets dont le rapprochement est possible. Nous avons vu que le plus simple est la loupe dont le grossissement angulaire est $1 + \frac{\delta}{F}$, δ désignant la distance de la vue distincte et F la distance focale principale, et que par l'emploi de cette loupe, l'objet et son image ont approximativement même clarté.

Le grossissement que donne la loupe ne peut pas être augmenté au delà de certaines limites, parce que l'emploi de verres trop petits produit

de mauvais résultats et parce que la clarté se trouve éteinte quand l'ouverture de la lentille est plus petite que celle de la pupille ; il est encore limité par cette circonstance qu'avec de trop grands rapprochements l'objet se trouve dans l'ombre portée par la tête.

On a construit, pour éviter ces inconvénients, un microscope composé dont l'idée générale est la suivante :

Comme la lunette astronomique, il se compose d'un oculaire N et d'un objectif M convergents tous deux. L'objet AB est placé très-près du foyer F de l'objectif, mais toujours au delà, de sorte que l'image réelle A'B' se forme à une distance beaucoup plus éloignée de M, et est par conséquent amplifiée. L'oculaire, comme toujours, l'amplifie encore en lui substituant une image virtuelle A"B", sous-tendue par le même angle, mais placée à la distance de la vision distincte.



Plus le corps est près de l'objectif, plus l'image est grande, puisque l'angle sous-tendu est d'autant plus grand et le foyer conjugué plus éloigné. Il est cependant une limite qu'il ne faut pas atteindre, c'est le foyer des rayons parallèles : car alors il n'y a pas d'image formée. Concluons donc de là que le grossissement est d'autant plus considérable que l'objectif est d'un plus court foyer. Nous savons qu'il dépend aussi et de la même manière de l'oculaire : donc il est d'autant plus grand que ces deux verres sont plus convexes.

En comparant successivement les triangles semblables ABO et A'B'O d'une part, A'B'O' et A"B"O' de l'autre, nous trouvons AB : A'B' : : $pO : qO$ et A'B' : A"B" : : $qO' : rO'$: multipliant l'un par l'autre et supprimant A'B' facteur commun aux deux termes du premier rapport,

$$AB : A''B'' :: pO \times qO' : qO \times rO' \quad \text{d'où} \quad A''B'' = AB\,\frac{qO \times rO'}{pO \times qO'}$$

Dans la fraction, les facteurs du numérateur sont les distances focales conjuguées de celles qui sont exprimées par les facteurs du dénominateur.

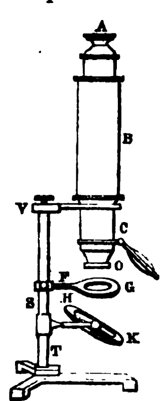
A mesure que le dénominateur diminue, le numérateur augmente et, par ce double motif, le pouvoir amplifiant de l'instrument augmente aussi. Or, les facteurs du dénominateur peuvent décroître d'autant plus que les lentilles sont plus convexes ; donc, nous avions raison de dire que le grossissement était d'autant plus grand que l'objectif et l'oculaire étaient plus convergents.

Il convient de remarquer ici que nous n'avons pas considéré le grossissement sous le même point de vue que dans l'étude des lunettes ; ce grossissement n'est plus le rapport qui existe entre l'angle sous lequel on voit l'objet avec le microscope et celui sous lequel on le verrait si l'œil était

situé au centre de l'objectif, puisque dans cette dernière circonstance l'image serait confuse. Le grossissement est alors le rapport de l'angle sous lequel on voit l'image et de celui sous lequel on verrait l'objet, s'il était placé à une distance convenable pour la vision, c'est-à-dire à la distance de la vue distincte. C'est ainsi, du reste, que nous l'avons déjà considéré pour la loupe, au § 184.

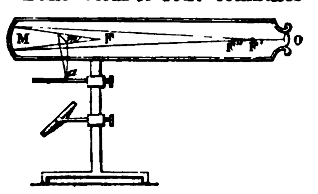
Le grossissement énorme qu'on obtient par l'emploi de cet instrument dépasserait celui qui ne ferait pas perdre de clarté, parce que l'ouverture efficace de l'objectif, nécessaire pour que cela n'ait pas lieu, devrait être trop grande pour que l'obliquité des rayons permît d'employer tous ceux qui tomberaient sur cette ouverture. On est alors obligé d'éclairer artificiellement l'objet par une lumière très-intense.

Après avoir expliqué la théorie du microscope, nous allons en donner la description. Il se compose d'un tube cylindrique en trois parties, A, B et C, maintenu dans une position verticale par une tige VST : l'oculaire est en A et l'objectif en O. Sous ce dernier, et à une distance qu'on peut faire varier, est placé un cercle évidé FG, maintenu à la tige par une vis de pression, et sur lequel on place le petit corps que l'on veut examiner : il est soutenu dans cette position par une lame ou entre deux lames de verre très-mince. Comme ordinairement il est transparent, en raison de son exiguïté, on l'éclaire fortement au moyen d'un miroir concave HK, dont la hauteur et l'inclinaison sont variables en raison de la position du corps soumis à l'observation et de la direction des rayons lumineux. Si le corps est opaque, on concentre la lumière dessus, à l'aide d'une lentille P maintenue par une charnière C, ou d'un prisme qui atteint le même but.



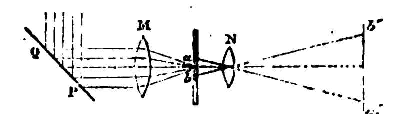
Microscope catadioptrique. — Sans nous étendre, plus qu'il ne convient ici, sur un instrument qui n'a point de rapport avec la topographie et la géodésie, et sans parler de toutes les modifications qu'on y a apportées, nous ne pouvons nous empêcher de dire un mot sur le microscope modifié par le professeur Amici.

Dans celui-ci sont combinés les phénomènes de la réflexion et de la réfraction. Il se compose d'un tube horizontal, à l'une des extrémités duquel est adapté l'oculaire O ; tandis qu'à l'objectif on a substitué un miroir concave M : celui-ci est une portion d'ellipsoïde dont le foyer le plus éloigné est situé au point où doit se former l'image réelle qu'amplifie l'oculaire. Un petit miroir plan *m* de forme elliptique,



incliné de 50° sur l'axe, et présentant sa face réfléchissante au miroir concave, est placé dans l'intérieur et sur l'axe même du tube. Au-dessous, la paroi du cylindre est percée de manière à donner passage aux rayons lumineux envoyés par le petit corps que l'on veut amplifier, et qui se trouve placé en contre-bas, en *a*. Si le miroir plan *m* est convenablement placé, ces rayons donneront naissance à une image virtuelle de *a*, située au foyer F du miroir elliptique ; mais, réfléchis de nouveau par celui-ci, ils iront se rencontrer réellement à son second foyer F′, car on sait que, dans une ellipse, les rayons vecteurs font des angles égaux avec la normale. Enfin l'oculaire dont le foyer principal est en F″ fera fonction de loupe.

193. **Microscope solaire.** — Cet instrument fournit une image réelle et amplifiée. Il se compose d'un miroir plan PQ dont l'inclinaison est variable au moyen d'une charnière P et de deux lentilles M et N, dont l'axe est généralement le même. On incline le miroir de manière que les rayons solaires qu'il reçoit soient réfléchis sur la lentille M parallèlement à son axe, et de telle sorte qu'ils convergent vers son foyer principal. Là, dans une très-petite ouverture, pratiquée dans le volet d'une chambre privée de toute autre lumière, on place le petit objet *ab*, qui est alors fortement éclairé. Ensuite, une seconde lentille N, placée en avant de *ab* et un peu au delà de sa distance focale principale, reçoit la lumière qui en émane et produit, de l'autre côté, une image agrandie, réelle et renversée que l'on peut rendre visible de tous les points de la chambre obscure, en la recevant sur un corps blanc et uni, tel qu'un grand carton, un drap ou un mur, s'il est toutefois à une distance convenable. Si *ab* était opaque, il faudrait modifier l'appareil pour l'éclairer en avant. Dans ce cas, les axes des lentilles ne se confondraient plus.



Lanterne magique. — La lanterne magique n'est qu'une modification du microscope solaire ; l'objet à représenter habituellement, légèrement peint sur verre, reçoit directement la lumière d'une petite lampe enfermée dans une lanterne, lumière qu'augmente un réflecteur convenablement placé, et il est mû à la main dans un appendice de la lanterne terminée par un verre convergent. L'effet produit est ensuite le même que dans l'instrument précédent.

Fantasmagorie. — Elle se fait avec une lanterne magique dans laquelle le mouvement longitudinal destiné à représenter une succession d'objets se trouve remplacé par un mouvement perpendiculaire qui, rapprochant plus ou moins le même sujet de la lentille, sans lui faire toutefois dépasser le foyer antérieur, donne lieu à des images grandissantes qui imitent alors une marche du sujet représenté vers le spectateur. La

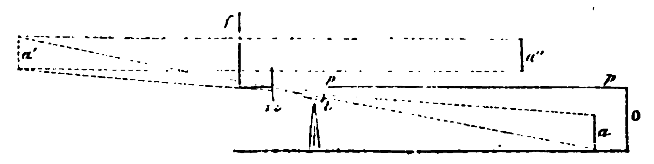
netteté n'est pas la même, évidemment, pour toutes les phases de l'opération.

Spectres. — On a vu dans ces dernières années, sur quelques théâtres, représenter des spectres faisant une illusion beaucoup plus grande que celle qui provient de la lanterne magique. Ces spectres sont simplement des images réelles qui ne sont pas reçues sur un écran et qui ne sont, par suite, visibles que pour les personnes placées dans le champ des rayons réfractés ; pour que l'illusion existe, il faut que le spectateur n'ait pas connaissance de l'appareil qui donne naissance à ces images réelles, et que celles-ci soient animées de mouvements complets et non d'un seul mouvement de translation. L'objet doit alors être une personne dont les mouvements se traduisent sur les images.

L'idée la plus simple qui peut donner naissance aux effets dont nous parlons est celle qui supposerait une lentille convergente placée au fond d'une pièce obscure, ou plutôt très-peu éclairée pour qu'il y ait simultanéité de l'effet fantasmagorique et de celui produit par des personnages réels. Un acteur placé derrière la lentille dans une chambre noire, et recevant seul un faisceau de rayons lumineux dirigés sur lui au moyen d'une autre lentille et d'un foyer lumineux caché, ou par le secours d'un appareil électrique, donnera naissance à une image réelle située dans la première pièce, si on a soin de suivre ces mouvements par une rotation de la lentille. Chacun des faisceaux de cette image aura une très-petite ouverture, et chaque point produit par lui ne sera visible que pour les spectateurs compris dans l'ouverture angulaire de ce faisceau ; mais si ces spectateurs sont très-éloignés, l'étendue qu'ils occuperont pourra être considérable, et chacun d'eux recevra une petite portion des rayons qui se seront croisés au lieu où est située l'image, qui devra par suite, pour que les efficacités isolées soient suffisantes, provenir d'un objet fortement éclairé.

Si on employait ainsi une seule lentille, l'image réelle serait toujours renversée et très-petite ; on obvie facilement à cet inconvénient en ajoutant à la première lentille simple une seconde également convergente, dont le foyer principal antérieur soit situé un peu en deçà de l'image réelle due à la première réfraction, de telle sorte que l'image finale ait même grandeur absolue que l'objet.

On n'a pas, croyons-nous, employé ce système simple, dans les théâtres, probablement par suite de la transparence et de la fermeture in-

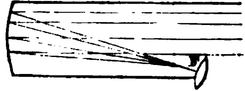


complète des toiles de fond. On a placé alors le personnage *a* et l'appareil

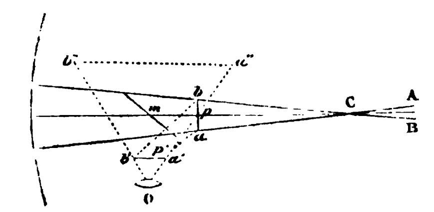
des deux lentilles *l* dans le dessous, en sorte que le plancher *p* et la fermeture *o* de l'orchestre ferment tout accès à la lumière que ne doit pas recevoir le spectateur. Une image réelle se serait formée en *a'* après le passage des rayons dans l'appareil *l*, mais ceux-ci sont auparavant réfléchis par un miroir plan *m* devant lequel se trouve une ouverture faite dans le plancher du théâtre, de façon que l'image réelle se trouve transportée en *a"* symétrique de *a'* par rapport à *m*. Le fond de la scène *f* et le plancher interceptant toute lumière étrangère autre que celle qu'on a ménagée avec une faible intensité, pour éclairer quelque peu les personnages réels situés sur le théâtre, on peut voir simultanément ceux-ci et l'image réfléchie *a"* quelquefois se superposant, mais toujours le fantôme en avant, comme on voit simultanément, avec une glace sans tain, les objets postérieurs et la réflexion de ceux qui sont en avant de la glace.

194. **Télescopes.** — Les télescopes sont fondés sur l'emploi simultané de la réflexion et de la réfraction. Indépendants de l'aberration de réfrangibilité, quant à l'objectif qui est formé d'un miroir, ils ont été préférés aux lunettes jusqu'au moment où l'on a su rendre celles-ci achromatiques. La préférence qu'on a alors donnée à ces dernières a été fondée sur la difficulté de construction des surfaces métalliques de ces miroirs et sur l'altération qu'éprouvent facilement ces surfaces que l'action seule de l'air ternit promptement. M. Foucaut, en parvenant à argenter une surface de verre, a fait disparaître le premier inconvénient, mais le second n'a pas été neutralisé; les glaces d'appartement en sont seules exemptes par suite de l'isolement produit par l'épaisseur du verre, mais leur méthode de construction ne peut pas être utilisée pour les miroirs destinés aux appareils de précision, par suite des influences de réfraction due à cette épaisseur du verre qui peut ne pas être homogène et surtout ne pas avoir ses faces rigoureusement parallèles.

Télescope d'Herschell. — Un miroir concave est placé au fond d'un tube dirigé vers l'astre ou l'objet que l'on veut contempler. Tous les rayons arrivant parallèles sont concentrés au foyer du miroir, et l'image est amplifiée par un oculaire. Pour que l'on puisse en faire usage et que la tête de l'observateur ne porte pas obstacle à l'introduction des rayons lumineux dans le tuyau, le miroir est placé de façon que son axe soit incliné par rapport à celui du télescope. De cette disposition, il suit que l'image se forme près de la surface du tube et non au milieu. Alors l'oculaire est placé latéralement.



Télescope de Newton. — Dans celui-ci, un petit miroir *m* plan et incliné à 50g sur l'axe et très-près du lieu de l'image réelle, intercepte les rayons renvoyés par le miroir concave, et les réfléchit dans une direction rectangulaire; de sorte que l'oculaire est placé en dehors et sur



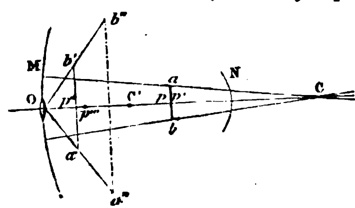
le côté du tube. Le petit miroir plan qui n'arrête qu'un petit nombre de rayons lumineux directs ne contribue en rien au grossissement que l'on estime en comparant les angles C et O. L'astre serait, en effet, vu à l'œil nu sous l'angle *a*C*b*, le télescope le montre suivant *a'*O*b'*, et comme $a'b' = ab$, on peut, en confondant les angles et les tangentes, prendre le grossissement

$$g = \frac{O}{C} = \frac{\frac{1}{2}r}{F'}$$

en désignant par F' la distance focale de l'oculaire, par *r* le rayon du miroir et en se rappelant que le foyer principal de celui-ci est situé au milieu du rayon.

Si on compare ce grossissement à celui de la lunette astronomique, $\frac{F}{F'}$ on voit qu'il est le même si $F = \frac{1}{2}r$, et qu'alors les longueurs effectives de la lunette et du télescope de Newton sont égales.

Télescope de Grégory. — Celui-ci évite l'inconvénient de donner, comme les précédents, une image renversée, et diffère de celui de Newton par la substitution d'un second miroir concave au miroir plan incliné. Il se compose : 1° d'un grand miroir concave M situé au fond du tube. Son centre est en C ; son foyer principal en *p*. C'est là que se forme



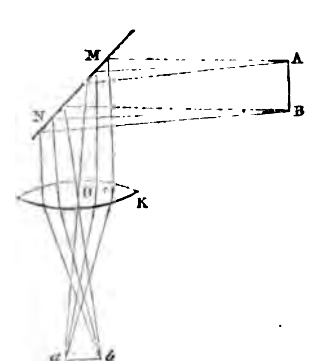
ab, l'image réelle renversée de l'objet ; 2° d'un second miroir concave N d'un diamètre beaucoup plus petit que le premier, placé dans l'intérieur du tuyau, à une distance de l'image *ba* un peu plus grande que sa propre distance focale. Son centre est en C', son foyer principal en *p'*. Il substitue à *ba* une autre image réelle *a'b'* renversée par rapport à *ba*, c'est-à-dire droite par rapport à l'objet lui-même, et de plus très-agrandie en raison de la proximité de *p* et de *p'* ; 3° d'une lentille O placée dans une ouverture pratiquée au centre du miroir M. Cette lentille, dont le foyer est en *p'''*, un peu au delà de *p''* où se forme *a'b'*, augmente le grossissement en raison de la position qu'elle occupe par rapport à *a'b'*.

Télescope de Cassegrain. — Cassegrain a imaginé, pour détruire en partie l'erreur de sphéricité, de donner une forme convexe au petit miroir N. Le gand miroir M donnerait une image réelle renversée *a'b'*, située en *p'*, au milieu de son rayon, si N n'interceptait pas la formation de

cette image qu'il transforme en une autre réelle $a'b'$ également renversée, et située proche d'une loupe O intercalée dans le milieu de M. Pour qu'il y ait formation de cette image réelle $a'b'$, il faut, en se rappelant la formule générale des miroirs, $\frac{2}{r} = \frac{1}{f} + \frac{1}{s}$ ou $f = \frac{rs}{2s - r}$ dans laquelle r doit être négatif ainsi que s pour le cas actuel, qu'en grandeur absolue, r soit $< 2s$. Il suffit par conséquent que le lieu de la première image ab non formée soit entre le miroir N et son foyer principal qui est au milieu de son rayon.

195. Chambre noire. — Cet instrument est destiné à produire sur une surface blanche, telle qu'une feuille de papier, une image réelle des objets qui sont placés d'une manière convenable; et si elle est formée dans un lieu privé d'ailleurs de toute autre lumière, elle est assez nette pour permettre d'en suivre tous les contours, pour donner, en quelque sorte, le moyen de calquer le tableau que présente la nature.

La chambre noire se compose d'un miroir et d'une lentille. Soit AB un objet situé en présence d'un miroir MN incliné de 50ᵍ sur l'horizon. Les rayons lumineux qui partent de AB seront réfléchis par le miroir et ils donneraient pour un œil dirigé sur celui-ci l'apparence d'un corps symétrique à AB, et situé autant en arrière du miroir que ce dernier l'est en avant. Si les rayons réfléchis et divergents viennent à rencontrer une lentille K, ils seront modifiés dans leur direction, et viendront former une suite de foyers dont l'ensemble constituera l'image ab de AB. Cette image sera d'autant plus nette que la surface sur laquelle elle se peindra sera, ainsi que la tête de l'observateur, enveloppée par un rideau épais qui empêchera l'introduction de toute autre lumière que celle qui produit l'image.



La table et la lentille doivent être mobiles, l'une par rapport à l'autre, afin d'amener la première au foyer conjugué de l'image virtuelle formée par le miroir plan. Lorsque l'objet considéré AB sera placé à des distances assez petites pour que ses variations de positions influent sur le lieu de formation de l'image réelle ab, celle-ci augmentera pour deux causes, quand AB se rapprochera : 1° l'augmentation de l'angle O qui n'influera pas sur la clarté de l'image, car les rayons lumineux croîtront dans

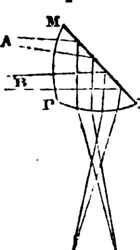
le même rapport que les surfaces ; 2° l'éloignement obligé de la table qui coupera cet angle plus loin de son sommet et déterminera une image plus grande. Cette seconde cause diminuera la clarté de *ab* proportionnellement au carré de la distance focale.

Les considérations précédentes expliquent pourquoi le temps de pose doit être d'autant plus grand dans l'exécution des portraits photographiques, qu'on veut obtenir des images grandes elles-mêmes, avec la même chambre noire, bien entendu.

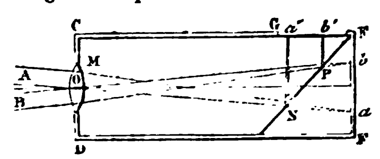
Mais dans l'usage habituel de la chambre noire destinée à donner l'esquisse des paysages, ou dans son emploi pour la reproduction photographique d'une vue de la campagne, la clarté reste constante, quelle que soit la distance des objets, abstraction faite de la perspective aérienne.

Observons que cette constance se rapporte également à l'échelle du tableau lorsqu'il s'agit d'objets éloignés. Celui-ci est obtenu avec des dimensions telles que celles qu'on obtiendrait par les procédés ordinaires de la perspective, en plaçant le tableau à une distance de l'œil égale à la distance focale principale de la lentille employée. Pour augmenter l'échelle du tableau, il faudrait nécessairement changer l'objectif.

Souvent, on modifie l'appareil, en remplaçant le miroir et la lentille par un prisme lenticulaire qui fait fonction de l'un et de l'autre, ainsi qu'il a été expliqué au § 187. Ce prisme, dont MNP est une section perpendiculaire à ses arêtes, a une face MN plane et inclinée à 50ᵍ. C'est elle qui fait fonction du miroir et qui réfléchit les rayons qu'envoie l'objet AB. Ces rayons sont d'abord rendus moins divergents et quelquefois même convergents, au moment où ils pénètrent dans le prisme par la face antérieure MP qui est un segment de sphère; puis les rayons réfléchis, en traversant la troisième face NP sphérique aussi, deviennent plus convergents encore, et concourent vers des foyers *a* et *b*. Il est à remarquer que, pour ne pas voir l'image renversée, l'observateur doit se placer de manière à tourner le dos à l'objet.



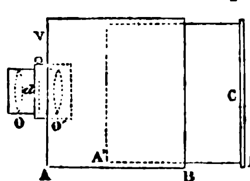
Enfin, une autre chambre noire plus portative se compose d'une boîte rectangulaire dont CDEF est une section longitudinale. Dans la face CD est enchâssée une lentille biconvexe M, dont la distance focale principale est égale à la profondeur de la boîte. Un miroir plan NP incliné à 50ᵍ sur le fond de la boîte, et partant de l'arête supérieure horizontale F intercepte les rayons lumineux : ceux-ci, qui arrivaient convergents, sont réfléchis convergents aussi, et produisent une image *a'b'* au lieu de *ab* qui aurait été formée si l'on n'avait pas placé le miroir.



Si donc la portion FG de la face supérieure est remplacée par une glace dépolie, on pourra, en y jetant les yeux, voir une image de AB.

Application à la photographie. — L'usage de la chambre noire est actuellement très-répandu, parce qu'elle constitue l'élément essentiel de la photographie. On a proposé de substituer, tout au moins partiellement, l'usage des vues photographiques aux procédés habituels de la topographie, et nous avons traité avec quelques détails ce sujet au chap. XII du liv. Ier; l'adjonction de ces vues aux dessins topographiques peut d'autre part être d'une certaine utilité, surtout pour les personnes qui savent peu lire les cartes. Ces deux considérations nous engagent à donner quelques indications optiques sur les résultats photographiques.

Pour faciliter le transport et pour permettre des variations de distance focale nécessaires quand les objets considérés sont très-rapprochés, on a composé la chambre noire de deux boîtes rectangulaires AB, A'B' qui glissent l'une dans l'autre, de sorte que la longueur peut être réduite à la moitié environ du maximum du tirage nécessaire pour les sujets peu éloignés du spectateur. La glace dépolie placée en C peut être enlevée pour permettre la substitution d'un châssis renfermant une plaque de métal, de papier ou de verre, destinée à l'impression photographique. Ce châssis peut s'ouvrir à l'extérieur pour permettre l'introduction de la plaque faite préalablement à l'abri du jour, et il peut également s'ouvrir à l'intérieur, lorsqu'il est adapté à la chambre, pour laisser arriver les rayons réfractés par l'objectif. Celui-ci est renfermé dans une monture en cuivre composée de deux cylindres mobiles l'un dans l'autre au moyen d'une crémaillère V, qui peut ainsi permettre d'amener la formation sur la plaque C, tirée d'abord à peu près à la position convenable, de l'image réelle due à l'objectif. Celui-ci peut être formé d'une seule lentille convergente avec un diaphragme antérieur, ou, ce qui est préférable, il peut être composé de verres combinés O et O', avec un diaphragme intermédiaire *d*.



Une autre forme de la chambre noire permet encore une plus grande diminution de longueur, diminution très-avantageuse pour le transport. Dans cette forme les deux boîtes sont remplacées par deux simples châssis reliés entre eux par un soufflet en caoutchouc qui peut se replier sur lui-même de manière à n'occuper qu'une très-petite profondeur, lorsque la chambre n'est pas mise en station.

On a eu la prétention, et on a cru avoir réussi, d'arriver, par l'emploi de la photographie, à la fixation des images de la chambre noire. Il n'en est pas ainsi. Indépendamment de l'absence des couleurs, qui, à notre avis, ne seront jamais obtenues par un procédé chimique, les images photographiques ne produisent que très-exceptionnellement des effets

analogues à ceux de la nature. Les formes, avec certaines restrictions relatives au champ, sont exactement rendues, mais les effets de teinte, que le dessinateur ordinaire rend au jugement de son œil de manière à rappeler la nature au jugement d'un autre œil, ne sont que très-exceptionnellement ceux que la vue perçoit dans les circonstances naturelles. Cela semblera évident à ceux qui ont quelque habitude des procédés photographiques, procédés qui, dans des circonstances diverses, employés plus ou moins longtemps et avec plus ou moins d'intensité, produisent des résultats différents sur la relation d'ombre et de lumière, et on peut dire que jamais l'harmonie des résultats ne pourra exister dans toutes les parties du sujet.

Ainsi, pour ne citer que deux exemples : les arbres, dans les paysages, seront toujours trop noirs relativement aux autres parties; dans une figure, les yeux, plus difficiles à venir, parce qu'ils reçoivent l'ombre portée par l'arcade sourcilière, paraîtront quelquefois trop renfoncés si le portrait n'est pas assez venu, quelquefois trop à fleur de tête, si le temps de pose a été trop prolongé. Ce que nous dirons d'une partie sera applicable à chacune de celles qui composent une vue complète, en sorte que si par hasard les relations de teinte se trouvent convenables dans un point du tableau, il serait miraculeux qu'elles le fussent également en tous les autres points.

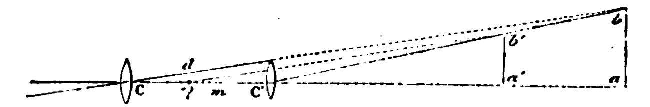
Malgré ces défauts, les produits photographiques, inférieurs aux dessins exécutés par des artistes habiles sous le point de vue de l'illusion des nuances, leur sont supérieurs sous le rapport des formes qu'aucun crayon ne peut jamais rendre aussi bien dans tous ses détails même les plus minimes.

Les *objectifs photographiques* sont, comme ceux des lunettes, des verres convergents destinés à donner des images réelles, mais avec cette différence que ces images doivent répondre à des champs ou ouvertures angulaires naturelles beaucoup plus grands, ce qui entraîne en partie l'annulation des restrictions que nous avons admises sur la non-obliquité des rayons incidents sur cet objectif, tout au moins pour les parties éloignées angulairement de l'axe principal. On obvie au défaut de netteté des images de ces parties par des diaphragmes destinés à rendre les faisceaux lumineux très-petits, car on comprend que si on les amenait à n'avoir plus d'épaisseur, les points de rencontre des axes secondaires avec la glace sensibilisée seraient toujours uniques et par suite les images toujours nettes. Sans atteindre cette limite qui ne donnerait plus de lumière, on comprend qu'on tende vers un résultat favorable, en diminuant l'étendue de chaque faisceau lumineux, en employant par conséquent des diaphragmes de petite ouverture. Dans le même but on substitue avec avantage des objectifs combinés aux objectifs simples.

Supposons que les causes d'erreurs qui existent pour chaque verre isolé n'existent pas, en nous réservant d'examiner ces causes un peu plus loin; il y a lieu de se demander si un tel objectif composé

de deux ou de plusieurs verres a un centre optique, c'est-à-dire, un point tel que les angles sous-tendus par les différents points de l'image et par ceux de la nature, sont égaux, ce qui est indispensable pour qu'il y ait similitude entre le tableau et la figure des objets considérés projetés sur un plan parallèle au plan focal.

Soit CC′ la ligne qui, joignant les centres optiques des deux verres ne sera pas déviée. Cherchons la position du point γ pour lequel les angles sous-tendus tels que $a'\gamma b'$ par la seconde image réelle, la seule qui soit formée, soient égaux aux angles ACB de la nature, vus du centre de l'objectif.



Il est d'abord évident que si l'image $a'b'$ était considérée de C′ par exemple, les différentes parties de ab et de AB étant proportionnelles ainsi que celles de ab et $a'b'$, les tangentes des angles sous-tendus en C′ et en C le seraient également; mais comme les tangentes ne sont pas dans le même rapport que les angles, ceux-ci paraîtraient d'autant plus petits que les points s'y rapportant seraient plus éloignés de l'axe principal. Menons par b' une parallèle à BCb, elle déterminera sur l'axe un point γ éloigné du deuxième verre, d'une distance m; soit d l'écartement supposé constant des deux verres, on aura

$$d : m :: C'b : C'b' :: C'a : C'a'$$

d'où il résultera que pour une même distance focale Ca, c'est-à-dire pour une même distance de l'objet, m sera constant quel que soit le point b' considéré, si les images dues isolément aux objectifs séparés ont déjà leurs parties proportionnelles, ce qui résulte de l'existence des centres optiques des lentilles. Mais les angles en γ sous-tendus par les parties de l'image sont égaux par construction à ceux dont les sommets en C sont sous-tendus par les parties correspondantes de l'objet, et par conséquent un œil placé en γ verra une perspective exacte de l'objet supposé vu du centre optique du premier objectif; mais il est à remarquer que la position de ce point de vue γ de l'image sera variable avec le tirage de la chambre noire, ou avec la distance de l'objet.

Il n'est pas indifférent de regarder des vues photographiques ou des perspectives quelconques d'un point plus rapproché ou plus éloigné que le point convenable que nous venons de trouver; dans le premier cas les parties angulaires latérales paraissent amincies, dans le second elles sont au contraire élargies par rapport aux parties centrales.

L'effet produit par le déplacement existant presque toujours dans la position réelle prise par l'œil se trouve combiné avec l'absence de la vision binoculaire. L'effet de celle-ci, qui permet aux deux yeux de plonger l'un plus à droite, l'autre plus à gauche, tend à faire juger les objets

saillants moins larges qu'on ne les verrait avec un seul œil, en sorte que le nez, par exemple, dans les portraits, paraît plus gros que dans la nature ; il en est de même des mains, presque toujours placées en avant, mains qui sont pourtant, sur la perspective, en rapport exact avec les dimensions linéaires des autres parties du portrait. Il résulte de ceci que les effets mauvais produits par un portrait photographique seront d'autant moins sensibles que ce portrait aura été pris de loin, c'est-à-dire lorsque les effets factices d'amincissement des parties saillantes dues à la vision binoculaire et non rendus par la perspective, auront été moins sensibles.

Pour diminuer l'aspect désagréable que présentent les parties saillantes supposées au centre du tableau, il faudrait reculer son œil du portrait plus loin que le point convenable pour la similitude des angles, ce qui tendrait, en vertu de ce que nous avons dit, à amincir le centre relativement aux bords, et on devrait faire le contraire pour les saillies situées vers la partie extérieure ; mais il naîtrait de là une autre erreur. En effet, en mettant l'œil plus près du portrait, on verrait les angles un peu déformés, nous le savons, avantageusement pour certaines saillies, mais désavantageusement pour les objets situés proche de ces saillies, mais en retrait ; d'autre part, et en négligeant cette cause, le personnage sous-tendrait des angles plus grands et semblerait vu de plus près, ce qui n'aurait aucun inconvénient si en même temps qu'il se rapproche, un objet ne présentait ses différentes parties avec des apparences diverses ; en effet, par exemple, pour préciser ce que nous disons ici, une sphère est vue de l'infini suivant un grand cercle, avec une convexité représentant 200g, et une certaine dégradation de teinte ; le rapprochement la fera voir, au contraire, sous des angles plus grands mais répondant seulement à des calottes sphériques de plus en plus petites, ne renfermant par conséquent pas toute cette dégradation de teinte observée dans le premier cas. L'effet serait encore beaucoup plus sensible, parce qu'il porterait alors sur la forme et sur la teinte simultanément, si l'observation avait lieu sur un corps de figure moins parfaitement régulière que celle de la sphère.

Il résulte de ce qui précède qu'il faut toujours observer une perspective photographique ou autre, représentant un objet sur lequel l'écartement du point de vue naturel a quelque influence, d'un certain point qui est variable de position avec l'objectif qui a produit l'image et avec le tirage qu'il a été nécessaire d'employer.

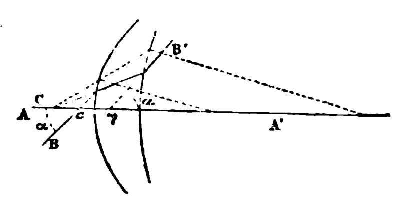
Dans tous les cas l'absence de la vision binoculaire ne pourra pas être annulée par l'emploi d'une seule perspective, et le stéréoscope pourra seul produire les effets qui lui sont dus.

Aberrations. — La formule qui donne la position de l'image et qui préalablement fait connaître l'existence de celle-ci, en indiquant qu'un point de la nature se trouve remplacé par un point unique, n'a été établie qu'avec certaines restrictions faites sur l'épaisseur de la lentille

supposée nulle et sur la non-obliquité des rayons incidents. La deuxième hypothèse est très-près d'être remplie dans l'usage des lunettes par suite de l'extrême petitesse des champs visuels employés, et elle fait en même temps disparaître l'influence de la première. Mais il n'en est plus de même pour les vues obtenues avec la chambre noire, vues qui, devant embrasser une grande étendue angulaire, nécessitent la représentation de points éloignés de l'axe principal et par suite l'emploi de rayons lumineux tombant très-obliquement sur les surfaces réfringentes. Il naît de là des erreurs dues à l'*épaisseur du verre* et à l'*aberration de sphéricité*. Nous savons d'autre part qu'il existe, comme dans tout autre emploi d'objectifs, une *aberration de réfrangibilité*, et pour la photographie, en particulier, une *aberration chimique* provenant de la différence qui existe entre les foyers chimique et lumineux, différence que l'effort des constructeurs doit tendre à faire disparaître. Nous examinerons successivement et succinctement ces différentes causes de trouble et de déformation des images, produites par des objectifs simples.

Épaisseur de la lentille. — La signification du centre optique a été exagérée par suite de l'hypothèse qui a supposé nulle l'épaisseur du verre ; nous avons considéré ce point comme étant tel que les rayons qui se sont dirigés sur lui après la première réfraction, sont sortis de la seconde surface dans leur direction primitive, tandis que par suite de l'épaisseur de la lentille, il n'y a que parallélisme entre les directions d'un rayon qui, après la première réfraction, a passé par ce centre optique.

L'inspection seule de la figure, construite comme pour la recherche du centre optique C, fait voir que l'angle de la nature $\alpha = AcB$ est rendu en $B'\gamma A'$. Les points c et γ sont variables avec la direction primitive Bc ; ils se rapprochent tous deux de C quand le rayon incident se rapproche de l'axe principal, et ils finissent par se confondre tous le trois lorsque Bc et AC sont eux-mêmes confondus.

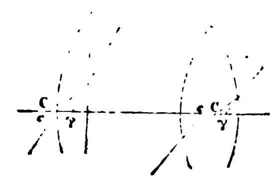


Le déplacement de c n'a pas d'influence sensible sur les angles de la nature, par suite de l'éloignement des objets qui les sous-tendent ; mais il n'en est pas de même du déplacement de γ par suite du grand rapprochement de l'image ; il résulte donc de ce qui précède que si on prend pour sommets des angles formés avec l'axe, le centre optique C, les angles sont vus en vraie grandeur quand ils sont petits, et qu'au contraire ils sont diminués lorsque les directions s'écartent de cet axe, puisque leurs sommets auraient dû être rapprochés des images, dans des positions variables telles que γ ; inversement si le point de vue pris pour

le tableau, ou si le sommet commun des angles, pour la construction d'un canevas, a été pris de manière que les angles extérieurs soient égaux à ceux de la nature, le même point de vue fera voir trop grand ceux des angles qui se rapprochent de l'axe.

Si, conservant la même figure que ci-dessus, nous supposons que B'γ soit le rayon incident et cB le rayon réfracté, le contraire de ce qui avait lieu précédemment se présentera, car l'angle vrai naturel B'γA' sera indifférent à la position γ de son sommet, tandis que celui du tableau dépendra de la position de c plus éloigné de ce tableau, que C qui est le sommet convenable pour les angles petits. En sorte que dans ce cas de retournement de l'objectif, si le point de vue du tableau est choisi de manière à faire voir en vraie grandeur les angles qui s'écartent peu de l'axe, ceux qui s'en éloignent seront amplifiés.

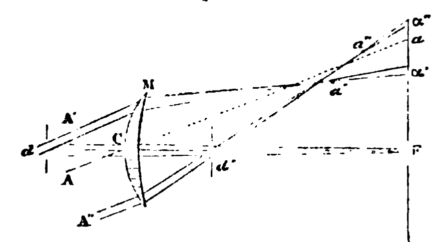
Dans une lentille plane-convexe, le centre optique est situé sur la face courbe, en C, en sorte qu'un des sommets d'angles, c, est constant. Si la surface convexe est tournée vers la nature, le sommet γ des angles de la perspective est seul variable de position, et plus rapproché de celle-ci que le centre optique C qui convient pour les angles petits formés avec l'axe; il y aura donc pour le tableau, considéré d'un même point de vue, toujours diminution des angles éloignés de l'axe principal. Si au contraire on tourne la face plane vers la nature, la variation de position de γ devient indifférente, et la constance de c laisse aux angles leur vraie grandeur.



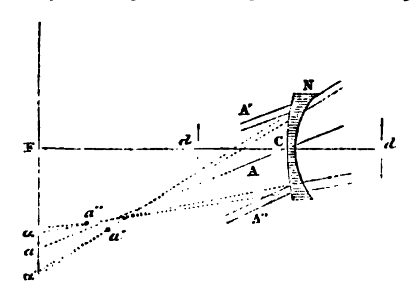
Il est facile de voir, à l'inspection de la figure, qu'une lentille biconcave diminue toujours les angles hors de l'axe, quelle que soit la face présentée aux objets.

Il résulte de ce qui précède que par suite des effets contraires qui sont quelquefois produits, il y aura avantage à employer un objectif combiné composé de deux verres dont les courbures seront tournées en sens inverses.

Aberration de sphéricité. — Considérons une lentille convergente M. Un faisceau de rayons lumineux parallèles à l'axe principal irait donner une image réelle en F, si ce faisceau avait peu d'amplitude ; soient Fα'a le plan focal, et A,A',A″ des rayons lumineux arrivant d'un point éloigné de l'axe et tombant sur les différentes parties de la lentille. Pour qu'il y eût similitude de l'image et de l'objet



de la nature, il faudrait que le rayon A passant par le centre optique ne fût pas dévié et que l'image de A,A',A″ allât se peindre exactement en *a*. Si on considère les trois faisceaux, on voit qu'ils tombent sur la lentille sous des inclinaisons diverses et dont la grandeur augmente de A″ à A' en passant par A, et qu'ils devront, par suite, subir des déviations différentes par rapport aux lignes fictives que d'après la formule des lentilles, ils auraient parcourues pour aller tous aboutir en *a*, donnant alors l'égalité des angles et la forme plane de l'image. En effet, quand nous avons cherché cette formule des lentilles, nous avons assimilé l'indice de réfraction constant $n = \frac{\sin. i}{\sin. r}$, au rapport des angles i et r, rapport qui devait figurer dans la formule et donner la déviation de chaque rayon lumineux ; mais $\frac{i}{r} > \frac{\sin. i}{\sin. r}$ d'une façon d'autant plus marquée que l'obliquité i du rayon incident sur la normale est plus considérable. En sorte que les déviations obtenues qui auraient fait concourir tous les rayons réfractés en *a* sont trop faibles ; ainsi le faisceau A″ qui est le plus normal devra se relever en allant concourir en *a*″ et aller se peindre suivant un petit cercle *α*″ qui aura amplifié l'image qui aurait dû occuper la position F*a*. En ne s'occupant pas de la déviation du faisceau A, et arrivant de suite à A', on voit que par suite de sa plus grande obliquité, sa déviation par rapport à *a* devra être plus considérable et sa convergence plus forte aussi, par suite de l'augmentation plus grande de $\frac{i}{r}$ par rapport à $\frac{\sin. i}{\sin. r}$. Ce faisceau se réfractera donc de manière à passer par *a'* en allant se peindre sur le plan focal suivant le petit cercle *α'*.



Si on laissait agir tous les rayons qui, venus d'un même point A, ont frappé la lentille, on voit que ce point serait remplacé par une image occupant tout l'espace *α'α″*, image qui serait très-confuse. On obvie à cet inconvénient en ne laissant arriver qu'un seul des faisceaux minces que nous avons considérés, et pour cela il suffit de mettre en *d* ou en *d'* un diaphragme antérieur dans le premier cas, postérieur dans le second, et on aura une image unique, soit *a'*, soit *a″*, mais cette image ne sera pas sur le plan focal, et trop rapprochée de l'axe principal avec l'emploi du diaphragme *d*, elle en sera trop éloignée avec l'usage de *d'*.

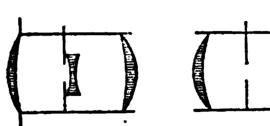
Si on considère la seconde figure faite dans les mêmes circonstances que la première, mais avec une lentille divergente, on voit que les effets produits par les diaphragmes sur les images virtuelles *a'* et *a″* sont in-

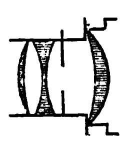
verses de ceux qui avaient lieu dans le cas d'une lentille convergente, et que de plus les rayons trop convergents pour atteindre le plan focal, dans le premier cas, sont au contraire trop divergents dans le second. Si donc on accole les deux lentilles en leur donnant une surface commune, leurs défauts contraires pourront se détruire, tout au moins partiellement.

Si de plus on renversait la lentille convergente M de manière à lui faire présenter sa concavité vers l'objet, on verrait facilement que les mêmes défauts seraient produits avec le même diaphragme et les défauts contraires avec les diaphragmes opposés ; il y aura donc encore avantage à combiner deux objectifs, en opposant leurs courbures et en les séparant par un diaphragme.

Aberration de réfrangibilité. — Nous avons indiqué, sommairement, en nous occupant de la lunette astronomique, le moyen employé pour rétablir l'achromatisme ; ce moyen est précisément celui que nous venons de dire être favorable pour détruire les deux aberrations dont nous venons de parler, c'est-à-dire l'emploi d'objectifs doubles composés chacun de deux verres convergents et divergents. Ce moyen s'applique évidemment aussi à l'*aberration chimique*. Il est théoriquement simple, mais il est difficile en pratique, parce qu'il doit satisfaire à quatre conditions différentes.

Les objectifs Dallmayer, Charconnet, orthoscopique, que représentent la figure, ainsi que beaucoup d'autres dont le nombre s'augmente chaque jour, sont construits de manière à être d'accord avec les conditions que nous avons énoncées ; le mérite relatif des uns et des autres résulte ensuite des courbures relatives des différentes surfaces, de l'écartement des verres et de la position du diaphragme, mérite que l'usage seul peut faire apprécier, et que des essais multipliés faits par leurs inventeurs ont seuls pu faire découvrir. Chacun d'eux a généralement une qualité propre, sans posséder les autres au même degré ; rappelons, en terminant ce sujet, que ces qualités sont l'emploi permis d'un grand diaphragme, un grand champ lorsqu'il s'agit d'exécuter des vues de paysage, l'existence de l'image plane dans le même plan focal, et enfin la constance des angles vus d'un point de la nature et d'un même point de vue de l'image.





Déformations des images. — La déformation des angles supposés avoir le même sommet est quelquefois assez sensible, même en dehors de leur mesure faite pour la topographie, pour les vues pittoresques, par exemple, et surtout pour les vues de monument. On reconnaîtra ce défaut lorsque des lignes droites du sujet ne seront pas rendues par des lignes droites sur l'épreuve, car si les angles étaient égaux de part et d'autre, il

y aurait similitude de l'image et de la ligne de la nature en supposant une proportionnalité constante des côtés aboutissant aux sommets des angles, c'est-à-dire en supposant la ligne de la nature remplacée par une autre ligne, qui serait droite également, mais placée parallèlement au plan du tableau. L'absence de cette constance des angles est quelquefois bien accusée et bien choquante, surtout sur les verticales des monuments qui prennent une forme curviligne.

Ces mêmes verticales présentent souvent un autre défaut à la vue, quand elles ne sont pas représentées parallèlement. Il suffit, pour que leurs images convergent en restant rectilignes, que le plan du tableau ne soit pas mis verticalement, ce que la hauteur des édifices force généralement à faire, car si on s'astreignait à cette verticalité, la ligne d'horizon, qui occuperait le milieu de la plaque, passant peu au-dessus du sol et toujours à une faible hauteur par rapport au monument, le sommet de celui-ci n'apparaîtrait pas sur l'épreuve qui contiendrait d'autre part une trop grande partie de l'image du sol. On peut obvier jusqu'à un certain point à cet inconvénient en haussant l'objectif de manière que son centre optique se projette vers le haut de la plaque renversée, c'est-à-dire de manière que le point de vue soit placé sur celle-ci plus près de son bord inférieur lorsqu'elle sera remise droite. Mais en agissant ainsi, on fait naître un autre inconvénient qui provient de ce que le champ se trouve ainsi augmenté dans un sens et diminué dans l'autre, par rapport à l'axe principal de l'objectif, ce qui donne une grande netteté aux objets inférieurs, mais ce qui en retire aux objets supérieurs situés vers la limite de ce champ amplifié.

L'inclinaison de la plaque laisse aux différentes parties la netteté convenable, mais elle produit, avons-nous dit, la convergence des verticales désagréables à l'œil. La perspective est exacte, car les verticales doivent converger comme toutes les autres lignes parallèles quelconques, à moins que le plan du tableau ne leur soit parallèle, c'est-à-dire vertical lui-même. C'est parce qu'il est supposé en être ainsi que cette convergence est désagréable à la vue, et cette supposition est motivée par les circonstances habituelles de la vision. En effet les objets considérés sont presque toujours à des hauteurs peu différentes de celles de l'œil, et la partie sensible de la rétine est alors verticale ; de là est née pour celle-ci l'habitude de voir les verticales parallèles. Quand cet œil considère ensuite un tableau, il le regarde normalement, et les verticales représentées ne lui paraissent parallèles qu'autant qu'elles sont en réalité dessinées parallèlement ; si elles convergent, elles ne lui semblent pas se rapporter à des verticales, puisqu'il a l'habitude de voir celles-ci parallèles dans la nature. On peut faire disparaître ce défaut, en regardant le tableau sous une obliquité convenable, c'est-à-dire en ne le plaçant pas parallèlement à la rétine, ce qui est du reste peu commode.

Il est cependant une exception à ce que nous venons de dire. Lorsque du pied d'un monument élevé on considère celui-ci, la tête est obligée de

se renverser en arrière, et l'œil doit diriger son axe optique suivant des inclinaisons très-diverses ; il suit de là que le plan du tableau, la rétine, prend des inclinaisons également diverses, en sorte que suivant ces inclinaisons, les parties considérées des verticales des monuments convergent avec des intensités variables et qui vont en augmentant pour les parties supérieures. Cet effet se présente aussi dans le sens horizontal quand l'œil doit tourner pour amener la rétine perpendiculaire aux faisceaux qui émergent des points considérés de la campagne ou de l'objet. Pour qu'il soit rendu exactement dans l'un et l'autre cas, il suffit de placer l'œil exactement au point qu'a accupé le centre optique, en inclinant le tableau dans une direction symétrique à celle qu'occupait la plaque, par suite du renversement des images ; mais comme l'œil ne s'astreint généralement pas à satisfaire à ces conditions, il exige que les parties des verticales qui peuvent être, pour ses positions erronées, à la hauteur de la rétine, lui paraissent parallèles, ce qui entraîne un parallélisme constant, qui, répétons-le, n'aurait pas besoin d'exister si on regardait les perspectives dans les circonstances qui leur ont donné naissance.

Les appareils panoramiques dont nous nous sommes occupé avec quelque détail au chap. XII du liv. Ier, permettent un champ indéfini dans un sens, habituellement et le plus commodément, dans le sens horizontal ; mais s'ils laissent verticales les images des verticales de la nature, quand le tableau constamment vertical n'a éprouvé qu'un mouvement de translation et un mouvement de rotation autour d'un axe vertical également, ils changent en courbes, sur les images développées, toutes les autres lignes droites qui ne sont pas dans le plan horizontal de l'axe optique, et l'aspect du paysage, qui résulte de la grandeur des angles, n'est obtenu conforme à celui de la nature que lorsque le point de vue de l'image change, non plus de distance au tableau, ce qui doit avoir lieu dans de très-petites limites pour les appareils fixes, mais dans le sens parallèle au plan du tableau, et avec des déplacements tels que le rayon visuel soit à chaque instant perpendiculaire à ce plan. Comme, à moins de rétablir l'image sur le cylindre qui l'a produite, celle-ci sera généralement considérée d'un point de vue unique, il en résulte que l'aspect d'une vue panoramique n'est pas conforme à celui de la nature.

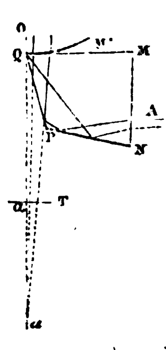
196. Chambre claire.—La chambre claire donne, comme la chambre noire, le moyen de tracer sur une feuille de papier, les contours de l'image d'un objet. Seulement, dans le cas actuel, l'image n'est que virtuelle, et elle ne pourrait pas être utilisée pour la photographie où les actions chimiques doivent agir sur les différents points qui doivent alors exister réellement.

L'expression la plus simple de la chambre claire serait une vitre verticale sur laquelle un œil, situé dans une position invariable, pourrait suivre avec un style les intersections des pinceaux lumineux très-déliés

qui, partant de chaque point de la nature, arrivent à la pupille. Pour pouvoir être appliqué, ce système exigerait que la vitre fût remplacée par un canevas assez gros pour laisser passer quelques-uns des rayons lumineux et assez fin pour qu'un dessin pût être tracé dessus.

Cette idée première modifiée a donné naissance à différentes chambres claires.

Soit MNPQ un prisme quadrangulaire dont l'angle M soit droit et l'angle en P très-obtus : il doit avoir 135° environ. On tourne la face MN verticale vers l'objet A que l'on veut dessiner. Les rayons frappant presque normalement la face MN, éprouvent infiniment peu de réflexion, et ne dévient guère de leur direction première par le fait de la réfraction. Ils atteignent ensuite le plan NP sous une obliquité assez grande pour être entièrement réfléchis : il en est de même à l'égard de la troisième face PQ ; puis enfin, en repassant dans l'air vers l'arête Q de la face horizontale et supérieure MQ, ils s'écartent par suite de la réfraction, plus qu'ils n'ont fait dans le précédent trajet : d'où il résulte qu'un œil placé vers Q, et regardant en bas, recevra, par l'effet d'un certain nombre de ces rayons, la sensation d'une image virtuelle formée quelque part en *a*. Comme le corps de l'observateur ne peut être posé entre l'objet et le prisme, sous peine d'intercepter tous les rayons, il doit être placé du côté opposé, et c'est pour ce motif que le prisme est quadrangulaire : car c'est l'effet des deux réflexions successives qui redresse l'image. Celle-ci serait plus nette mais renversée, si l'on employait un prisme triangulaire.



Un observateur placé vers le point O de façon à avoir sa pupille partagée en deux par l'arête Q pourra voir simultanément la pointe d'un crayon aperçue directement et l'intersection *a* formée sur une table, par les rayons de l'image virtuelle *a* qui est placée à une distance de l'appareil égale à celle du point A de la nature.

Il n'est pas nécessaire, dans l'emploi de la chambre claire, d'arrêter, par l'interposition d'un voile, les rayons extérieurs, comme cela est indispensable pour la chambre noire, parce que, dans l'usage de celle-ci, les rayons reçus sur un écran, diffusés dans tous les sens, n'arrivent qu'avec une faible intensité à l'œil ; la chambre claire laisse au contraire les rayons lumineux resserrés dans les faisceaux et donne plus d'intensité aux images, quand l'œil est placé dans ces faisceaux.

Mais à côté de cet avantage elle présente des inconvénients. Ainsi l'œil doit occuper une position précisée dans tous les sens, non-seulement comme il a été dit plus haut, dans le sens perpendiculaire à l'arête Q afin de recevoir à la fois des rayons directs venus du crayon et des rayons réfractés venus de l'image, mais sa position doit être immuable afin que le point de vue soit constant par rapport au tableau. En second

lieu l'œil n'est pas apte à voir simultanément bien des objets tels que le crayon placé en α à une très-petite distance et le point a situé à une distance égale à celle de la nature. D'un autre côté encore, cette chambre claire a l'avantage de permettre l'exécution de dessins faits à une échelle quelconque. Rien, en effet, n'a précisé la distance de la table T qui doit seulement être assez rapprochée pour que le bras armé du crayon puisse l'atteindre.

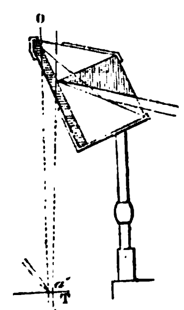
Cet avantage devient quelquefois un inconvénient, comme lorsqu'il s'agit d'exécuter une perspective destinée à la confection d'un canevas. L'interposition d'une lentille biconcave fixe, placée entre l'œil et l'image virtuelle, peut changer celle-ci en une autre image virtuelle située au foyer principal, à une distance constante, si la lentille est fixe, distance qui précise l'échelle du dessin.

On arrive au même résultat d'une manière plus commode en remplaçant la face plane QM par une surface QM′ concave à l'extérieur qui change la dernière image virtuelle résultant de la réflexion sur PQ en une autre virtuelle également, mais située en α à une distance constante de Q, distance égale au double du rayon de QM′, dans le cas ordinaire du coefficient de réfraction égale à $\frac{3}{2}$.

Dans l'usage de la chambre claire ainsi modifiée, la position de l'œil n'est plus invariable. Il suffit que celui-ci soit placé de manière à recevoir simultanément les rayons réfractés et ceux venant directement de la pointe du crayon. Enfin, observons que les deux objets, le crayon et l'image étant situés à la même distance de l'œil, celui-ci est apte à les voir avec une égale netteté.

Amici, professeur de Modène, a modifié la première construction imaginée par Wollaston. Parmi les différentes combinaisons qu'il a faites avec un prisme triangulaire et une lame de verre, nous citerons seulement la suivante.

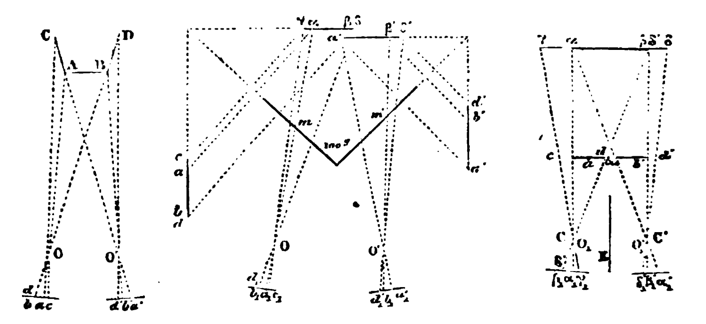
L'une des arêtes d'un prisme triangulaire, dont la section est un triangle rectangle et isocèle, est appliquée sur une lame de verre qui fait un angle de 50g avec la face hypoténuse du prisme. Cette lame est donc parallèle à l'une des faces de l'angle droit, et celle-ci, tournée du côté de l'objet que l'on veut reproduire, n'est pas verticale, mais placée à peu près comme l'indique la figure. Les rayons réfractés deux fois et réfléchis, une fois par la face hypoténuse du prisme, et une autre fois par la face antérieure de la lame de verre, donnent naissance à une image virtuelle a que l'œil aperçoit simultanément avec celle du crayon vu à travers la lame de verre à faces parallèles. La pupille ne doit pas nécessairement alors être partagée en deux par l'arête horizontale du prisme, comme cela devait être dans la chambre



de Wollaston. On peut, comme il a été dit précédemment, employer une lentille divergente pour que la position de l'image virtuelle soit précisée.

197. **Stéréoscope.** — Si l'on regarde avec un seul œil un objet quelconque, il se peint sur la rétine une perspective de cet objet. Si l'on considère ensuite, avec les deux yeux, un sujet situé sur un plan, les rétines reçoivent l'empreinte de deux images semblables ; de telle sorte que lorsque les deux axes optiques des yeux se fixent simultanément sur chaque point particulier pour recevoir les images de ce point aux lieux de la plus grande sensibilité visuelle, les images situées hors des axes sont toujours identiques ; par suite de la communication qui existe entre les nerfs optiques, les deux images de chaque point donnent lieu à une sensation unique ; abstraction faite de l'intensité de la lumière reçue, l'effet produit est le même qu'avec l'usage d'un seul œil.

Mais si l'on regarde avec les deux yeux un objet de la nature ayant les trois dimensions, il n'en est plus de même ; les deux perspectives formées sur les rétines sont prises de deux points de vue éloignés l'un de l'autre de la distance qui sépare les centres optiques des yeux. L'œil gauche voit certaines parties du corps, telles que AC qui sont cachées à l'œil droit, et réciproquement. Il en résulte, sur les rétines, deux images *bac*, *d'b'a'* ayant des parties communes *ba*, *b'a'*, telles que leurs points homo-



logues pourront être amenés aux points d'extrême sensibilité par un mouvement de rotation des yeux, et ayant également des parties distinctes *ac*, *b'd'* qu'il y aura impossibilité de recevoir simultanément sur ces lieux de plus grande sensibilité. En sorte que lorsque le point *c* de l'œil gauche sera celui qui appartient à son axe optique, l'axe correspondant de l'œil droit cherchera vainement l'image correspondante de C.

Si de plus on considère deux points B et D situés à des distances différentes, on verra qu'ils nécessiteront des convergences des axes des yeux plus grandes pour le point le plus rapproché que pour le plus éloigné.

Ces deux causes, jointes à celles que nous avons énoncées en parlant de la vision, donnent la sensation du relief ; les peintres ne peuvent pas

en faire usage, et ils sont obligés de se contenter de l'influence de ces autres causes, en en augmentant quelquefois l'importance. Le stéréoscope peut seul utiliser, par l'emploi d'images doubles, celles dont nous venons de parler, et par l'effet qu'il produit, il montre d'une manière incontestable l'insuffisance d'une seule perspective, quel qu'en soit du reste le mérite artistique.

Supposons que la figure précédente représente deux images *bac*, *d'b'a'* formées avec la chambre noire d'un daguerréotype, de l'objet ABCD examiné des deux points de vue O et O'; c'est-à-dire que ces deux points sont les centres optiques de deux objectifs de même distance focale F.

Transportons, d'après le système de M. Wheastone, ces deux images en *abc*, *a'b'd'* ; soient *m* et *m'* deux miroirs plans perpendiculaires placés dans une position symétrique par rapport aux deux images parallèles. Celles-ci donneront naissance à deux images virtuelles γαβδ, α'β'δ' très-voisines l'une de l'autre, mais que la disposition relative de *cab*, *a'b'd'*, par rapport aux miroirs, pourrait même superposer, dans les portions communes du moins. Les deux yeux placés en O et O' recevront des sensations isolées, les mêmes que celles produites dans le cas de la figure précédente, c'est-à-dire qu'un œil verra des parties cachées à l'autre, et que les images β et β', δ et δ' de points différemment éloignés, exigeront une convergence plus grande Oβ, O'β' pour les axes optiques des yeux, lorsque ceux-ci donneront simultanément la sensation du point le plus rapproché, et on aura par conséquent le sentiment du relief.

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire que les deux images γαβ, α'β'δ' soient superposées en réalité; si elles ne le sont pas, il en résultera ce seul effet, que les deux axes optiques des yeux cherchant à amener un point particulier α, α', par exemple, à donner la sensation unique la plus nette, se tourneront dans les directions Oα, Oα' avec une convergence plus faible ou plus forte que celle qui proviendrait de la superposition de α à α'. Pourvu que le déplacement αα' soit peu considérable, on pourra voir également bien dans l'un et l'autre cas.

Sir David Brewster a modifié cet appareil de la manière suivante :

Les images *bac*, *d'b'a'* de la figure obtenues par le secours de la chambre noire sont placées en *cab*, *a'b'd'* après avoir été retournées, ce qui les met dans la même position que l'objet ABCD de la nature ; deux lentilles convergentes dont les centres optiques sont en C et C' reçoivent chacune les rayons venant seulement de l'une des images, par suite de l'existence d'un écran E ; elles donnent naissance à deux images virtuelles αβδ, γαβ superposées exactement ou à peu près seulement, comme dans le cas examiné précédemment. Cette superposition, tout au moins approximative, exige que la distance des centres optiques soit un peu plus grande que celle des points homologues des images. Les yeux placés en O_1 et O_1' près de C et C' dans le sens CC', afin que les rayons reçus aient traversé les parties centrales seules des oculaires, ce qui est néces-

saire pour la netteté de la vision, limitent la grandeur de l'écartement CC', par suite, celui des points homologues des images, et enfin la grandeur même des images employées. Cette limitation n'a pas lieu pour le stéréoscope par réflexion de Wheastone.

Les images virtuelles $\alpha\beta\delta$, $\gamma\alpha\beta$ donnent naissance sur les rétines à deux images $\beta_1\alpha_1\gamma_1$, $\delta_1'\beta_1'\alpha_1'$ dissemblables l'une à l'autre et semblables à celles qui se seraient formées à l'aspect direct de l'objet à trois dimensions. On peut remarquer, comme dans le stéréoscope de Wheastone, que la convergence relative aux points plus rapprochés est plus grande que celle qui se rapporte aux points les plus éloignés.

Les deux conditions sont ainsi satisfaites, et en s'ajoutant elles donnent le sentiment du relief, ce qui n'aurait pas lieu si elles se contrariaient. C'est pour cette raison qu'il faut retourner isolément chacune des images, ce qui se trouve effectué quand, des négatifs isolés on tire des positifs; si les deux vues étaient situées sur le même verre, il faudrait alterner les deux positifs après le tirage, sans quoi la sensation due à la dissemblance des effets produits sur les rétines continuerait à subsister, mais le second effet de convergence aurait lieu en sens inverse de celui qu'il a dans la nature, c'est-à-dire que les axes des yeux auraient une convergence d'autant plus grande que les points seraient plus éloignés, et le résultat produit, très-étrange du reste, serait incompréhensible. C'est ce dont on s'assurerait facilement en théorie, en supposant les deux images changées de place dans la dernière figure, et pratiquement, en coupant une image stéréoscopique et alternant de place ses deux moitiés.

L'influence de l'écartement des deux yeux se fait sentir d'autant moins vivement que les sujets représentés sont plus éloignés : aussi arrive-t-il souvent que, pour les paysages surtout, on donne aux deux points de vue un écartement plus grand que celui des yeux. L'effet du relief se trouve alors beaucoup plus accentué, et il peut même le devenir trop, lorsque la dissemblance des images est par trop grande ; mais en restant même dans des limites qui ne choquent pas la vue, les effets produits ne sont pas ceux de la nature, et ils semblent se rapporter à des objets réduits de dimensions et regardés de près ; on éprouve alors la sensation que produirait, à une petite distance, un plan en relief substitué au paysage, ou celle qui résulterait de la vue d'un nain rapproché du spectateur et mis à la place du personnage dont on regarde le portrait.

CHAPITRE VI

APPLICATIONS A LA TOPOGRAPHIE ET A LA GÉODÉSIE

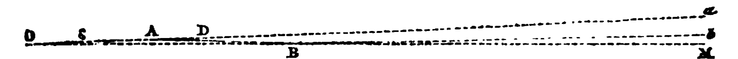
Nous avons souvent invoqué les principes de l'optique dans la description des instruments de topographie et de géodésie. Nous nous contenterons d'indiquer dans ce chapitre les applications fondamentales qu'on peut faire de ces principes aux instruments de précision.

Mesure des angles. — Pour mesurer un angle, on fait coïncider une ligne matérielle d'un instrument, successivement avec les deux lignes droites de la nature, et l'on estime l'angle parcouru en passant d'une position à l'autre. Dans beaucoup de circonstances, l'une des deux visées est sous-entendue ; elle est remplacée par un règlement particulier de l'instrument, comme pour la boussole, l'éclimètre, etc.

Pour que les angles ainsi obtenus soient exacts, il est donc nécessaire que ces coïncidences existent réellement ; mais, dans toutes les opérations physiques, il est à présumer que l'exactitude ne sera jamais complète. De là naît une erreur dépendant du mode d'opération employé.

Il n'existe que trois procédés qui puissent permettre d'aligner une ligne sur une autre.

198. **Deux points fixes.** — La direction à mettre en contact avec celle de la nature peut être déterminée par deux points fixes, comme dans



l'emploi du niveau d'eau, de la boussole Burnier, etc. Il est nécessaire de se mettre en arrière du plus rapproché, à une distance telle qu'il produise une image nette dans l'œil. Celui-ci devra donc se placer en O de telle sorte que les points fixes A et B lui paraissent superposés. En réalité, cette superposition n'aura pas lieu ; au-dessous d'une certaine limite, l'œil n'a plus sensation des angles très-petits. Ainsi estimons, pour fixer les idées, qu'à la distance de la vue distincte, $0^{m},2$, la limite

de petitesse dont on ait connaissance, soit de $0^m,0001$, ce qui répond à un angle de 3′20″ environ.

L'angle O de la figure peut donc atteindre cette limite, en sorte que si l'œil pouvait ensuite juger exactement la superposition de A ou de B avec le point visé, on commettrait des erreurs angulaires aAM, bBM, car on rapporterait involontairement soit à a, soit à b, la direction matérielle AB qui aurait dû appartenir à M. Ces deux angles seraient, approximativement, en désignant AB par D, et OA par δ,

$$B = O\frac{\delta}{D} \qquad A = B + O = O\left(1 + \frac{\delta}{D}\right)$$

Mais la superposition du point visé, avec A ou B, ne se fera encore qu'avec la limite d'approximation égale à O; cette nouvelle erreur pourra s'ajouter ou se retrancher de celles que nous venons déjà de trouver. La limite supérieure de l'erreur totale sera donc

$$O\left(2 + \frac{\delta}{D}\right)$$

Dans une des deux opérations de visées, l'erreur peut être de signe contraire à celui de l'erreur commise dans l'autre visée; il en résultera donc, dans la mesure de l'angle, et relativement à cette seule cause, une erreur possible

$$2 \times O\left(2 + \frac{\delta}{D}\right)$$

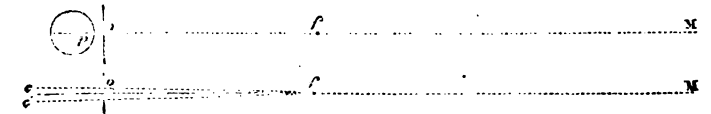
Supposons qu'il s'agisse d'un niveau d'eau tel que $D = 1^m$; prenons la distance $OA = \delta = 0^m,2$, et supposons également admise la limite 3′20″ que nous avons estimée précédemment pour l'angle O. L'erreur possible sera dans un pareil cas

$$2 \times 3',2\left(2 + \frac{0,2}{1}\right) = 4 \times 3',2 \times 1,1 = 14',08''.$$

Cette limite dépend des chiffres un peu arbitraires que nous avons adoptés, mais il y a grandement lieu de supposer qu'elle peut être dépassée de beaucoup. En effet nous n'avons pas tenu compte de la cause d'erreur grave provenant de ce que l'œil ne peut pas percevoir simultanément les sensations nettes de points éloignés de distances très-différentes. Aussi nous croyons qu'il vaudrait mieux augmenter l'influence du terme $\frac{\delta}{D}$ par l'augmentation de δ, afin que l'œil fût plus favorablement placé pour recevoir les sensations simultanées.

199. **Un point fixe et une visière.** — Ce procédé a été indiqué pour le clisimètre de Chezy. Un point f est marqué par la croisée de deux fils; en regard se trouve un très-petit trou ouvert dans un écran. On place l'œil en arrière et très-proche de la petite ouverture O, et l'on fait

tourner la ligne Of jusqu'à ce qu'on aperçoive le point M coupé par la croisée des fils.



Si le petit trou était un point mathématique, la pupille se plaçant en p, l'œil se tournerait de lui-même jusqu'à ce que l'image allât se peindre au point le plus sensible de la rétine, et la direction serait déterminée à l'approximation près, 3′20″ que nous avons admise précédemment. Mais avec un point mathématique il n'y aurait pas de lumière reçue; il faut donc donner une certaine dimension à la visière, et alors l'œil pourra se déplacer de manière que son axe principal soit dirigé suivant Cf ou $C'f$, sans qu'il en soit prévenu; la pupille étant en effet plus grande que la visière, recevra dans un cas comme dans l'autre la totalité des rayons qui auront traversé la petite ouverture. L'angle d'erreur possible est donc CfC', puisque dans la première visée on aura pu se servir de la direction Cf, et de $C'f$ dans la seconde. En désignant par O le diamètre de la visière et par f la distance Of, on pourra donc commettre, outre l'erreur provenant de l'imperfection de l'œil, une erreur représentée par $\frac{O}{f}$.

Comme exemple, supposons $O = 0^m,0005$, $f = 0^m,2$; l'erreur totale sera susceptible d'atteindre la limite

$$6',40'' + \frac{0,0005}{0,2} = 6'40'' + \frac{1}{400} = 6',40'' + 16',10'' = 22',50''.$$

En diminuant l'ouverture de la visière, on diminuerait cet angle d'erreur, mais en diminuant aussi la clarté.

Ce second procédé semble beaucoup plus défectueux que celui qui consiste à employer deux points fixes ; mais outre que la dimension de la ligne de visée a été supposée de $0^m,2$ au lieu de 1^m, rappelons-nous que, dans l'examen du premier, nous n'avons pas pu tenir compte de la diffusion des images de points situés à des distances très-différentes, diffusion provenant surtout du plus rapproché d'entre eux. Celui-ci n'existe plus dans le second cas, car la visière détermine la position de l'œil, sans être vue par lui ; il est donc plus facile d'apercevoir simultanément le point de la nature et la croisée des fils. Par l'existence même du petit trou qui éteint les rayons extrêmes des pinceaux lumineux, cette facilité se trouve encore augmentée.

Quoi qu'il en soit des avantages et des inconvénients de ces deux procédés, ils sont complétement abandonnés pour les instruments de précision qui ne permettent que l'usage du troisième.

200. Lunette. — On se sert à cet effet d'une lunette astronomique à oculaire simple ou composé. Pour simplifier l'explication, nous suppo-

serons l'oculaire formé d'une seule loupe. Au point où se forme l'image réelle due à l'objectif, on place deux fils en croix supportés par un diaphragme destiné à éteindre les images de points trop éloignés de l'axe du premier verre. L'ensemble de ces deux fils compose le réticule.

La ligne matérielle mise dans la direction de celle de la nature est l'axe optique de la lunette déterminé par la croisée des fils et le centre optique de l'objectif. Il suffit, pour qu'il en soit ainsi, que l'image de l'objet soit superposée à la croisée des fils, car nous savons que le point, l'image et le centre optique sont en ligne droite.

Supposons pour un instant que la distance focale conjuguée des différents points observés soit constante. Après avoir amené, par un tirage particulier, l'oculaire à la distance du réticule qui permet la perception nette des fils qui le composent, on visera successivement les deux points qui déterminent l'angle à mesurer, en faisant coïncider leurs images avec la croisée des fils. L'axe optique de la lunette aura ainsi pris, l'une après l'autre, les deux directions de la nature; il aura par suite décrit cet angle en passant de la première position à la seconde. Si la position de cet axe optique est restée invariable par rapport à l'enveloppe matérielle de la lunette, un point quelconque de celle-ci, ou faisant corps avec elle, comme le zéro d'un vernier par exemple, aura parcouru autour de l'axe de rotation, l'angle formé par les deux directions.

Tel est, en substance, le moyen employé avec succès pour mesurer exactement les angles.

La lunette employée est astronomique, avons-nous dit; la lunette terrestre aurait l'avantage de ne pas renverser les objets; mais outre la perte de lumière qu'elle occasionne, elle a l'inconvénient d'être plus longue que la première à grossissement égal. La lunette de Galilée n'a pas ces deux inconvénients, mais elle ne peut pas recevoir de réticule, puisqu'il n'y a pas formation d'image réelle, et elle ne permet du reste qu'un faible grossissement.

Causes d'erreur. — Pour que l'angle parcouru par le zéro du vernier invariablement fixé à la lunette soit bien l'angle vrai, il faut (sous le seul point de vue que nous considérons actuellement) que l'axe optique soit resté invariable lui-même par rapport aux parties matérielles qui composent la lunette. Cette fixité peut être détruite par deux causes différentes : 1° Nous avons supposé que les points considérés avaient même distance focale conjuguée; il n'en est ainsi que pour les points très-éloignés, et dans un grand nombre d'instruments, il faut que le réticule soit mobile pour l'amener au lieu même où se forme l'image. Dans ce mouvement, la croisée des fils se meut parallèlement à l'enveloppe cylindrique de la lunette et l'axe optique s'incline différemment par rapport à celle-ci, si la ligne décrite n'est pas l'axe de figure même de cette enveloppe. Si f et f' sont les deux positions successives, l'erreur commise est l'angle fCf'.

2° Les objectifs ne sont ordinairement fixés qu'à frottement, ou par un pas de vis; il est donc possible que ces verres tournent sur eux-mêmes, ou plutôt qu'on les fasse tourner, soit par inadvertance, soit en les remettant en place après les avoir nettoyés. Si le centre optique de l'objectif est en même temps le centre de la section de l'enveloppe cylindrique, cette extrémité de l'axe optique de la lunette n'aura pas bougé; mais il n'en sera jamais rigoureusement ainsi, et, s'il est excentrique, il passera d'une position c à une autre c'; l'axe optique aura donc dévié d'un angle cfc'.

Cette seconde cause d'erreur peut avoir une importance très-grande.

Les chiffres n'ont pas, dans le genre de considérations qui nous occupent, une valeur absolue; ils font seulement voir que le cas d'où ils résultent étant possibles, il y a lieu d'éviter la répétition de ces cas. Pour fixer les idées, supposons qu'avec une distance focale $F = 0^m,2$, le déplacement de l'axe, à une de ses extrémités, puisse être de $0^m,0002$; l'angle d'erreur sera de 6',40".

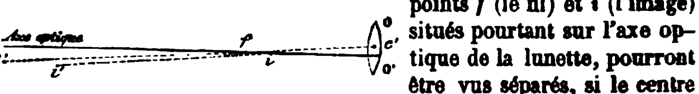
L'expérience indique que cette limite peut être beaucoup dépassée; nous avons nous-même trouvé dans un éclimètre une variation de 75' résultant de la rotation de l'objectif sur lui-même. Quoi qu'il en soit de la quotité de ces erreurs, elles sont possibles, et il semble que l'avantage de la lunette sur les autres modes de pointé n'est pas considérable.

Mais observons qu'outre l'avantage énorme d'avoir des images situées à la même distance, images qui peuvent être vues simultanément avec la même netteté, on peut annuler l'influence de ces causes d'erreur, d'abord par les soins du constructeur, dont les efforts doivent tendre vers ce but, mettre exactement l'axe optique en coïncidence avec l'axe de figure. En second lieu, l'observateur lui-même peut prendre certaines précautions propres à assurer la fixité de cet axe optique; il lui suffit pour cela de marquer la position de l'objectif par un trait longitudinal commun à l'enveloppe de la lunette et à la monture du verre, et de marquer par un trait transversal le tirage du réticule avec lequel l'instrument a été réglé. Nous parlons d'un instrument réglé, comme l'éclimètre, parce que c'est surtout dans ce cas que les dérangements sont à craindre; pour la mesure de l'angle compris entre deux directions, il suffit, en effet, que l'axe optique garde la même position entre les deux visées, et le dérangement a peu de chances d'avoir lieu pendant un si court laps de temps, si l'observateur est prévenu qu'il doit l'éviter.

La fixité de l'axe optique est obtenue, dans les observatoires, par la fixité absolue des deux points qui le déterminent; mais il n'en peut pas être de même pour les instruments destinés au transport, par suite de la nécessité où l'on se trouve quelquefois de remplacer un fil cassé, ou de nettoyer l'objectif.

Nous avons examiné la cause d'erreur provenant de l'objectif. Si l'image réelle se forme à la croisée des fils mêmes, l'oculaire ne peut engendrer aucune autre erreur; mais, dans les instruments à réticule

mobile, cette superposition n'existera jamais complétement, et deux points *f* (le fil) et *i* (l'image) situés pourtant sur l'axe optique de la lunette, pourront être vus séparés, si le centre optique de l'œil se place successivement en O et O' hors de cet axe, surtout si le centre optique de l'oculaire se trouve en *c'* hors de l'axe optique de la lunette. Chacun peut facilement s'assurer de ce point en se servant d'une lunette qui n'est pas bien amenée au point de superposition ; le déplacement de l'œil donne au réticule et à l'image un mouvement relatif qui engendre un pointé différent suivant la position adoptée pour l'œil. On évite cette cause d'erreur, d'abord par l'emploi du moyen qui sert à la reconnaître, c'est-à-dire, en tirant le réticule jusqu'à ce que le mouvement dont nous venons de parler n'existe plus ; on l'atténue encore en précisant la position que doit occuper l'œil, par l'interposition entre lui et l'oculaire, d'un petit trou de la grandeur de la pupille, et en pointant seulement alors que la clarté de l'image atteint son maximum.

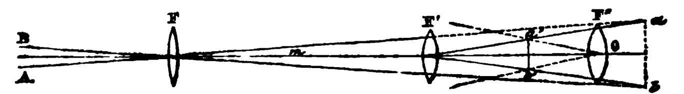


Il reste encore une cause d'erreur due à l'imperfection de l'œil, erreur que nous avons estimée à 3'20" ; elle a beaucoup moins d'influence avec une lunette qu'à l'œil nu. En effet, si cette erreur est commise dans l'estimation de la coïncidence des deux images, elle se trouve réduite dans le rapport du grossissement, pour les points de la nature. Si la lunette grossit dix fois, cette erreur devient seulement égale à 32".

Les observations précédentes, qui indiquent les précautions à prendre pour obtenir des mesures exactes d'angles, ne se rapportent évidemment qu'aux instruments destinés à donner une grande précision. En topographie, elles ne concernent guère que l'alidade et l'éclimètre ; mais elles ont une grande importance pour les instruments employés en géodésie.

201. Stadia. — Nous avons exposé au chap. II du liv. Ier la théorie de la stadia ; mais nous ne l'avons pas supposée adaptée à une lunette, sans laquelle pourtant elle ne peut donner que des résultats grossiers. Nous en complétons ici l'étude, et pour traiter la question telle qu'elle se présente en réalité dans la pratique, nous admettrons que la lunette est munie d'un oculaire négatif.

Une mire divisée AB donnerait une image réelle *ab*, si le premier



verre de l'oculaire, qu'on nomme collecteur, ne recevait pas auparavant les rayons convergents, qu'il rend plus convergents encore, de manière à donner lieu à une autre image réelle *a'b'*. Au point même où se forme cette image *a'b'*, on place un réticule composé de deux fils parallèles ; l'œil situé en O derrière le second verre de l'oculaire lit le nombre d'unités de l'image de la mire comprise entre les deux fils.

Supposons pour un moment cette image et le réticule superposés. En conservant les notations habituelles et en désignant par m l'intervalle qui sépare l'objectif du collecteur, on aura

$$ab = \frac{AB.f}{s}, \qquad a'b' = ab\,\frac{f'}{f-m} = AB\,\frac{ff'}{s\,(f-m)}$$

d'où
$$s = AB\,\frac{ff'}{a'b'\,(f-m)}$$

$a'b'$ écartement des deux fils est constant,

f' distance du réticule est constante, celui-ci et le collecteur étant invariablement fixés l'un à l'autre,

$f-m$ ou le s' du verre F′, distance focale conjuguée de f' qui est constant, est également constante.

On pourra donc poser, comme conséquence de notre hypothèse de superposition du réticule et de la seconde image

$$\frac{f'}{a'b'\,(f-m)} = C, \quad \text{et par suite} \quad s = C.f.AB$$

Pour pouvoir se servir de la stadia, on est obligé de supposer la distance cherchée s proportionnelle à la portion AB interceptée sur la mire, et pourtant f est variable avec s lui-même, car on a

$$f = \frac{Fs}{s-F}$$

Mais la substitution de cette valeur de f conduit à

$$s = Cf.AB = C.AB.\,\frac{Fs}{s-F}, \quad s - F = C.F.AB.$$

Si donc, dans l'expression vraie $s = f.C.AB$, on suppose $f = F$, on obtient $s - F$ au lieu de s, en commettant une erreur constante égale à F. On comprend alors qu'on pourra opérer comme si la constance de f existait réellement, et ajouter cette constante, ou même, pour être plus dans la vérité pratique, on pourra négliger cette quantité toujours petite par rapport aux erreurs inévitables de lecture, et surtout petite par rapport à l'incertitude réelle des points à déterminer topographiquement. Dans les cas importants, rien ne serait plus facile que d'ajouter cette constante. En résumé, on aura donc, en désignant par C′ une constante égale à C.F

$$\Sigma = s - F = C'.AB.$$

Pour que le premier coefficient C soit constant, il a été nécessaire d'établir la superposition exacte du réticule et de l'image $a'b'$, car alors f', et par suite sa distance conjuguée $f-m$, auront été constants ainsi que l'écartement des fils $a'b'$ qui ne peut pas varier, à moins d'accident. Pour arriver à cette superposition nécessaire, il suffit d'imprimer à l'œil de petits déplacements autour de sa position moyenne ; si la superposition existe, les deux images paraîtront fixes, l'une par rapport à l'autre ;

si elle n'existe pas, il se produira une sorte d'erreur de parallaxe qui les fera paraître mobiles, erreur qu'on fera disparaître par un tirage convenable.

Il est encore nécessaire que la superposition existe afin que la lecture faite sur AB représente exactement la portion de l'image de la mire qui, dans la formule $s - F = C.F.AB$, est superposée à l'écartement $a'b'$, et non pas celle qui sous-tend le même angle que celui-ci, au centre optique du dernier oculaire.

Nous renvoyons au chap. II, liv. Ier pour la graduation de la mire; nous nous contenterons d'indiquer le moyen de tirer parti d'une mire graduée précédemment pour un état du réticule, changé en un autre où l'écartement des fils est différent.

Nous avons trouvé

$$\Sigma = s - F = AB \frac{Ff'}{a'b'.(f-m)}$$

AB est une longueur de la mire renfermant un nombre n de divisions d'une amplitude inconnue α

$$\Sigma = n\ \alpha^{m} \frac{Ff'}{a'b'.(f-m)} \ldots\ldots (1)$$

Dans le cas où la mire est repeinte à neuf, il suffit, pour la simplicité des résultats, de faire en sorte que $\Sigma = n^{m}$, ce qui revient à établir expérimentalement, par une nouvelle graduation, une valeur de α telle que

$$\alpha \frac{Ff'}{a'b'\ (f-m)} = 1 \ldots\ldots (2)$$

Dans le cas où l'on veut profiter de la graduation telle qu'elle existe, on arrive au même but, la résolution de l'équation (2), en agissant sur f' et par suite sur la distance conjuguée $f - m$, en laissant à α la valeur qui existait préalablement. Pour cela, il suffit de changer légèrement f' distance du réticule au collecteur. Par une suite de tâtonnements, on arrivera à avoir une lecture n répondant à une distance mesurée égale à n^{m}. L'équation (2) sera ainsi satisfaite pour un cas particulier, et, comme elle ne renferme que des constantes, elle sera toujours satisfaite. L'équation (1) sera réduite alors, dans tous les cas, à

$$\Sigma = s - F = n \text{ mètres}.$$

et le nombre de mètres contenus dans la distance sera donné par le nombre d'unités contenues dans la lecture.

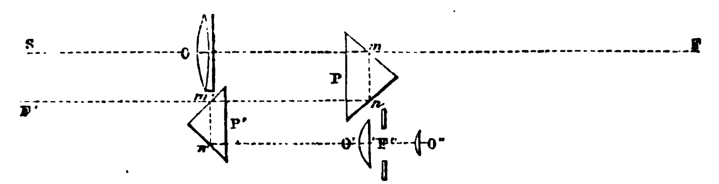
202. Nous avons invoqué l'existence des principes de l'optique dans la description d'un grand nombre des instruments que nous avons décrits, mais plus particulièrement aux §§ 10 et 55, où nous avons expliqué la théorie du *télomètre* de M. Goulier et celle du *télémètre* de M. Gautier.

Nous rappelons ici que ces deux instruments sont destinés à faire connaître une distance, même considérable, au moyen de la mesure d'une petite base.

Nous avons dit, au § 58, comment on arrivait à la connaissance approximative d'une longueur, sans mesure accessoire de base, en se servant de petites lunettes terrestres armées de réticules convenablement disposés pour l'emploi de ces lunettes comme stadia dont les mires sont des objets naturels auxquels on prête une dimension constante, dimension ayant servi à la graduation primitive.

La *longue-vue-cornet*, ou *télémètre*, de M. Porro est destinée à atteindre le même but ; son avantage consiste en ce qu'à grossissement égal, elle est trois ou quatre fois moins longue que la lunette terrestre ou longue-vue ordinaire ; malheureusement, en diminuant considérablement de longueur, elle augmente un peu d'épaisseur. M. Porro arrive à ce résultat en se servant de prismes interposés convenablement entre l'objectif et l'oculaire d'une lunette astronomique.

L'objet destiné à servir de mire envoie des rayons qui iraient former



une image réelle en F près du foyer principal de l'objectif O, s'ils ne rencontraient pas un prisme triangulaire P à section rectangulaire et isocèle ; ce prisme, placé à peu près au tiers de la distance focale, présente sa surface hypoténuse perpendiculairement à l'axe de la lentille, en sorte que le rayon lumineux qui a suivi cet axe n'est pas réfracté à l'incidence, et qu'il tombe sur une des faces sous un angle permettant la réflexion totale, de manière à suivre la direction *mn*, puis, pour les mêmes motifs, la direction *n*F' ; les rayons lumineux qui n'ont pas suivi l'axe doivent aller former une image réelle sur ce rayon principal réfracté et réfléchi deux fois, image qu'il est facile de reconnaître devoir être placée en F' tel que $nF' = mF$.

Un second prisme P' opposé au premier, mais un peu latéralement et à hauteur de l'objectif, joue un rôle analogue au premier, et il donne naissance à une dernière image réelle F'' telle que $n'F'' = m'F'$, image qui est finalement observée au moyen d'un oculaire positif O'.O''.

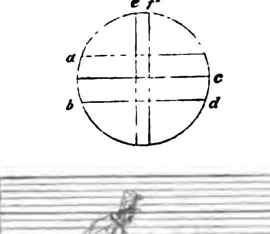
On a ainsi, avec la seule longueur effective comprise entre O et O'', un grossissement dû à l'emploi de l'objectif et de l'oculaire, grossissement qui dans une lunette ordinaire aurait exigé une longueur d'instrument un peu plus grande que OF.

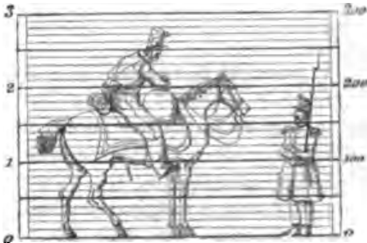
On peut reprocher à la longue-vue de M. Porro une perte de lumière due aux quatre réflexions qui ont lieu ; mais il faut remarquer que celles-ci sont des réflexions totales qui sont plus complètes que celles qui ont lieu sur des miroirs, et que la petite perte qu'elles peuvent pourtant causer trouve son analogue dans celles qui sont dues aux réfractions

occasionnées, dans la longue-vue ordinaire, par les verres intermédiaires que remplacent ici les prismes.

En disposant ceux-ci comme l'indique la figure, l'image de l'objet serait renversée ; pour obvier à cet inconvénient il suffit de faire pivoter le prisme P′ et l'oculaire autour de $m'F'$, d'un quart de révolution, de manière que les arêtes du premier deviennent perpendiculaires à celles du prisme P ; la rotation de la face m' engendrera, pour le rayon réfléchi $m'n'$, un déplacement angulaire double, et la seconde réflexion rétablissant son parallélisme à nm', le seul effet produit sera le renversement de l'image réelle F″, c'est-à-dire son redressement par rapport à l'objet.

Pour faire de sa longue-vue-cornet un *télémètre* militaire, M. Porro lui a ajouté un micromètre formé de plusieurs fils fixes disposés de la manière suivante : les fils *a* et *b* sont placés de manière à embrasser l'image d'un objet de 1^{m} placé à une distance de 100^{m} ; les fils *c* et *d* n'en interceptent que $0^{m},50$ et les fils *e* et *f* que $0^{m},20$.





Il a ensuite dessiné sur un canevas de lignes parallèles quelques objets de dimensions moyennes connues, ce qui forme une vignette collée sur le corps de la lunette.

Pour évaluer, avec l'instrument ainsi préparé la distance à laquelle on aperçoit un objet dont l'homologue est représenté sur la vignette, on remarque à quels détails de l'objet visé correspondent les fils de l'un des trois couples du micromètre. Les parallèles qui coupent de la même manière la gravure donnent de suite le résultat en mètres, en doubles mètres ou en demi-décamètres suivant l'intervalle micrométrique qui a servi à l'opération. Il est évident qu'il suffit pour cela que les parallèles du dessin, écartées de $0^{m},001$, représentent des décimètres sur les dimensions réelles de l'objet dessiné et qu'elles soient numérotées comme le serait une chaîne de 10, de 20 ou de 50 mètres.

On peut encore, dans d'autres circonstances, lorsqu'on en a le temps et que les objets sont accessibles, employer cette lunette au même usage que la stadia. Alors la vignette ne sert plus ; mais il faut avoir une mire graduée en décimètres fortement indiqués et bien visibles. On l'envoie vers le point dont on veut apprécier la distance, et chacune des divisions comprises entre les fils du micromètre représente 10 mètres, 20 mètres ou 50 mètres, suivant qu'on a fait usage de l'un ou de l'autre des couples de fils.

TABLEAUX

DESTINÉS :

1° A L'INSCRIPTION DES ANGLES OBSERVÉS ET DES ÉLÉMENTS DE RÉDUCTION, AINSI QU'AUX DIFFÉRENTS CALCULS GÉODÉSIQUES ;

2° AUX CALCULS ASTRONOMIQUES.

TABLEAU PREMIER.

On recueille, dans ce premier tableau, les angles et les distances zénithales multiples, ainsi que les divers éléments de réductions au centre, à l'horizon et au sommet du signal.

Les angles multiples se placent dans la colonne nO, à côté des chiffres 2, 4, 6, etc.; les quotients, par ces mêmes chiffres, s'écrivent dans la troisième colonne O, et la comparaison des différents résultats indique la marche de la série. C'est le dernier quotient qui doit servir dans le calcul des triangles.

Les distances zénithales multiples sont inscrites dans la colonne $n\Delta$, et les quotients correspondants dans la colonne contiguë Δ.

Pour obtenir l'élément de réduction y, on se dispense de remettre le vernier à zéro. Au moment où l'observation d'un angle est terminée, la lunette supérieure est dirigée sur l'objet de gauche et le vernier marque nO : on la rend libre pour la pointer sur l'axe du signal; l'angle qu'on lit ensuite et qui, sur le tableau, est désigné par V, se composant de $n\mathrm{O}+y$, il suffit d'en retrancher nO pour connaître y.

N° 1.

STATION à NOTRE-DAME.—S_t de la tourelle.—Tour N_d.

ANGLE ENTRE { D **Montmartre.**—Axe de la tour.—Plate-forme.
{ G **Arc de Triomphe.**—Axe.—Sommet.

n	nO	O	n	nΔ	Δ
	g	g		Montmartre	
2	116,6900	58,3450		g	g
4	233,3720	30			
6	350,0520	20	2	198,4340	99,2170
8	466,7540	42	4	396,8660	65
10	583,4280	28	6	595,3060	76
nO = 583,04		O = 58, 3		Arc	
V = 616,04		y = 33, 0	2	199,8760	99,9380
y = 33,00		O + y = 91, 3	4	399,7480	70
r = 1,90		dH = + 3,85	6	599,6260	76

ANGLE ENTRE { D
{ G

n	nO	O	n	nΔ	Δ
2					
4					
6			2		
8			4		
10			6		
nO =		O =			
V =		y =	2		
y =		O + y =	4		
r =		dH =	6		

TABLEAU II.

Calcul des triangles provisoires.

Ces calculs ont pour objet la détermination approximative des côtés de triangles qui entrent, comme données indispensables, dans la formule de réduction au centre.

Il suffit de prendre les logarithmes à 3 décimales. On pourrait, à la rigueur, se dispenser des calculs provisoires en faisant avec soin le canevas au moyen des angles observés. On y prendrait graphiquement les longueurs des côtés. Néanmoins, ces calculs ont un autre but encore, celui de servir de vérification aux calculs définitifs.

N° II.

NOMS des SOMMETS.	ANGLES OBSERVÉS.	LOGARITHMES des sinus DES ANGLES	CALCUL des CÔTÉS.	CÔTÉS en mètres.
	g ″			m.
(*S*) **Arc**	57,9203	9,898	*l.* DG 3,573 c. *l.* sin.S 0,403 *l.* sin. D 9,900	,
(*D*) **Notre-Dame**	58,3428	9,900	*l.* S.G 3,576	,
			l. DG + c. *l.* sin.S } 3,676 *l.* sin. G 9,986	
(*G*) **Montmartre**	83,8074	9,986	*l.* SD 3,662	,
	g ″			m.
(*S*)	,	,	*l.* DG , c. *l.* sin. S , *l.* sin. D ,	,
(*D*)	,	,	*l.* S.G ,	,
			l. DG + c. *l.* sin.S } , *l.* sin. G ,	
(*G*)	,	,	*l.* SD	,
	g ″			m.
(*S*)	,	,	*l.* DG , c. *l.* sin. S , *l.* sin. D ,	,
(*D*)	,	,	*l.* S.G	,
			l. DG + c. *l.* sin.S } , log. sin. G ,	
(*G*)	,	,	*l.* SD ,	,

TABLEAU III.

Réductions des angles observés, à l'horizon et au centre, et des distances zénithales aux sommets des signaux.

La réduction à l'horizon n'a lieu que lorsque les angles sont observés avec le cercle répétiteur. Le théodolite les donne tout réduits.

Ces réductions peuvent se calculer au moyen des tables de logarithmes, en se bornant à 3 décimales, ou avec des tables que M. le colonel Puissant a insérées dans son *Traité de géodésie*, sous les numéros 1 et 2. On entre dans la table 1 avec l'angle observé O, et l'on trouve les nombres correspondant aux premiers facteurs des deux termes de la correction, dans les colonnes intitulées *tangentes* et *cotangentes*. La table 2 donne les seconds facteurs, et les arguments sont $200-(\Delta+\Delta')$, et $\Delta-\Delta'$: on multiplie et l'on fait la somme algébrique des deux termes.

On peut encore employer de petites tables donnant les logarithmes des facteurs fournis par les précédentes.

La correction au centre s'effectue au moyen des logarithmes ou d'une table semblable à celle indiquée ci-dessus, et comprise sous le n° 1, dans l'instruction sur la disposition et la tenue des registres de calculs, publiée anciennement par le Dépôt de la guerre.

La réduction des distances zénithales est positive quand dH est positif, c'est-à-dire, lorsque l'observation se fait au-dessous du point de mire ; elle est négative dans le cas contraire.

Quand on calcule les différences de niveau des points du troisième ordre, on ne rapporte pas la distance zénithale au somment du signal : on emploie Δ : mais alors il faut corriger la hauteur obtenue, de la quantité dH, puisque l'on part de la cote du sommet et non de celle du lieu de l'observation. Il faut alors, du résultat obtenu, retrancher dH avec son signe.

On peut aussi calculer de la même manière les points du second ordre : on fait deux calculs différents avec chacune des distances zénithales réciproques non corrigées.

La hauteur dT de la station, au-dessus du sol, obtenue par une mesure directe, fournit la cote d'un point de celui-ci.

STATION A NOTRE-DAME.

NOMS DES OBJETS.	RÉDUCTION A L'HORIZON. $\tang.\frac{O}{2}\sin.1''.\left\{100^g-\left(\frac{\Delta+\Delta'}{2}\right)\right\}^2-$ $-\cotang.\frac{O}{2}\sin.1''\left(\frac{\Delta-\Delta'}{2}\right)^2$	RÉDUCTION AU CENTRE. $C=O+\frac{r.\sin.(O+y)}{d\sin.1''}-\frac{r.\sin.y}{g.\sin.1''}$	RÉDUCTION DES DISTANCES ZÉNITHALES. $\frac{dH}{K.\sin.1''}$
D.—Montmartre. G.—Arc.	Δ = 99^g,22 Δ = 99,04 Δ + Δ′ = 84 | + 14″ Δ − Δ′ = 72 | − 40 Réduction h =, − 26″ dH = + 3,85 dT =	O + y = 91^g,0 | $l.d$ = 3,573 | 1er t^{me} = + 320″ y = 33,0 | $l.g$ = 3,662 | 2e t^{me} = − 129 Réduction C = + 191″ Réduction h = − 26 r = 1^m,90 C + h = + 165″ Angle observé = 58^g,3428 Angle réduit = 58^g,3593	Δ = 99^g,2176 Réduction = + , 604 δ = 99,2780 Δ = 99^g,9376 Réduction = + , 492 δ′ = 99,9768
D.— G.—	Δ′ = ^{g} , Δ′ = , Δ + Δ′ = , | + ″ Δ − Δ′ = , | − , Réduction h =, ″ dH = dT =	O + y = ^{g} , | l.D = , | 1er t^{me} = ″ y = , | l.G = . | 2e t^{me} = Réduction C = Réduction h = r = ^{m} C + h = Angle observé = Angle réduit =	Δ = ^{g} , Réduction = , δ = , Δ′ = ^{g} , Réduction = , δ′ = ,

TABLEAU IV.

Calcul des triangles définitifs.

Les logarithmes des côtés de triangles du premier et du deuxième ordre, c'est-à-dire ceux dont les trois angles ont été observés, se prennent à sept décimales. Cinq suffisent pour les triangles du troisième ordre. On nomme ainsi ceux dans lesquels un angle est conclu : on n'a pas fait station à ce troisième angle. Les points ainsi obtenus doivent être calculés sur deux bases.

La seconde colonne du tableau IV contient les angles réduits au centre et à l'horizon. Si le triangle était rectiligne, et s'il n'y avait pas d'erreur dans les observations, la somme des trois angles devrait être précisément 200^g. La différence que l'on trouvera sera donc due, d'une part, à l'excès sphérique, et de l'autre, aux erreurs de pointé, de lecture et à celle causée par l'imperfection de l'instrument. Si l'on veut savoir avec quel degré de précision l'on a opéré, on calcule à part l'excès sphérique que l'on sait être égal à $\frac{1}{2}\, bc. \frac{\sin. A'}{r.^2 \sin. 1''}$.

En préparant ces calculs, il est bon de transcrire les deux premiers chiffres des logarithmes des sinus, d'après le calcul des triangles provisoires : cela évite de commettre des erreurs, en prenant parfois des cosinus pour des sinus, et réciproquement.

Les triangles doivent fermer à 15″ environ. L'erreur est souvent beaucoup moindre : quelquefois, quand les côtés sont petits, elle peut aller jusqu'à 40″.

On doit trouver la longueur des côtés du second ordre à 2^m près au plus. Pour le troisième ordre, l'erreur va parfois jusqu'à 4^m, rarement cependant.

N° IV.

NOMS des SOMMETS.	ANGLES RÉDUITS.	ANGLES CORRIGÉS.	LOGARITHMES DES SINUS des angles corrigés.	CALCUL des CÔTÉS.	COTÉS en MÈTRES.
(*S*) Arc	57,8994 [g]	57,9000 [g]	9,8971823	*l.* DG 3,5722857 c. *l.* sin. S 0,1028117 *l.* sin. D 9,8996209	3734,96 [m]
(*D*) Notre-Dame	58,3623	58,3628	9,8996209	*l.* S.G 3,5747243 *l.* DG + c. *l.* sin. S 3,6751034 *l.* sin. G 9,9856727	3755,99
(*G*) Montmartre	83,7366	83,7372	9,9856727	*l.* SD 3,6607761	4579,06
	199,9983	200,0000			
	— , 17″	Erreur dont il faut corriger la somme des trois angles en la répartissant par tiers.			

TABLEAU V.

Différences de niveau.

Points du premier et du deuxième ordre.

Les distances zénithales de ces points doivent être rapportées aux sommets des signaux. Les corrections qui sont de la forme $\frac{dH}{K \sin. 1''}$ ont dû être calculées dans la dernière colonne du troisième tableau.

La formule qui détermine les différences de niveau est

$$dN = K. \text{ tang. } \tfrac{1}{2} (\delta' - \delta).$$

δ' et δ représentent ici les distances zénithales corrigées des erreurs de réfraction ; mais comme celle-ci est supposée la même pour les deux observations, il s'ensuit que l'on peut n'en pas tenir compte, puisqu'elle disparaît comme affectée successivement des signes + et —. On suppose ainsi que les observations ont été faites avec le même état atmosphérique, circonstance dont on essaie de se rapprocher autant que possible.

Les logarithmes se prennent avec 5 décimales.

Il faut calculer chaque cote de deux manières au moins. Souvent, on prend la moyenne entre cinq ou six résultats, parce qu'il est nécessaire d'être bien sûr de l'exactitude de cotes qui servent ensuite à déterminer celles des points conclus.

La dernière colonne est destinée à l'inscription des cotes des points correspondants du sol; elles s'obtiennent en retranchant, des résultats précédents, les hauteurs des signaux mesurées directement.

NOMS DES POINTS.	DISTANCES ZÉNITHALES rapportées aux sommets des signaux.	CALCUL DES DIFFÉRENCES DE NIVEAU $dN = K \text{ tang. } \frac{1}{2}(\delta' - \delta)$.	ALTITUDES. DES POINTS de mire.	ALTITUDES. DES SOLS.
NOTRE-DAME. Point dont la hauteur est connue.	$\delta =$ 99,2780 [g]	$\delta' - \delta =$ + 1,4716 [g] $\frac{1}{2}(\delta' - \delta') =$ + 0,7358	N= 106,86 [m]	
		Log. K= 3,57228 Log. tang. $\frac{1}{2}(\delta' - \delta) =$ 8,06289 +		
Montmartre. Point cherché.	$\delta' =$ 100,7496	Log. $dN =$ 1,63517 +	$dN = +$ 43,47	
			N'= 150,03 [m]	
----------	$\delta =$, [g]	$\delta' - \delta =$, [g] $\frac{1}{2}(\delta' - \delta) =$,	N= , [m]	
		Log. K= , Log. tang. $\frac{1}{2}(\delta' - \delta =$,		
----------	$\delta' =$,	Log. $dN =$,	dN= , N'= ,	

TABLEAU VI.

Différence de niveau.

Points du troisième ordre.

Les cotes de ces points se calculent sur deux bases. Quelquefois cependant la nature du terrain force à en admettre quelques-uns sur lesquels on n'a pu prendre qu'une distance zénithale, et qui, néanmoins, ne peuvent être rejetés comme indispensables au nivellement topographique.

Ces cotes se déterminent au moyen d'une seule distance zénithale. Le tableau V peut également servir pour les points de station, et c'est dans ce cas seulement qu'on emploie les parties inférieures de la seconde colonne, en alternant de place la station et le point visé. Dans ce cas, les résultats du calcul doivent être pris d'un signe contraire à celui qu'on aurait dû prendre dans le premier cas, le plus ordinaire en géodésie.

Le signe du premier terme dépend de celui de la cotangente qui est positive, lorsque $\Delta < 100^g$, et négative dans le cas contraire.

Le second terme qui donne la correction relative à la forme de la terre et à la réfraction, est toujours positif dans la formule : on le calcule fort simplement en ajoutant le double du logarithme de K à celui de la constante q, et en retranchant de la caractéristique le nombre 10 qui, pour la facilité de l'inscription, a été ajouté au logarithme de $q = \log. \frac{0,42}{R} = \log. \frac{0,42}{6366000}$. On peut encore le trouver directement dans les tables publiées, il y a quelques années, par le Dépôt de la guerre, et destinées à faciliter le calcul des différences de niveau dans les opérations topographiques.

Il est inutile de réduire la distance zénithale au sommet du signal. On retranche du résultat obtenu par l'emploi de la distance observée, le dH mesuré directement auquel on a supposé le signe + lorsque l'instrument a été placé au-dessous de la station vraie.

N° VI.

NOMS des OBJETS.	ÉLÉMENTS du CALCUL	DIFFÉRENCES DE NIVEAU : $dN = K. \text{cotang.} \Delta + q K^2$, log. $q = 2{,}81869$.			HAUTEURS ABSOLUES des points de mire.	HAUTEURS ABSOLUES des sols.
NOTRE-DAME. Station.	$\Delta =$ 99^g,9376 $dH = +$ 3^m,85 $dT =$,	Log. K = 3,66075 Log. cot. $\Delta =$ 6,99128	2 log. K = 7,321 Log. $q =$ 2,819	1er t^{me} = + 4^m,48 2e t^{me} = + 1,38	N = 106^m,86	
		Log. 1re t^{me} = 0,65203	Log. 2e t^{me} = 0,140	$dn = +$ 5,86 $dH = -$ 3,85	$dN = +$ 2,01	
Arc. Point visé.	$\Delta' =$, $dH' =$, $dT' =$,			$dN = +$ 2,01	N′ 108,87	
ARC. Point visé.	$\Delta =$, $dH =$ ^{m} $dT =$,	Log. K = 3,66075 Log cot. $\Delta =$ 6,99128	2 log. K = 7,321 Log. $q =$ 2.819	1er t^{me} = + 4^m,48 2e t^{me} = + 1,38	N = 108^m,87	
		Log. 1er t^{me} = 0,65203	Log. 2e t^{me} = 0,140	$dn = +$ 5,86 $dH = -$ 3,85	$dN = -$ 2,01	
Notre-Dame. Station.	$\Delta' =$ 99^g,9376 $dH' = +$ 3^m,85 $dT' =$,			$dN = +$ 2,01	N′ = 106,86	

TABLEAU VII.

Latitudes, longitudes, azimuts.

Les formules sont :

$$L' = L - K \frac{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}{a \sin. 1''} (1 + e^2 \cos.^2 L) \cos. z +$$

$$+ \tfrac{1}{2} K \frac{^2(1 - e^2 \sin.^2 L)}{a^2 \sin. 1''} (1 + e^2 \cos.^2 L) \text{ tang. } L \sin.^2 z$$

$$M' = M + K \frac{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}{a \sin. 1''} \sin. z \sec. L'$$

$$z' = 200^g + z - (M' - M) \sin. \tfrac{1}{2} (L + L')$$

On a fait, par abréviation,

$$P = \frac{(1 - e^2 \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}{a \sin. 1''} (1 + e^2 \cos.^2 L)$$

$$Q = \tfrac{1}{2} \frac{(1 - e^2 \sin.^2 L)}{a^2 \sin. 1''} (1 + e^2 \cos.^2 L) \text{ tang. } L \qquad R = \frac{(1 - e \sin.^2 L)^{\frac{1}{2}}}{a \sin. 1''}$$

Ces expressions ne renfermant pas d'autre variable que la latitude L, du point de départ, on a construit des tables donnant de suite P, Q, R : l'argument est L. Pour le premier et le second ordre, on prend les logarithmes de P et R à 7 décimales, et celui de Q à 5. Pour le troisième ordre, on calcule le premier terme de la latitude à 5, le second à 3, et la longitude à 5.

Les azimuts ne se calculent que pour les points du premier et du deuxième ordre; ils n'auraient aucun but pour les points conclus. Ils se comptent de 0^g à 400^g, l'origine au sud, en remontant au nord par l'ouest, et en revenant au sud par l'est.

Les latitudes et longitudes se calculent sur deux points de départ, afin d'éviter les erreurs.

On inscrit toujours ce double calcul en commençant par l'objet de droite, parce qu'alors, pour former les azimuts des côtés qui aboutissent au point cherché pris avec les méridiens des points connus, la règle des signes devenant constante, on n'a pas besoin d'avoir recours au canevas. On se rappellera, en effet, que nous avons vu, au § 110, que pour former l'azimut d'un côté au méridien du point connu, il suffit de prendre les deux azimuts du côté qui joint les deux points connus, aux méridiens de ces deux points, et de leur retrancher ou leur ajouter l'angle correspondant du triangle, suivant que le point connu est celui de droite ou celui de gauche par rapport au point inconnu.

Le calcul double des latitudes et longitudes doit conduire à des résultats identiques, à une unité près seulement du dernier ordre décimal employé. Le calcul se fait jusqu'aux centièmes de secondes qui répondant moyennement aux décimètres sont nécessaires pour que le point soit précisé à un mètre près. L'identité des résultats contrôle seulement l'exactitude du calcul et non celle des observations.

La vérification du calcul des azimuts se trouve dans ce fait, que la différence des azimuts de deux côtés au méridien d'un même point, doit représenter le troisième des angles du triangle dont les deux premiers ont été employés dans la formation ci-dessus indiquée.

***Extrait de la table des facteurs* P, Q, R.**

Latitude	Log. P.	Log. Q.	Log. R.	Latitude	Log P.	Log. Q.	Log. R.
49°0				52.6	8.9997920	1.92890	8.9985037
1				7	7854	3026	5015
2				8	7787	3162	4992
3				9	7721	3298	4970
4				53.0	7655	3434	4948
5				1	7589	3570	4926
6				2	7524	3707	4904
7				3	7458	3843	4882
8				4	7393	3980	4860
9				5	7327	4116	4838
50.0	8.9999638	1.89364	8.9985612	6	7261	4252	4816
1	9572	9497	5590	7	7196	4389	4794
2	9506	9632	5568	8	7130	4525	4772
3	9449	9768	5546	9	7065	4662	4750
4	9374	9903	5524	54.0	6999	4798	4728
5	9307	1.90039	5502	1	6934	4935	4706
6	9241	0175	5479	2	6868	5072	4684
7	9175	0310	5457	3	6803	5209	4662
8	9109	0446	5435	4	6737	5346	4640
9	9043	0581	5413	5	6672	5483	4619
51.0	8977	0717	5391	6	6606	5620	4597
1	8911	0853	5369	7	6541	5757	4575
2	8845	0988	5347	8	6475	5894	4553
3	8779	1124	5325	9	6409	6031	4531
4	8713	1260	5303	55.0	6344	6168	4509
5	8647	1396	5280	1	6279	6306	4487
6	8581	1531	5258	2	6214	6443	4465
7	8515	1667	5236	3	6148	6581	4444
8	8449	1803	5214	4	6083	6718	4422
9	8383	1938	5192	5	6018	6856	4400
52.0	8317	2074	5170	6	5953	6994	4378
1	8251	2210	5148	7	5888	7131	4356
2	8185	2346	5126	8	5822	7269	4335
3	8118	2482	5103	9	5757	7406	4313
4	8052	2618	5081	56.0	5692	7544	4291
5	7986	2754	5059	1			

Table donnant la valeur du second terme dans la formule de la latitude, celle-ci étant supposée avoir une valeur moyenne de 50ᵍ.

Le second terme de la formule, au moyen de laquelle on calcule les latitudes, peut, sans employer les logarithmes, se trouver immédiatement dans la table ci-dessous.

Elle a pour entrée l'azimut de 10 en 10 grades, et le côté K, depuis 3,000 jusqu'à 10,000 mètres.

Au-dessous de 3,000ᵐ de côté ou de 20ᵍ d'azimut, le terme est négligeable. On retranche 200ᵍ de l'azimut, lorsque l'expression de son amplitude est plus grande que ce nombre.

Côté K	3	4	5	6	7	8	9	10	Kilomètres.
Z = 20ᵍ	0.007	0.012	0.019	0.027	0.037	0.048	0.068	0.075	Z = 180ᵍ
30	0.015	0.026	0.040	0.058	0.079	0.103	0.131	0.161	170
40	0.024	0.043	0.068	0.097	0.133	0.173	0.219	0.270	160
50	0.035	0.063	0.098	0.141	0.192	0.251	0.296	0.391	150
60	0.046	0.082	0.128	0.184	0.251	0.328	0.415	0.512	140
70	0.056	0.099	0.155	0.224	8.305	0.393	0.503	0.621	130
80	0.064	0.113	0.177	0.255	0.347	0.453	0.573	0.708	120
90	0.069	0.122	0.191	0.275	0.374	0.489	0.619	0.764	110
100	0.070	0.125	0.196	0.282	0.384	0.501	0.634	0.783	100

N° 11.

NOMS des POINTS.	LATITUDES. $L' = L - P.K. \cos. Z - Q.K.^2 \sin.^2 Z$		LONGITUDES. $M' = M + R.K. \sin. Z. \text{séc. } L'$	AZIMUTS. $Z' = 200^g + Z - d.M. \sin. \frac{1}{2}(L+L')$
NOTRE-DAME.	Lat. L = 54g,2822,76″		Long. M = − 0g,0441,35″	Az. Z = 432g,9936,35″
	Log. P = 8,9996848 −	Log. Q = 1,95482 −	Log. R. = 8,9984700 +	z = 494,3569,35
	Log. K = 3,6607500	2. Log. K = 7,32150	Log. K. = 3,6607500	− 58,3613
	Log. cos. Z 9,6949353 −	2 l. sin. Z = 9,87771	Log. sin. Z. = 9,9388527 +	
			Cl. cos. L′ 0,1819644	L. sin. $\frac{L+L'}{2}$ = 9,8768832 −
	L. 1er tme = 2,3553871 +	L. 2e tme 9,15103	Log. d M. 2,7800371 +	L d′ M = 2,7800371 +
	1er tme = + 226″,67			
	2e tme = − 0,14			Log. d. Z = 2,6569203 −
	dL = + 226″,53	L + L′ = 108g,5872″,05	d M = + 602″,61	d Z = − 453″,86
	L = 54,2822,76		M = − 0g,0441,35	200 + Z = 332,9936,35
Arc.	Lat. L′ = 54,3049″,29	$\frac{L+L'}{2}$ = 54g,2936,02	Long. M′ = + 0g,0461,26	Az. Z′ = 332,9502,49
MONTMARTRE.	Lat. L = 54g,3492,54″		Long. M = − 0g,0064,74″	Az. Z. = 75g,0867,65″
	Log. P = 8,9996781 −	Log. Q = 1,95249 −	Log. R. = 8,9984681 +	z = 394,3514,65
	Log. K 3,5746932	2 Log. K 7,14939	Log. K. = 3,5746933	+ 83,7356
	Log. cos. Z 9,5844079 +	2 l sin. Z 9,93472	Log. sin. Z = 9,9658601 +	
			Cl. cos. Z = 0,1819644	L. sin. $\frac{L+L'}{2}$ = 9,8769939 −
	L. 1er tme 2,1557792 −	L. 2e tme 9,03330	Log. d M. 2,7209858 +	Log. d′ M = 2,7209858 +
	1er tme = − 143″,15			
	2e tme = − 0,11			Log. d Z = 2,5979787 −
	dL = − 143″,26	L + L′ = 108g,6241″,82	d M = + 526″,00	d Z = − 396,26
	L = 54,3192,54		M = − 0g,0064,74	200 + Z = 275,0867,65
Arc.	Lat. L′ = 54,3049″,28	$\frac{L+L'}{2}$ = 54,3120,94	Long. M′. = + 0,0461,26	Az. Z′ = 275,0471,39

Tableau des coordonnées géographiques.

DÉSIGNATION DES POINTS.	LATITUDES.	LONGITUDES.	CROQUIS des signaux.	LATITUDES des points de mire.	LATITUDES des sols.
	g	g		m	
Invalides.—St de la boule.	54,2840″80	+ 0,0266″80		435,9	
Notre-Dame.—St tourelle—tour N.	54,2822″76	— 0,0444″35		406,9	
Montmartre.—Axe de la tour—plate-forme.	54,3192″54	— 0,0064″74		430,0	
Arc de Triomphe.—Axe—plate-forme.	54,3049″29	+ 0,0461″27		409,4	

N° IX.

Détermination du temps par les distances zénithales absolues du soleil ou des étoiles.

OBSERVATION DE α DE L'AIGLE FAITE LE 22 JUIN 1831.

Calcul du temps sidéral approché, $\sin. \frac{1}{2}\pi = \sqrt{\frac{\sin. R. \sin. R'}{\cos. D \cos. L}}$,

$$P \text{ en temps sidéral} = \frac{\pi}{15} - \left(\cot. \pi - \frac{\cot. \delta \cos. D \cos. L \sin. \pi}{\sin. \delta}\right)\frac{1}{15n}\Sigma\frac{2\sin.^2 \frac{1}{2} p}{\sin. 1''}$$

	TEMPS de la pendule.	ANGLES horaires p.	RÉDUCTIONS à l'époque moyenne.	OBSERVATIONS météorologiques et remarques.
1	16h 3m 48s 0	5m 40s	66″8	Baromètre 0m,7232
2	4 54 2	4 44	44 0	
3	5 52 4	3 45	27 6	Thermomètre + 22°,0
4	6 50 0	2 48	15 4	centigrade.
5	8 10 6	1 27	4 1	
6	9 10 0	0 28	0 4	Moyenne des distances
7	10 8 0	0 30	0 5	zénithales 58° 59′ 38″,22
8	10 57 0	1 19	3 4	
9	12 7 0	2 29	12 1	
10	13 1 2	3 23	22 5	
11	14 32 0	4 54	47 1	
12	16 4 0	6 26	81 3	

Époque moyenne	Somme des réductions
16h 9m 37s,87	Σ = 325,2

Latitude approchée du lieu, L.	46° 46′ 37″
Longitude en temps (orientale).	0h 12m 58s
Déclinaison apparente de l'étoile, D.	8° 25′ 48″,39
Ascension droite apparente, en temps, Æ. . .	19h 42m 34s,22
Distance zénithale moyenne, ẟ.	58° 59′ 38″,22
Époque moyenne en temps de la pendule. . . .	16h 9m 37s,87

L'angle horaire est négatif avant le passage au méridien.

L'état de la pendule est précédé du signe + lorsqu'il désigne une avance.

Les variations horaires p, s'obtiennent en retranchant l'époque moyenne des temps observés à la pendule.

Des tables de Puissant et de Francœur permettent de calculer les réductions correspondantes.

Suite du N° IX.

Détermination du temps par les distances zénithales absolues du soleil et des étoiles.

Facteur barométrique.	log. =	9.9784
Facteur thermométrique.	log. =	9.9806
Produit.	log. =	9.9590
Réfraction moyenne.	log. =	1.9852
Produit.	log. =	1.9442
Réfraction vraie.	=	+ 0° 1′ 27″,94
Distance zénithale moyenne	δ′ =	58 59 38 ,22
Erreur de l'instrument	+	5 ,51
Distance zénithale vraie	δ =	59° 1′ 11″,67
Distance polaire de l'étoile. . .	90°—D =	81 34 10, 61
Complément de la latitude. . .	90°—L =	43 12 23
Somme.	S =	183° 47′45″,28

$\frac{1}{2}s$ = 91°53′52″,64	$\frac{1}{2}s$ = 91°53′52″,64
90°—D = 81 34 10, 61	90°—L = 43 12 23
Différence R = 10°19′42″,03	Différence R′ = 48°41′29″,64

Calcul de π.

Log. sin. R	=	9,2535533
Log. sin. R′	=	9,8757365
C. log. cos. D	=	0,0047182
C. log. cos. δ	=	0,1645454
2 log. sin. $\frac{1}{2}$ π	=	19,2985534
Log. sin. $\frac{1}{2}$ π	=	9,6492765
$\frac{1}{2}$ π	=	26°29′0″,6
π	=	52 58 1, 2
En temps $\frac{\pi}{15}$	=	3h 31′52″,08

Correction de π.

Log. cot. π	=	9,87764—
1er terme.	=	0,7545 —
Log. sin. π	=	9,90216
Log. cos. D	=	9,99528
Log. cos. L	=	9,83546
Ct log. sin. δ	=	0,06685
Log. cot. δ	=	9,77844
Log. 2e terme	=	9,57819
2e terme	=	0,3786
1er terme	=	0,7545 —
Facteur	=	0,3759 —
Log. facteur	=	9,57507—
Ct log. 15 *n*	=	7,74473
Log. Σ	=	2,51215
Log. *d* π	=	9,93195—
d π	=	— 0″,68

π	=	3h 31m 52s,07
d π	=	— 0 ,68
Angle horaire P	=	3h 31m 51s,40
Asc. droite Æ	=	19 42 34 ,22
Temps sidéral	=	16h 10m 42s,82

Temps sidéral de l'obs.	=	16h 10m 42s,82
Temps de la pendule	=	16 9 37 ,87
État de la pendule	=	— 0h 1m 4s,95

N° X.

Détermination de la latitude par l'observation du soleil près du méridien.

OBSERVATION DU SOLEIL FAITE LE 12 DÉCEMBRE 1813 AU DÉPOT DE LA GUERRE.

$$L = D - \delta + \frac{\cos. D \cos. L'}{\sin. \delta} \cdot \frac{1 + 2\rho,}{n} \Sigma \frac{2 \sin.^2 \frac{1}{2} P}{\sin. 1''}$$

P en temps sidéral = T − (Æ + α), P en temps moyen = t − (éq. temps + α)

	TEMPS moyen de la pendule.	ANGLES horaires.	RÉDUCTIONS au méridien.	REMARQUES.
1	11h 49m 22s	5m 03s	50″,1	Baromètre = 7m,76185
2	50 20	3 55	30 ,1	Thermomètre = +2°.(R.),
3	51 38	2 37	13 ,4	
4	52 58	1 17	3 ,2	Angle parc. = 1438g,8336
5	54 32	− 0 17	0 ,2	—
6	55 48	− 1 43	5 ,8	
7	57 20	− 3 05	18 ,7	Distance zénithale moyenne
8	58 32	− 4 17	36 ,0	= 79g,9352
9	59 46	− 5 31	59 ,8	ou 71° 56′ 30″,05
10	12 1 7	− 6 52	92 ,6	—
11	3 4	− 8 49	152 ,6	Hauteur apparente du ☉
12	3 56	− 9 41	184 ,1	= 18° 3′ 29″,95
13	6 25	− 12 10	290 ,6	—
14	8 16	− 14 01	385 ,6	
15	10 11	− 15 56	498 ,2	Angle horaire moyen
16	11 33	− 17 18	587 ,6	= − 6′ 57″ 39
17	12 46	− 18 31	673 ,2	Lat. approch. = 48° 51′ 10″
18	14 9	− 19 54	776 ,6	Long. approch. = + 4″
		125m 13s	3859,1 = Σ	

On doit prendre α positif, lorsqu'il désigne une avance de la pendule.

Si ρ (qui doit être exprimé en secondes) désigne une avance, il faut le faire négatif.

Lorsqu'on observe un passage supérieur, la réduction au méridien est toujours négative ; c'est le contraire pour un passage inférieur (cette observation ne se rapporte évidemment qu'à l'observation d'une étoile).

Les réductions au méridien se calculent facilement avec les tables de Puissant ou de Francœur.

Suite du N° X.

Détermination de la latitude par l'observation du soleil près du méridien.

Temps moyen le 12, ou équation du temps	11h 53m 57s,7
Avance α de la pendule sur le temps moyen	17s
Temps de la pendule lors du passage au méridien	11h 54m 14s,7
Avance diurne de la pendule	$\rho = -\ 7^s$
$\dfrac{\rho}{86400-\rho} = \dfrac{-7}{86407}$	$= \rho' = -\ 0{,}0000810$
	$1 + 2\rho' = 0{,}9998370$
Latitude approchée du lieu d'observation	= 48° 51′ 40″
Déclinaison australe le 12 à midi moyen de Paris	= 23° 5′ 44″
Variation en D pour 6m 6s,3	— 1″,26
Différence entre L et — D ou D + L	71° 57′ 22″,74
Distance zénithale moyenne observée	71° 56′ 30″,058
Réfraction	+ 3′ 2″,685
Parallaxe	— 8″,220
Distance zénithale vraie	71° 59′ 24″,513
log. $(1 + 2\rho')$	9,99983
log. Σ	3,58652
Ct. log. (18 = n)	8,74473
log. cos. L	9,81815
log. cos. D	9,96371
Ct. log. sin. (D + L) ou δ approchée	0,02190
log. x	= 2,13484
x ou réduction au méridien	= — 0° 2′ 16″, 11
Distance zénithale vraie	= 71° 59′ 24″,513
Distance zénithale méridienne	71° 57′ 08″,403
Déclinaison apparente du soleil	23° 5′ 42″, 74
Latitude cherchée	= 48° 51′ 25″,263
Le 13 décembre, par des opérations analogues	48° 51′ 29″, 10
Le 14 id. id.	48° 51′ 32″, 17
La moyenne des trois donne	L = 48° 51′ 28″,878

N° XI.

Détermination de la latitude par l'observation de l'étoile polaire.

DISTANCE ZÉNITHALE DE LA POLAIRE OBSERVÉE LE 22 JUIN 1831.

$$L = 90^\circ - \delta - d \cos. P + \tfrac{1}{2} d^2 \cot. \delta \sin.^2 P \sin. 1'' +$$
$$(1 + 2\rho') \left\{ d \cos. P. \sin. 1'' + d^2 \cot. \delta \cos. 2P \sin.^2 1'' \right\} \frac{1}{n} \Sigma \frac{2 \sin.^2 \frac{1}{2} p}{\sin. 1''}$$

	TEMPS de la pendule.	ANGLES horaires.	RÉDUCTION à l'époque moyenne.	OBSERVATIONS
1	16h 27m 8s	11m 15s	248″,5	Baromètre = 0m,7282
2	28 8	10 15	206 ,3	
3	29 5	9 18	169 ,8	
4	29 55	8 28	140 ,7	Therm. centig. = 21°,6
5	30 52	7 31	110 ,9	
6	31 40	6 43	88 ,6	
7	32 50	5 33	60 ,5	Angle parcouru = 1176s,654
8	33 49	4 34	40 ,9	
9	34 45	3 38	25 ,9	
10	35 42	2 41	14 ,1	Distance zénithale
11	36 37	1 46	6 ,1	moyenne = 44° 7′ 28″,29
12	37 25	0 58	1 ,8	
13	38 24	0 1	0 ,0	
14	49 15	0 52	1 ,5	
15	40 39	2 16	10 ,1	
16	41 58	3 35	25 ,2	
17	42 57	4 34	40 ,9	
18	43 59	5 36	61 ,6	
19	45 7	6 44	89 ,0	
20	45 57	7 34	112 ,4	
21	46 52	8 33	143 ,5	
22	48 2	9 39	182 ,8	
23	49 4	10 41	224 ,1	
24	50 2	11 39	266 ,4	
Somme des réductions, $\Sigma = 2274{,}6$, $\frac{\Sigma}{n} = 94{,}65$				

Si ρ (qui doit être exprimé en secondes) désigne une avance, il faut le faire négatif.

L'époque moyenne est égale à la somme des temps de la pendule, divisée par le nombre des observations.

Les angles horaires sont les différences entre l'époque moyenne et chacun des temps de la pendule, différences que l'on prend, sans avoir égard à leurs signes.

Les réductions à l'époque moyenne peuvent être prises dans la table X de l'*Astronomie pratique* de Francœur.

Suite du n° XI.

Détermination de la latitude par l'observation de l'étoile polaire.

Époque moyenne en temps de la pendule	=	16h 38m 23s,17
Correction de la pendule	= +	1′ 4″,91
Heure du milieu de l'observation en temps sidéral T	=	16h 39m 28s,08
Ascension droite apparente de l'astre Æ	=	59′ 57″,12
Angle horaire (T — Æ ou Æ — T) en temps	=	8h 20m 29s,04
Angle horaire en degrés P	=	125° 7′ 15″,6
Distance polaire apparente de l'astre d	=	1° 35′ 49″,02
	=	57 49″,02
Retard diurne de la pendule sur le temps sidéral ρ	=	4″,89
$\frac{\rho}{86400-\rho}$ =. . . ρ′	=	0,000056
1 + 2ρ′	=	1,000112
Distance zénithale observée	=	44° 7′ 28″,29
Réfraction	= +	51 ,46
Distance zénithale vraie δ	=	44° 8′ 19″,75

Log. d	=	3,7595938—	Log. 1 + 2 ρ′	=	0,00005
Log. cos. P	=	9,7598982—	Log. d cos. P	=	3,51949
			Log. sin. 1″	=	4,68557
Log. 1er terme	=	3,5194920+	Log. $\frac{\Sigma}{n}$	=	1,97612
Log. d	=	3,75959			
Log. sin. P	=	9,91272	Log. 1er terme parenth.	=	0,18123
Log. d sin. P	=	3,67231	Log. 1 + 2 ρ′	=	0,00005
Log. d sin. P	=	3,67231	2 log. d	=	7,51918
Log. ½ sin. 1″	=	4,38454	Log. cos. 2 P	=	9,52898
Log. cotang. δ	=	0,01306	Log. cot. δ	=	0,01306
			2 log. sin. 1″	=	9,37114
Log. 2e terme	=	1,74222	Log. $\frac{\Sigma}{n}$	=	1,97612
			Log. 2e terme parenth.	=	8,40853

1er terme	= +	3307″,44	90° — δ	=	45° 51′ 40″,25
2e terme	= +	55, 24	Correction	= +	56′ 1″,43
Parenthèse 1er terme	=	1,518	Latitude	=	46° 47′ 41″,38
Parenthèse 2e terme	= —	0,026			
Correction	=	+ 3361″,13 ou + 56′ 1″,43			

N° XII.

Détermination de la longitude par la distance du soleil à la lune.

Observation faite le 24 juin 1851, à $7^h\,15^m\,00^s$ temps civil moyen.
ou le 23 juin , à $19^h\,15^m\,00^s$ temps astronomique moyen.

Distance angulaire apparente des bords voisins 59°,45′12″

Hauteur apparente du bord inférieur ☉ = 50° 15′ 25″
Demi-diamètre apparent ☉ = + 0° 15′ 45″,60

Hauteur apparente du centre ☉ = 50° 31′ 10″,60 = h'

Hauteur apparente du bord supérieur ☾ = 36° 25′ 10″
Longitude occidentale approchée 70°
Heure correspondante approchée de Paris 24^h ou 0^h le 24 juin.
Demi-diamètre apparent horizontal ☾ à cette époque 15′ 10″,5
Correction + 3,67 sin. H d^2 sin. 1′ = + 11″,3
Demi-diamètre apparent de hauteur ☾ = 15′ 21″,8
Hauteur apparente du centre ☾ = 36° 25′ 10″ − 15′ 21″,8 = 36° 6′ 13″,2 = h

Distance angulaire apparente des centres ☉ et ☾

$D' = 59°\ 45'\ 12'' + 0°\ 15'\ 45'',60 + 15'\ 21'',8 = 60°\ 19'\ 54'',4$

Baromètre $0^m,741$ Thermomètre centigrade + 9° 25
Réfraction ☉, $r' = 47'',05$ Réfraction ☾, $r = 1'\ 18'',08$
Parallaxe de hauteur ☉ $p' = 5'',66$
Parallaxe horizontale ☾ . . . 55′ 56″,2
Parallaxe de hauteur ☾ $p = 55'\ 66'',2 \times \cos.\ h = 44'\ 58'',57$

Hauteur vraie ☉ $H' = h' + p' - r' = 50°\ 30'\ 29'',21$
. . . . ☾ $H = h + p - r = 36°\ 49'\ 59'',69$

$h = 36°\ 6'\ 13,''2$	$H + H' = 87°\ 20'\ 23'',90$
$h' = 50°\ 31'\ 10'',6$	$\frac{H + H_{\prime}}{2} = 43°\ 40'\ 11'',95$
$D' = 60°\ 19'\ 54'',4$	
$h + h' + D' = 146°\ 57'\ 18'',2$	$\frac{h + h' + D'}{2} = 73°\ 28'\ 39'',1$
$h + h' - D' = 26°\ 17'\ 29'',4$	$\frac{h + h' - D'}{2} = 13°\ 8'\ 44'',7$

Détermination de la longitude par la distance du soleil à la lune.

$$\sin.^2 \varphi = \frac{\cos.\ H.\ \cos.\ H'}{\cos.\ h\ \ \cos.\ h'} \cdot \frac{\cos.\ \frac{1}{2}(h + h' + D')\ \cos.\ \frac{1}{2}(h + h' - D')}{\cos.^2 \frac{1}{2}(H + H')}$$

$$\sin.\ \tfrac{1}{2} D = \cos.\ \tfrac{1}{2}(H + H')\ \cos.\ \varphi$$

$\log.\ \cos.\ H = \log.\ \cos.\ 36°\ 49'\ 53'',69 = +\ 9,9033235$
$\log.\ \cos.\ H' = \log.\ \cos.\ 50°\ 30'\ 29'',21 = +\ 9,8034359$
$\log.\ \cos.\ h = \log.\ \cos.\ 36°\ 6'\ 13'',20 = -\ 9,9073857$
$\log.\ \cos.\ h' = \log.\ \cos.\ 56°\ 31'\ 10'',60 = -\ 9,8033302$

$+\ \bar{1},9960435$
$\log.\cos.\frac{1}{2}(h + h' + D') = \log.\ \cos.\ 73°\ 28'\ 39'',10 = +\ 9,4539163$
$\log\ \cos.\frac{1}{2}(h + h' - D') = \log.\ \cos.\ 13°\ 8'\ 44'',70 = +\ 9,9884674$
$2\ \log.\ \cos.\frac{1}{2}(H + H') = 2\ \log.\ \cos.\ 43°\ 40'\ 11'',95 = -\ 19,7186715$

$2\ \log.\ \sin.\ \varphi \ldots\ldots = \bar{1},7197558$
$\log.\ \sin.\ \varphi \ldots\ldots = 9,8598779$
$\varphi \ldots\ldots = 46°\ 24'\ 12'',50$

$\log.\ \cos.\ \frac{1}{2}(H + H') = 9,8593357$
$\log.\ \cos.\ \varphi = +\ 9,8385820$
$\log.\ \sin.\ \frac{1}{2} D = 9,6979177$

$\frac{1}{2} D = 29°\ 55'\ 12'',10$
$D = 59°\ 50'\ 24'',20$

A Paris, la distance angulaire est à 21 h. . . . . 60° 58' 00''
— à 24 h. . . . . 59° 31' 30''
Différence pour 3 h. ou 10800ˢ . . . . 1° 26' 30''

L'observation de la distance angulaire vraie D = 59° 50' 24'',20 répond à

$$\text{à une heure de Paris} = 21\ \text{h.} + \frac{(60°\ 58'\ 00'' - 59°\ 50'\ 24'',2)\ .\ 10800^s}{1°\ 26'\ 30''}$$

$\log.\ 10800 = 4,0334238$
$\log.\ 4055,8 = +\ 3,6080765$
$\log.\ 5190 = -\ 3,7151674$
$\log.\ x = 3,9263329$
$x = 8439^s,81$
$= 2^h\ 20^m\ 39^s,8$

$$= 21^h + \frac{10800^s.4055,8}{5190} = 21^h + x^s$$

Heure de Paris $= 2^h\ 20^m\ 39^s,8$
$+\ 21^h$
$= 23^h\ 20^m\ 39^s,8$
Heure du lieu $= 19^h\ 15^m\ 00^s$
Différence de temps $= 4^h\ 5^m\ 39^s,8$

Longitude occidentale du lieu de l'observation =
$= 4^h\ 5^m\ 39^s,80 \times 15 = 61°\ 24'\ 57''$.

N° XIII

Azimut déduit des observations du soleil.

Azimut de la flèche de l'Abbaye, calculé au moyen d'une observation du soleil, faite au Dépôt de la guerre, le 11 décembre 1813, après-midi.

TEMPS DE LA PENDULE (moyen.)	
1	3h 23m 40s,
2	24 23 ,
3	25 4 ,5
4	25 43 ,
5	26 22 ,5
6	27 11 ,

Époque moyenne	=	3h 25m 21s,33
Avance de la pendule	=	17s,13
Temps moyen de l'observation	=	3h 25m 4s,20
Équation du temps	=	6m 26s,23
Temps vrai de l'observation	=	3h 31m 30s,43
Angle horaire { en temps		3h 31m 30s,43
Angle horaire { en degrés, P	=	52° 52′ 36″,42

Angle parcouru = 666g,64

Angle observé K = 111g,407 ou = 99° 59′ 45″,6.

Latitude du lieu = 48° 51′ 28″.

Longitude (0) = 4″.

Distance zénithale apparente de la flèche δ′ = 87° 45′ 48″,60

Baromètre = 0m,7662.

Thermomètre (R.) = 2°,8 ou 3°,36 centig.

L'astre est à l'ouest de la flèche.

D. ⊙, à midi	=	23° 0′ 59″	
Correction	=	41″,86	
D. ⊙ lors de l'observation	=	23° 1′ 40″,86	
Complt D. ⊙ (Parce que la déclinaison est australe)	=	113° 1′ 40″,86	
Colatitude	=	41° 8′ 32″	
Ct. D − Ct. L	=	71° 53′ 8″,86	
Ct. D + Ct. L	=	154° 10′ 12″,86	
½ (Ct. D − Ct. L)	=	35° 56′ 34″,43	(1)
½ (Ct. D + Ct. L)	=	77° 5′ 6″,43	(2)
½ P	=	26° 26′ 18″,22	

Azimut, déduit des observations du soleil (suite).

log. cot. ½ P = 0.3034341	log. cot. ½ P = 0.3034341
log. cos. ½ (1) = 9.9082749	log. sin. ½ (1) = 9.7686223
C log. cos. ½ (2) = 0.6506161	Ct. log. sin. ½ (2) = 0.0441276
log. tang. ½ (Z+S) = 0.8623224	log. tang. ½ (Z−S) = 0.0831840
½ (Z+S) = 82° 10′ 55″,34	½ (Z−S) = 50° 27′ 14″,10

Supplément de l'azimut du soleil, et Z = 132° 38′ 9″,44

Azimut occ. compté du Sud = 47° 21′ 50″,56

log. cos. D = 9.96394	Réfrac. moy. pour 3° 53′ 10″ = 12′ 18″,7
log. sin. P = 9.90164	Produit des fact. bar. et therm. = 1,033
Ct. log. sin. Z = 0.13342	
log. sin. Δ = 9.99900	Réfraction vraie 763″,08
	ou 12′ 43″,08
Δ vrai ⊙ = 86° 6′ 50″	Δ ⊙ = 86° 6′ 50″
H vrai ⊙ = 3° 53′ 10″	Réfraction vraie — 12′ 43″,08
	Parallaxe = + 8″,59
Δ′ ⊙ = 85° 44′ 15″,51	Δ′ apparent ⊙ = 85° 44′ 15″,51
δ′ flèche = 87° 45′ 48″,60	
K = 99° 59′ 45″,60	
2 S = 273° 29′ 49″,71	log. sin. S = 9.83582
S = 136° 44′ 54″,85	log. sin. (S − K) = 9.77686
S − K = 36° 45′ 9″,25	Ct. log. δ′ = 0.00033
	Ct. log. Δ′ = 0.00124
α = 100° 12′ 00″	2 log. cos. ½ α = 19.60432
360° − α = 259° 48′ 00″	log. cos. ½ α = 9.80716
Azimut ⊙ = 47° 21′ 50″,56	
	½ α = 50° 6′ 00″
Azimut cherché = 307° 9′ 50″,56	K réduit à l'horizon = α = 100° 12′ 00″

N° XIV.

Azimut déduit des observations de l'étoile polaire.

$$\text{Az. Étoile} = d \sin. P \sec. L + d^2\gamma \sin. P \cos. P + d^3\delta \sin. P \cos.^2 P - d^3\varepsilon \sin. P$$
$$- d \sin P \sec. L \sin. 1''. \frac{1}{n} \Sigma \frac{2 \sin.^2 \frac{1}{2} p}{\sin. 1''}.$$

$$\gamma = \frac{\text{tang. } L}{\cos. L} \sin. 1'' \qquad \delta = \frac{1 + 4 \text{ tang.}^2 L}{\cos. L} \frac{\sin.^2 1''}{3} \qquad \varepsilon = \frac{\text{tang.}^2 L}{\cos. L} \frac{\sin.^2 1''}{3}$$

Les facteurs γ, δ, ε s'obtiennent au moyen de la table 18 du 2e vol. de la *Géodésie* de Puissant, ou de celle de la page 457 du 5e vol. du *Mémorial du Dépôt de la guerre*. Ils peuvent à la rigueur s'obtenir par un calcul direct.

OBSERVATIONS DU 22 JUIN.

	TEMPS de la pendule	Différences p	Réductions à l'époque moyenne.
1	17h 40′ 2″	12′ 17″	2 6,2
2	42 32	10 5	199,6
3	45 14	7 23	107,9
4	47 55	4 42	43,4
5	50 48	1 49	6,5
6	53 20	43	1,0
7	56 15	3 38	25,9
8	59 26	6 49	91,2
9	18 3 41	11 4	240,4
10	6 38	14 1	385,6

Époque moy. 17h 52′ 36″,9

Somme des réductions $\Sigma = 1397'',7$

Latitude du lieu L	= 46° 47′ 35″,7
Distance polaire de l'étoile	= 1° 35′ 49″,2
Id. en secondes	= 5919″,02
Angle parcouru	= 959g,858
Nombre des répétitions	= 10
Angle entre l'astre et le signal	A = { 95g,9858 / 86° 23′ 13″,99

L'astre est à gauche de l'objet terrestre.

Epoque moyenne de la pendule	= 17h 52′ 36″, 9
Correction de la pendule	= 1 5 ,16
Temps sidéral	= 17h 53′ 42″,06
Asc. dr. en temps sidéral Æ	= 59′ 57″,12
Angle horaire oriental P { en temps	7h 6′ 15″,06
{ en angle	106° 33′ 45″,9

Temps calme, vapeurs légères.—Signal peu visible.
Pendule réglée sur le temps sidéral.
Observations faites au théodolite.
Les variations horaires p s'obtiennent en retranchant successivement chacune des heures lues sur la pendule, de l'heure moyenne de celle-ci 17h 52′ 36″,9.

N° XIV.

Azimut déduit des observations de l'étoile polaire.

Log. sec. L	= 0,1645421	Log. ε	= 9,1130—
Log. *d*	= 3,7595938	3 log. *d*	= 1,2788
Log. sin. P	= 9,9815957	Log. sin. P	= 9,9816
Log. 1er terme	= 3,9057316	Log. 4e terme	= 0,3734—
Log. γ	= 4,87732	Log. sin. 1″	= 4,6856—
2 log. *d*	= 7,51919	Log. 1er terme	= 3,9057
Log. sin. P	= 9,98160	Log. Σ	= 3,1454
Log. cos. P	= 9,45491—	Ct. log. (*n* = 10)	= 9,0000
Log. 2e terme	= 1,83305—	Log. 5e terme	= 0,7367—
Log. δ	= 9,8016	1er terme	2° 11′ 8″,81
3 log. *d*	= 1,2788	2e *id.*	— 18 ,08
Log. sin. P	= 9,9816	3e *id.*	+ 0 ,94
2 log. cos. P	= 8,9099	4e *id.*	— 2 ,36
		5e *id.*	— 5 ,46
Log. 3e terme	= 9,9719		

Somme des cinq termes ou azimut oriental de l'étoile polaire.	Z = 2° 12′ 53″,86
Angle horizontal observé	A = 86° 23′ 13″,99
Azimut du signal compté du Nord à l'Est.	A + Z = 88° 36′ 7″,85

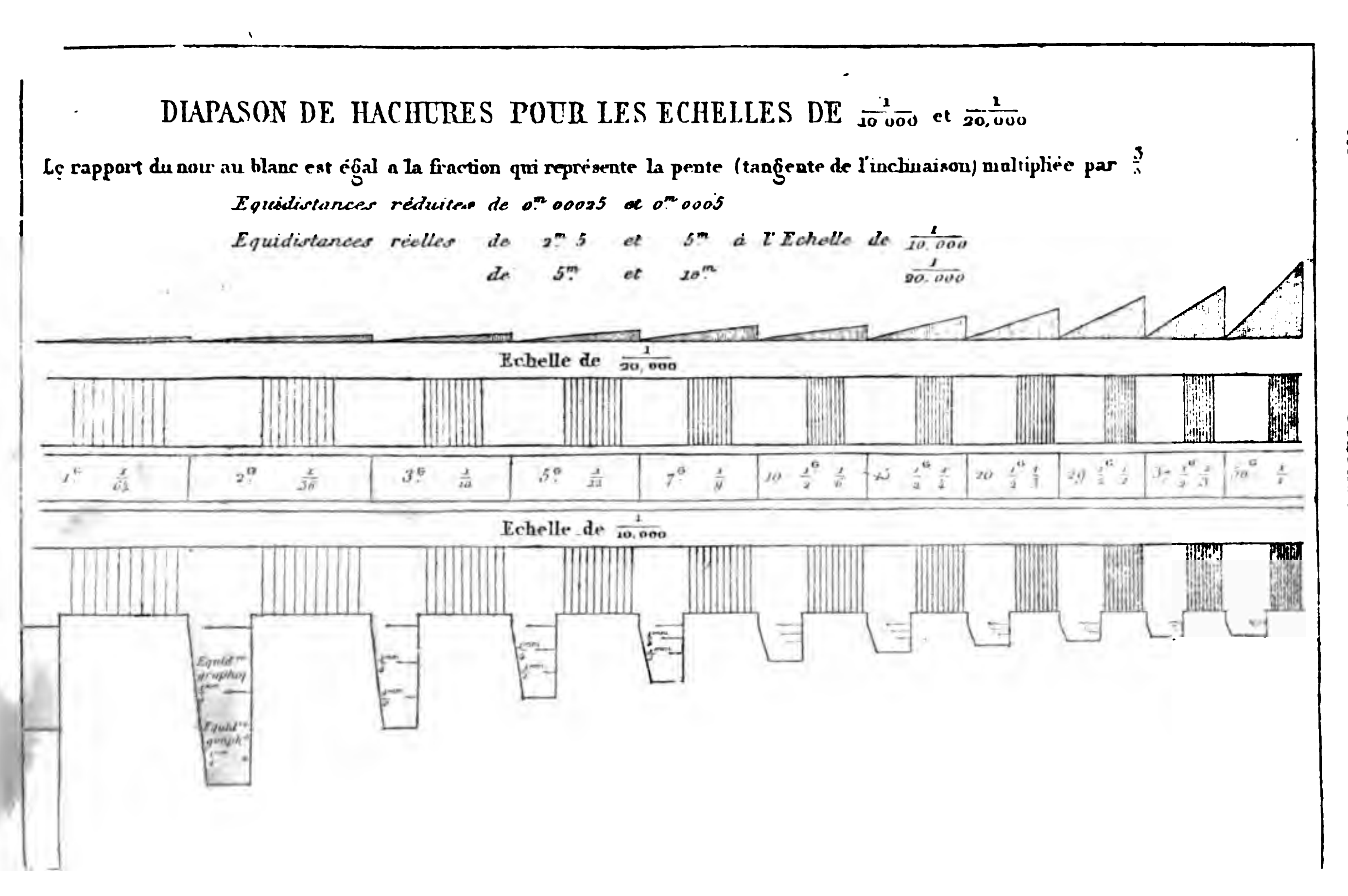

DIAPASON DE HACHURES POUR LES ECHELLES DE $\frac{1}{10\,000}$ et $\frac{1}{20,000}$
Le rapport du noir au blanc est égal à la fraction qui représente la pente (tangente de l'inclinaison) multipliée par
Equidistances réduites de 0m.00025 et 0m.0005
Equidistances réelles de 2m.5 et 5m à l'Echelle de $\frac{1}{10,000}$
de 5m et 10m $\frac{1}{20,000}$
Echelle de $\frac{1}{20,000}$
Echelle de $\frac{1}{10,000}$

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE PREMIER

TOPOGRAPHIE

CHAPITRE Ier.

NOTIONS GÉNÉRALES.

CANEVAS

CHAPITRE II.

MESURE DES DISTANCES.

CHAPITRE III.

MESURE DES ANGLES.

CHAPITRE IV.

LEVÉ DU DÉTAIL.

CHAPITRE V.

CHAPITRE VI.

INSTRUMENTS A RÉFLEXION.

CHAPITRE VII.

ARPENTAGE. — CADASTRE.

NIVELLEMENT RÉGULIER.

CHAPITRE VIII.

NIVELLEMENT CONTINU.

CHAPITRE IX.

NIVELLEMENT TOPOGRAPHIQUE.

CHAPITRE X.

ENSEMBLE DES OPÉRATIONS RELATIVES AU NIVELLEMENT TOPOGRAPHIQUE.

CHAPITRE XI.

LEVÉS ET RECONNAISSANCES MILITAIRES.

CHAPITRE XII.

CANEVAS PERSPECTIFS. — EMPLOI DE LA PHOTOGRAPHIE.

CHAPITRE XIII.

EXÉCUTION GRAPHIQUE.

LIVRE II

GÉODÉSIE

CHAPITRE I[er].

NOTIONS GÉNÉRALES.

CHAPITRE II.

MESURE DES BASES.

CHAPITRE III.

MESURE DES ANGLES.

CHAPITRE IV.

CALCUL DES TRIANGLES.

CHAPITRE V.

FIGURE DE LA TERRE.

CHAPITRE VI.

PROJECTIONS.

CHAPITRE VII.

COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES.

CHAPITRE VIII.

NIVELLEMENT GÉODÉSIQUE.

CHAPITRE IX.

NIVELLEMENT BAROMÉTRIQUE.

LIVRE III

OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES

CHAPITRE I[er].

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

CHAPITRE II.

RÈGLEMENT D'UNE PENDULE.

CHAPITRE III.

LATITUDE.

CHAPITRE IV.

LONGITUDE.

CHAPITRE V.

AZIMUT.

CHAPITRE VI.

DÉFORMATIONS PARTIELLES DU SPHÉROIDE TERRESTRE.

LIVRE IV

CHAPITRE I[er].

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

CHAPITRE II.

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES.

CHAPITRE III.

NOTIONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

LIVRE V

OPTIQUE

CHAPITRE Ier.

PHÉNOMÈNES GÉNÉRAUX.

CHAPITRE II.

MIROIRS ET LENTILLES.

CHAPITRE III.

VISION.

CHAPITRE IV.

MICROSCOPE SIMPLE ET LUNETTE ASTRONOMIQUE.

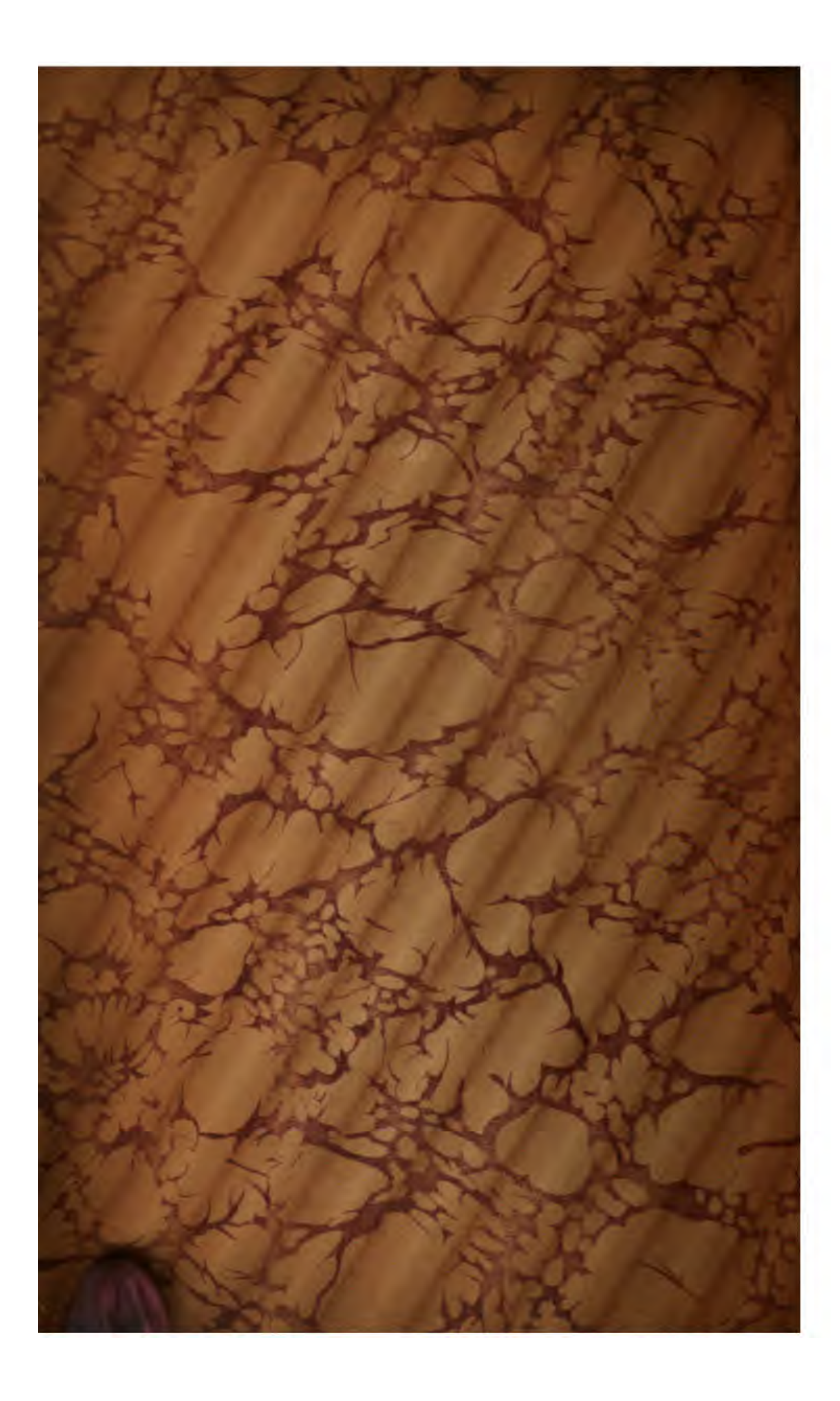
CHAPITRE V.

INSTRUMENTS.

CHAPITRE VI.

APPLICATIONS A LA TOPOGRAPHIE ET A LA GÉODÉSIE.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.




This book should be returned
the Library on or before the last
stamped below.
A fine of five cents a day is incur
by retaining it beyond the specif
time.
Please return promptly.


Eng 518.69.5
Cours de topographie et de geodes
Cabot Science 006520393
3 2044 091 970 707